

Appunti del corso:  
Teoria geometrica degli invarianti  
Prof. Giorgio Ottaviani

Stefano Maggiolo

<http://poisson.phc.unipi.it/~maggiolo/>

[maggiolo@mail.dm.unipi.it](mailto:maggiolo@mail.dm.unipi.it)

2007–2008

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Teorema di finitezza di Hilbert . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Esempi di grado basso</b>	<b>6</b>
2.1	Coniche . . . . .	6
2.2	Curve razionali normali . . . . .	7
2.3	Polarità . . . . .	7
2.4	Equazione della cubica gobba . . . . .	9
2.5	Hessiano . . . . .	9
2.6	Quaterne anarmoniche . . . . .	11
<b>3</b>	<b>SL(2)-invarianti</b>	<b>12</b>
3.1	Peso e grado . . . . .	12
3.2	Reciprocità di Hermite . . . . .	17
<b>4</b>	<b>SL(3)-invarianti</b>	<b>18</b>
4.1	Curve ellittiche . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Calcolo simbolico</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>Costruzione del quoziente</b>	<b>22</b>
6.1	L'esempio delle matrici . . . . .	22
6.2	Generalizzazione del quoziente . . . . .	23
6.3	Caso proiettivo . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Cenni ulteriori</b>	<b>31</b>
7.1	Orbite delle forme lineari . . . . .	31
7.2	Sistemi multilineari . . . . .	32



# 1 Introduzione

02/10/2007

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ , con  $\text{ch } K = 0$  e  $G := \text{GL}(n)$  un gruppo che agisce su  $V$ , cioè, si ha una mappa  $G \times V \rightarrow V: (g, v) \mapsto gv$  che per ogni  $g, h \in G, v_1, v_2 \in V$  e  $\lambda \in K$ , soddisfa

$$\begin{aligned} g(v_1 + v_2) &= gv_1 + gv_2, \\ g(\lambda v_1) &= \lambda gv_1, \\ 1v_1 &= v_1, \\ g(hv_1) &= (gh)v_1. \end{aligned}$$

Si dice che  $V$  è un  $G$ -modulo (o una rappresentazione di  $G$ ).

Si indica con  $K[V]$  l'algebra dei polinomi su  $V$ ; ha una naturale graduazione

$$K[V] = \bigoplus_{m \geq 0} K[V]_m = \bigoplus_{m \geq 0} S^m(\check{V}).$$

In particolare,  $S^0(\check{V}) = K$ ,  $S^1(\check{V}) = \check{V}$  e  $S^k(\check{V})$  sono i polinomi omogenei di  $k$ -esimo grado su  $V$ .

Si può costruire un'azione su  $\check{V}$  a partire da quella su  $V$ : se  $f \in \check{V}$ , si pone  $(gf)(v) := f(g^{-1}v)$ ; questa si può estendere a un'azione di  $G$  su  $K[V]$ : se  $(f_1, \dots, f_m) \in S^m(\check{V})$ ,  $g(f_1, \dots, f_m) := gf_1 \cdots gf_m$ .

**Definizione 1.1.** Una funzione  $f \in K[V]$  si dice *invariante di peso  $p$*  se per ogni  $g \in G$ ,  $gf = (\det g)^p f$  (in particolare, se  $G = \text{SL}(n)$ , un invariante soddisfa  $gf = f$ ). Si denota con  $K[V]^G \subseteq K[V]$  la sottoalgebra generata dagli invarianti.

*Osservazione 1.2.* Non è detto che una sottoalgebra (che non è necessariamente un ideale) di un'algebra finitamente generata sia finitamente generata.

Se  $f_1$  e  $f_2$  sono invarianti di peso rispettivamente  $p_1$  e  $p_2$ , il prodotto  $f_1 f_2$  è un invariante di peso  $p_1 + p_2$ ; se  $p_1 = p = p_2$ ,  $f_1 + f_2$  è un invariante di peso  $p$ ; in generale  $f_1 + f_2$  non è un invariante: per questo motivo nella definizione di  $K[V]^G$  si è presa la sottoalgebra generata.

*Problema 1.3.* Descrivere l'algebra  $K[V]^G$ .

*Esempio 1.4.* Si considerano le forme binarie: sia  $V$  lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado  $m$  in due variabili. Un elemento di  $V$  ha la forma

$$v := a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \cdots + a_m y^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^{m-i} y^i = (a_0, a_1, \dots, a_m),$$

dove con  $a_i \in \check{V}$  si intende l'applicazione lineare che vale 1 su  $x^{m-i} y^i$  e 0 altrove, cioè, in generale, che associa a un polinomio il coefficiente di quel monomio. Sia  $\text{SL}(2)$  che  $\text{GL}(2)$  agiscono su  $V$  attraverso le azioni sulle variabili  $x$  e  $y$ . L'algebra  $K[V]^G$  conterrà polinomi in  $a_0, \dots, a_m$ .

Sia  $g := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{GL}(2)$ ; allora l'azione (per comodità, di  $g^{-1}$ ) risulta

$g^{-1}v\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = v\left(g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$ . Per esempio, per  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} g^{-1}v\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) &= g^{-1}(a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2) = \\ &= a_0(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_1(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) + a_2(\gamma x + \delta y)^2 = \\ &= x^2(a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha\gamma + a_2\gamma^2) + 2xy(a_0\alpha\beta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2\gamma\delta) + \\ &\quad + y^2(a_0\beta^2 + 2a_1\beta\delta + a_2\delta^2) = a'_0x^2 + 2a'_1xy + a'_2y^2. \end{aligned}$$

Si ottiene la seguente:

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\gamma & \gamma^2 \\ \alpha\beta & \alpha\delta + \beta\delta & \gamma\delta \\ \beta^2 & 2\beta\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix};$$

in particolare, si ha una mappa di  $GL(2)$  in  $GL(3)$  che si verifica essere un morfismo di gruppi.

In notazione matriciale, il polinomio iniziale si può scrivere come

$$(x \ y) \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x' \ y') g^t \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

da cui  $\begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = g^t \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} g$ . Prendendo i determinanti,  $a'_0a'_2 - a'^2_1 = (a_0a_2 - a^2_1)(\det g)^2$ , cioè  $I(a_0, a_1, a_2) := a_0a_2 - a^2_1$  è un invariante di peso 2. Si può dimostrare che questo è l'unico invariante per  $m = 2$ , cioè  $K[S^2K^2]^{GL(2)}$  è l'algebra generata da  $I$ : qualunque altro invariante è un polinomio in  $I$ .

Ci si poteva aspettare questo risultato, almeno per i campi algebricamente chiusi, perché un polinomio come quello iniziale si può sempre fattorizzare, diventando della forma  $a_0(x - t_1y)(x - t_2y)$  (ammettendo che  $t_1, t_2 \in \mathbb{P}^1_K$ , cioè che possano avere valore infinito); allora si ha  $I = 0$  se e solo se  $t_1 = t_2$ , che distingue le due disposizioni possibili di una coppia di punti sulla retta proiettiva: coincidenti o distinti.

Per  $m = 3$ , si verifica che gli invarianti sono generati ancora da un solo  $I_3$  che corrisponde al caso in cui due radici siano coincidenti. Nel caso  $m = 4$ , ci sono due invarianti,  $I_2$  e  $I_3$ , di peso rispettivamente 2 e 3. Si calcola che  $I_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a^2_2$  (il cui annullamento corrisponde a una quaterna *armonica*), mentre

$$I_3 = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

(il cui annullamento corrisponde all'anarmonicità della quaterna). Inoltre i due invarianti sono algebricamente indipendenti, perciò  $K[S^4K^2] = K[I_2, I_3]$ ; il discriminante (cioè il polinomio  $\Delta$  tale che  $\Delta(v) = 0$  se e solo se  $v$  ha almeno una radice doppia) è dato da  $I_2^3 - 27I_3^2$ : in questo caso, il discriminante corrisponde a proprietà geometriche non "basilari", in quanto è composto a partire da invarianti più sottili<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Cayley, insieme a Sylvester, risolse completamente i casi  $m = 5$  e  $m = 6$ : nel primo caso, si hanno 4 invarianti, nel secondo 5, ma in entrambi i casi i generatori non sono più algebricamente indipendenti. Per  $m = 7$ , Cayley trovò 20 invarianti, prima di arrendersi

## 1.1 Teorema di finitezza di Hilbert

Se  $W$  è uno spazio vettoriale su cui agisce  $G := \mathrm{GL}(n)$ , si definisce l'*operatore di Reynolds* come un'applicazione lineare  $R: W \rightarrow W^G$  tale che se  $i: W^G \hookrightarrow W$  è l'inclusione,  $R \circ i = \mathrm{Id}_{W^G}$ . L'operatore di Reynolds esiste in molti casi: se  $G$  è finito, si pone  $R(w) := |G|^{-1} \sum_{g \in G} gw$ ; su un gruppo compatto si sostituisce alla sommatoria un integrale. Però  $\mathrm{GL}(n)$  non è compatto; per risolvere questo problema, almeno se  $K = \mathbb{C}$ , si considera dentro  $\mathrm{GL}(n)$  il sottogruppo reale compatto  $U(n) := \{ A \in \mathrm{GL}(n) \mid A\bar{A}^t = I \}$ , il cui complessificato è proprio  $\mathrm{GL}(n)$ . Su  $U(n)$  c'è una misura invariante, cioè una forma di ordine massimo  $\omega$  tale che  $g^*\omega = \omega$  per ogni  $g \in U(n)$ , che si può normalizzare in modo che l'integrale su tutto  $U(n)$  faccia 1. Ora, si definisce  $R(w) := \int_{U(n)} kw\omega$ , dove  $k$  varia in  $U(n)$  (si potrebbe scrivere  $dk$  al posto di  $\omega$ ). Ovviamente  $R$  è lineare ed è l'identità su  $W^G$ ; per l'invarianza della misura, l'immagine di un vettore è invariante per l'azione di  $U(n)$ , ma allora deve essere così anche per l'azione di  $\mathrm{GL}(n)$ , perché appunto  $\mathrm{GL}(n)$  è la complessificazione di  $U(n)$ .

Inoltre, nel caso in esame,  $W$  è un'algebra, e ci si può chiedere cosa succeda moltiplicando  $w$  per  $R(v)$ . Se  $w \in W^G$  e  $v \in W$ , si ottiene l'uguaglianza  $wR(v) = R(wv)$  (cioè  $R$  è  $W^G$ -lineare):

$$R(wv) = \int k(wv)\omega = \int (kw)(kv)\omega = \int w(kv)\omega = w \int kv\omega = wR(v).$$

**Teorema 1.5** (teorema di finitezza di Hilbert). *L'algebra  $K[S^m K^n]^{\mathrm{GL}(n)}$  è finitamente generata.*

*Dimostrazione.* Sia  $W := K[S^m K^n] = \bigoplus_{d \geq 0} W_d$ ; in particolare  $W_d \supseteq W_d^G$ . Denotando con  $W^+ := \bigoplus_{d > 0} W_d$  la parte positiva, si considera  $W^{+G} = \bigoplus_{d > 0} W_d^G$  (l'uguaglianza deriva dal fatto che  $W_0 = W_0^G = \mathbb{C}$ ) e l'ideale generato da quest'ultimo,  $I := W^{+G}W$ , i cui elementi sono della forma  $\sum a_i f_i$ , con  $a_i \in W$  e  $f_i \in W^{+G}$ . Per il teorema della base,  $I$  è finitamente generato, cioè  $I = (z_1, \dots, z_k)$ , e inoltre si può supporre che i generatori siano elementi invarianti: comunque  $z_j = \sum a_i f_i$ , con  $f_i \in W^{+G}$ , quindi basta sostituire  $z_j$  con gli  $f_i$ .

Si vuole dimostrare che ogni  $f \in W^G$  si scrive come polinomio in  $z_1, \dots, z_k$  a coefficienti costanti. Se  $\deg f = 0$ , è banalmente vero; se l'asserto è vero per i polinomi di grado minore di  $d$  e  $f$  ha grado  $d$ , si scrive  $f = \sum a_i z_i$  e si ha

$$f = R(f) = \sum R(a_i z_i) = \sum z_i R(a_i);$$

poiché  $\deg z_i > 0$ , si ha  $\deg R(a_i) < d$  e per ipotesi induttiva si ha la tesi.  $\square$

---

congetturando che fossero infiniti. In realtà, Gordan nel 1868 dimostrò che per qualunque  $m$ , gli invarianti di  $K[S^m K^2]$  sono finitamente generati e diede un complicato algoritmo per trovare i generatori (per  $m = 7$  in realtà sono 30 invarianti, dopo che Sylvester sbagliò calcolandone 26 a mano). Per le curve piane, cioè  $S^m K^3$ , l'algoritmo di Gordan fallisce (a parte nel caso delle cubiche); il problema passò a Hilbert, che nel 1890 dimostrò, pur senza una dimostrazione costruttiva, il teorema di finitezza: l'algebra degli invarianti di  $K[S^m K^n]$  sotto l'azione di  $\mathrm{GL}(n)$  è sempre finitamente generata. Come lemmi ausiliari della dimostrazione, Hilbert dimostrò il teorema della base e il Nullstellensatz, che sono diventati più famosi del risultato a cui mirava.

*Osservazione 1.6.* Ciò che si è dimostrato per  $GL(n)$ , vale anche per un qualsiasi gruppo *riduttivo*, cioè un gruppo  $G$  che contiene un sottogruppo compatto  $K$  il cui complessificato è  $G$ . Inoltre, è possibile anche prendere una varietà  $X$  immersa nello spazio affine  $\mathbb{A}_V^n$ , con algebra delle coordinate  $K[X] = K[V]/I$ : se  $X$  è invariante per  $G$ , l'algebra degli invarianti di una varietà affine su cui agisce un gruppo riduttivo è finitamente generata.

## 2 Esempi di grado basso

05/10/2007

### 2.1 Coniche

Un polinomio  $f(x, y) := a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$  si può vedere a meno di moltiplicazione per una costante come il punto  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{P}_K^2$ . In questo piano proiettivo, si presenta in modo naturale il discriminante  $\Delta := a_0a_2 - a_1^2$ , cioè una conica dentro  $\mathbb{P}_K^2$ , i cui punti corrispondono ai polinomi che si scrivono, a meno di una costante, come  $(x - ty)^2 = x^2 - 2txy + t^2y^2$ : la conica è parametrizzata da  $a_0 = 1, a_1 = -t, a_2 = t^2$  (supponendo  $t \in \mathbb{P}_K^1 \setminus \{\infty\}$ ). Si ha che un polinomio  $f$  appartiene alla retta tangente nel punto  $(x - ty)^2$  se e solo se  $f$  ha  $t$  come radice, cioè se  $f(x, y) = (x - ty)l_1(x, y)$ : infatti, al variare di  $l_1$ , gli  $f$  descrivono ovviamente una retta, e questa retta incontra la conica nel punto desiderato.

A meno di cambiare coordinate, si può scrivere un punto della conica come  $x^2$ , perciò gli elementi della retta tangente sono  $xl_1(x, y)$ ; se  $y^2$  è un altro punto della conica, di tangente  $yl_2(x, y)$ , chiaramente le tangenti devono incontrarsi in  $xy$ . Allora, se  $f := (x - t_1y)(x - t_2y)$  è un polinomio, si conoscono i due punti di tangenza con la conica:  $(x - t_1y)^2$  e  $(x - t_2y)^2$ . L'equazione della retta polare di  $f$  risulta essere  $a_0t_1t_2 + a_1(t_1 + t_2) + a_2 = 0$  (basta verificare che passa per i due punti di tangenza). Allo stesso modo, si verifica che le rette tangenti hanno la forma  $a_0t_i^2 + 2a_1t_i + a_2 = 0$ . Viceversa, se si ha una retta che interseca la conica nei punti relativi alle radici doppie  $t_1$  e  $t_2$ , la retta è la polare del polinomio che ha come radici  $t_1$  e  $t_2$ .

Se ora  $Q$  è un polinomio omogeneo di secondo grado in  $n$  variabili,  $Q(x_1, \dots, x_n) := \sum a_{i,j}x_ix_j = x^tAx$ , dove  $x$  è il vettore colonna degli  $x_i$  e  $A$  è una matrice simmetrica. La forma bilineare associata a  $A$  è  $F: V \times V \rightarrow K$  con  $F(x, y) = y^tAx$  e si ha  $F(x, y) = 1/2(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$ . L'iperpiano polare di  $y$  è  $\{x \mid F(x, y) = 0\}$ . In particolare, se  $x$  appartiene alla quadrica, cioè  $0 = Q(x) = F(x, x)$ , allora  $x$  appartiene anche all'iperpiano polare, che sarà il tangente in  $x$  alla quadrica. Grazie alla polarità, si recupera la conica:  $Q(y) = 0$  se e solo se  $y$  appartiene all'iperpiano polare. Inoltre, se  $x$  appartiene all'iperpiano polare di  $y$ , si ha anche che  $y$  appartiene all'iperpiano polare di  $x$ .

La polarità si estende anche in dimensione qualunque: per esempio, in dimensione 3 si ha una forma trilineare  $F$  e  $Q(x) = F(x, x, x)$  e in  $y$  si possono considerare la prima polare, data da  $\{x \mid F(x, x, y) = 0\}$ , che è una conica, e la seconda polare, data da  $\{x \mid F(x, y, y) = 0\}$ , che è l'iperpiano tangente. La reciprocità è più sottile:  $x$  appartiene alla polare  $i$ -esima di  $y$  se e solo se  $y$  appartiene alla  $3 - i$ -esima polare di  $x$ .

## 2.2 Curve razionali normali

Si cerca di generalizzare quanto detto per le coniche: si lavora con un polinomio

$$f(x, y) := \sum_{i=0}^r a_i \binom{r}{i} x^{r-i} y^i = (a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{P}_K^r.$$

I polinomi più semplici sono  $(x - ty)^r$ , per cui  $a_i = (-1)^i t^i$ . La curva descritta da questi polinomi è la curva razionale normale  $C_r$ .

*Osservazione 2.1.* Il gruppo  $SL(2)$  agisce su  $\mathbb{P}^r$ , tramite l'azione sulle incognite. Quest'azione può essere pensata anche come un'azione sulle radici dei polinomi in  $\mathbb{P}^1$ .

Chiaramente, l'azione di  $SL(2)$  fissa la curva razionale normale (i cui punti corrispondono ai polinomi con tutte le radici coincidenti). Preso un punto di  $C_r$ , si può immaginare sia  $x^r$ ; avendo una parametrizzazione, si possono calcolare tutti i piani osculatori, generati dalle prime  $i$  derivate. Poiché dal punto di vista della parametrizzazione tutti i punti sono uguali, e non tutti i punti possono essere flessi di qualche tipo, si ha che tutti i piani osculatori sono ben definiti.

Si calcola la tangente a  $C_r$  nel punto  $x^r$  calcolando la derivata prima:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x - ty)^r - x^r}{t} = rx^{r-1}y,$$

cioè si ritrova il risultato precedente: la retta tangente è data dai polinomi del tipo  $x^{r-1}l_1$ , mentre allo stesso modo di trovano i vari piani osculatori dati da  $x^{r-k}l_1 \cdots l_k$ , fino ad arrivare all'iperpiano tangente che per  $x^r$  corrisponde ai polinomi che hanno 0 come radice, mentre in generale per il punto  $(x - ty)^r$ , a quelli che hanno  $t$  come radice, cioè all'iperpiano  $\sum a_i \binom{r}{i} t^{r-i} = 0$ .

Se si considerano gli iperpiani tangenti, si hanno degli iperpiani di codimensione 1 che variano su una curva, quindi ci si aspetta che l'unione copra tutto lo spazio. Se però si considerano gli iperpiani osculatori di codimensione 2, la loro unione corrisponde ai polinomi che hanno una radice doppia e si chiama *ipersuperficie discriminante* (che non è altro che il luogo degli zeri del discriminante) e ha grado  $2(r - 1)$ .

Una curva razionale normale ha grado  $r$ : tagliata da un iperpiano  $\sum a_i \alpha_i = 0$ , si ottengono i punti che soddisfano  $\sum \alpha_i (-1)^i t^i = 0$ . In particolare, non c'è nessun iperpiano che contiene la curva. Se  $C \subseteq \mathbb{P}^r$  è una curva non contenuta in un iperpiano, allora il grado di  $C$  è sempre maggiore o uguale a  $r$  (se  $\deg C < r$ , presi  $r$  punti sulla curva, questi generano un iperpiano che tocca  $C$  in almeno  $r$  punti, quindi la contiene), perciò le curve razionali normali raggiungono il minimo. Inoltre, a meno di cambio di coordinate, se una curva ha grado  $r$  ed è non degenera, è la curva razionale normale.

## 2.3 Polarità

Sia  $f(x, y) = \prod_{i=1}^r (x - t_i y)$  con i  $t_i$  distinti; come si era fatto per le coniche, si possono prendere gli  $r$  punti sulla curva razionale normale dei polinomi  $(x - t_i y)^r$ ; è naturale chiamare l'iperpiano generato da questi punti *iperpiano polare* di  $f$ . L'iperpiano tangente a  $C_r$  in  $(x - t_i y)^r$  è parametrizzato da  $(x - t_i y)g_i(x, y)$  e in particolare contiene  $f$ . Se le radici sono distinte, come si

è supposto,  $f$  sta nell'intersezione di tutti gli iperpiani tangenti, e per questioni di dimensione è tutta l'intersezione. Se nel caso delle coniche la condizione  $f \in P(f)$  (dove  $P(f)$  è l'iperpiano polare) dava una conica, in generale si distinguono due casi: se  $r$  è dispari, ogni  $f$  appartiene al suo piano polare; se  $r$  è pari,  $\{f \mid f \in P(f)\}$  è una quadrica, detta *anarmonica*, invariante per l'azione del gruppo. Per dimostrare queste proprietà, si deve studiare la corrispondenza  $\varphi_r: S^r U \rightarrow (S^r U)^\vee: f \mapsto P(f)$  (con  $\dim U = 2$ ); questa applicazione sarà simmetrica per  $r$  pari e antisimmetrica per  $r$  dispari, infatti  $\varphi_1 = S^r \varphi_1$ , dove  $\varphi_1: U \rightarrow \check{U}$  è antisimmetrica. Si costruisce  $\varphi_1$  in questo modo: sia  $(e_1, e_2)$  una base di  $\dim U = 2$ , allora  $\Lambda^2 \check{U} = K$ ; sia  $(f_1, f_2)$  la base duale di  $\check{U}$ ; si definisce  $\varphi_1$  come la mappa

$$\begin{aligned} U &\rightarrow U \otimes \Lambda^2 \check{U} &\rightarrow \check{U} \\ e_i &\mapsto e_i \otimes (f_1 \wedge f_2) &\mapsto f_1(e_i)f_2 - f_2(e_i)f_1, \end{aligned}$$

da cui  $\varphi_1(e_1) = f_2$  e  $\varphi_1(e_2) = -f_1$ , cioè la matrice di  $\varphi_1$  è  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

In effetti, si può rivedere tutto ciò facendo i conti:

$$\begin{aligned} f &= \prod (x - t_i y) = x^r - x^{r-1}y(\sum t_i) + \cdots + (-1)^r y^r (\prod t_i) = \\ &= \sum x^{r-i} y^i (-1)^i \sigma_i(t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

dove  $\sigma_i$  è l' $i$ -esimo polinomio simmetrico elementare; l'iperpiano polare ha equazione  $\sum a_i \sigma_{r-i}(t_1, \dots, t_n) = 0$  (perché passa per tutti gli  $r$  punti della forma  $(1, -t_i, \dots)$ ). In definitiva, i coefficienti di  $f$  sono

$$\left( \sigma_0, -\frac{\sigma_1}{\binom{r}{1}}, \frac{\sigma_2}{\binom{r}{2}}, \dots, (-1)^r \sigma_r \right),$$

mentre quelli di  $P(f)$  sono  $(\sigma_r, \dots, \sigma_0)$ . La matrice dell'applicazione  $f \mapsto P(f)$  è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & (-1)^r \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -\binom{r}{1} & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora, dato  $f$ ,  $P(f)$  ha coefficienti  $Af$  e  $f \in P(f)$  se e solo se  $f^t A f = 0$ . Ma se  $r$  è dispari,  $A$  è antisimmetrica, perciò  $f^t A f = 0$  per ogni  $f$ ; se  $r$  è pari,  $A$  è simmetrica e definisce una quadrica che descrive i polinomi che appartengono al proprio iperpiano polare.

Nel caso pari, questa proprietà dà una classificazione delle  $r$ -uple di radici anche nel caso che siano tutte distinte: si distinguono le  $r$ -uple per cui il polinomio che le ha come radici appartiene al suo piano polare e quelle per cui il polinomio non vi appartiene. Questo è un ulteriore  $SL(2)$ -invariante oltre al discriminante, che per i polinomi di grado 4 risulta essere  $I(a_0, \dots, a_4) := a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$ . Per calcolare questo polinomio, si scrive la condizione  $\sigma^t A \sigma$  (dove  $\sigma := (\sigma_0, -\sigma_1/4, \sigma_2/6, -\sigma_3/4, \sigma_4)$ ) nelle  $a_i$ : l'iperpiano polare relativo a  $\sigma$  risulta essere  $a_0 \sigma_4 + a_1 \sigma_3 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_1 + a_4 \sigma_0 = 0$ , che applicato ancora a  $\sigma$  dà  $2\sigma_0 \sigma_4 - 1/2 \sigma_1 \sigma_3 + 1/6 \sigma_2^2 = 0$ , cioè, trascritto nelle  $a_i$ ,  $a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$ . Questo è l'invariante il cui annullarsi caratterizza le *quaterne anarmoniche*.



## 2.4 Equazione della cubica gobba

Trovare l'equazione della cubica gobba significa eliminare il parametro dall'equazione  $a_i = (-1)^i t^i$ . Si verifica che  $(a_0, \dots, a_3) \in C_3$  se e solo se  $\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = 1$ . Tuttavia, le tre equazioni di quadriche che danno per intersezione la cubica gobba non sono invarianti, perché per l'azione di  $\text{SL}(2)$  si muovono anche se definiscono sempre la cubica gobba. Insieme però sono invarianti, nel senso che l'ideale che definiscono è invariante (l'azione di  $\text{SL}(2)$  manda una quadrica in una combinazione delle tre).

*Esercizio 2.2.* Dato  $(a_0, \dots, a_3) \in C_3$ , esiste unico  $[x, y] \in \mathbb{P}^1$  tale che

$$\text{rk} \begin{pmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Il determinante di questa matrice serve nella risoluzione dell'equazione di terzo grado.

## 2.5 Hessiano

09/10/2007

Dato un polinomio  $f(x, y) = (a_0, \dots, a_r)$ , si definisce l'hessiano di  $f$  come  $H(f) := \det \begin{pmatrix} f_{x,x} & f_{x,y} \\ f_{y,x} & f_{y,y} \end{pmatrix}$ , che si può vedere come funzione di  $x, y$  e  $a$ . Le derivate hanno grado  $r - 2$ , di conseguenza l'hessiano è una forma di grado  $2(r - 2)$ .

L'hessiano è il primo esempio di *covariante*: cioè è un invariante di peso negativo (in particolare, l'hessiano ha peso  $-2$ ). Infatti, sia  $(x, y)$  una base di  $U$ ; allora  $(\partial x, \partial y)$  è una base per  $\check{U}$ . Gli endomorfismi di  $U$  sono  $\text{End}(U) = U \otimes \check{U}$  e l'identità è rappresentata da  $x\partial x + y\partial y = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \end{pmatrix}$ . L'hessiano si può costruire come  $\begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \end{pmatrix} f(\partial x, \partial y)$ , ammettendo che l'azione di  $\partial x$  e  $\partial y$  sia la stessa a destra e a sinistra. Ora, l'azione di  $\text{GL}(2)$  su  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dà un'azione su  $\check{U}$  che risulta essere  $\begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \end{pmatrix} = (g^{-1})^t \begin{pmatrix} \partial x' \\ \partial y' \end{pmatrix}$  (basta calcolare  $\partial x$  e  $\partial y$  su  $x'$  e  $y'$ ); di conseguenza, il calcolo esplicito dà  $H(x, y, a) = (\det g)^{-2} H(x', y', a)$ .

Per la cubica gobba,  $f := a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$  e si calcola

$$H(f) = \det 6 \cdot \begin{pmatrix} a_0x + a_1y & a_1x + a_2y \\ a_1x + a_2y & a_2x + a_3y \end{pmatrix}.$$

In particolare, i coefficienti dell'hessiano sono esattamente le equazioni della cubica gobba. Inoltre si ha che

$$\begin{pmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 & 0 \\ a_0 & H(f) & \\ a_1 & & \end{pmatrix},$$

cioè il determinante della prima matrice è il determinante hessiano. Una proprietà analoga vale per le curve razionali normali di qualsiasi grado.

**Teorema 2.3** (Sylvester). *Se  $t_1$  e  $t_2$  sono le radici dell'hessiano, allora  $f$  appartiene alla retta che interseca la curva razionale normale nei punti relativi a  $t_1$  e a  $t_2$ .*

*Dimostrazione.* Si usa l'espressione dell'hessiano come determinante della matrice di dimensione 3

$$\begin{pmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix};$$

a ogni  $f = (a_0, \dots, a_3)$  si associa una matrice  $A := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ . Se  $f \in C_3$  allora questa matrice ha rango 1. Se  $A_1$  e  $A_2$  sono le matrici dei punti sulla cubica gobba relativi alle radici dell'hessiano, allora si deve dimostrare che  $A = \lambda A_1 + \mu A_2$ . Le matrici relative alle radici dell'hessiano sono  $A_j := \begin{pmatrix} 1 & -t_j & t_j^2 \\ -t_j & t_j^2 & -t_j^3 \end{pmatrix}$ . Allora, posto  $R := (y^2, -xy, x^2)$ ,  $\det(\lambda A_1 + \mu A_2) = 0$  in  $(x_j, y_j) = (-t_j, 1)$ , perché, per la linearità sulle righe, si può spezzare il determinante in quattro determinanti:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} R \\ \lambda A_{1,1} + \mu A_{2,1} \\ \lambda A_{1,2} + \mu A_{2,2} \end{pmatrix} &= \lambda^2 \det \begin{pmatrix} R \\ A_{1,1} \\ A_{1,2} \end{pmatrix} + \lambda \mu \det \begin{pmatrix} R \\ A_{1,1} \\ A_{2,2} \end{pmatrix} + \\ &+ \mu \lambda \det \begin{pmatrix} R \\ A_{2,1} \\ A_{1,2} \end{pmatrix} + \mu^2 \det \begin{pmatrix} R \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

il primo e l'ultimo si annullano perché  $A_1$  e  $A_2$  sono matrici relative a punti della curva razionale normale, quindi le ultime due righe sono linearmente dipendenti; il secondo e il terzo si annullano perché si ha almeno una riga linearmente dipendente con la prima. Questo significa che ogni punto della retta secante ha radici dell'hessiano uguali a  $t_1$  e  $t_2$ ; viceversa, preso un punto qualsiasi, esiste unica la secante passante per quel punto.  $\square$

Geometricamente, se si costruisce la proiezione della cubica gobba da  $f$ , si ha che i due punti hanno la stessa immagine, e questa sarà l'unica singolarità della curva proiettata.

Grazie all'hessiano, si ha un metodo geometrico per risolvere l'equazione di terzo grado. Si cerca di ricondurre una qualsiasi equazione di terzo grado nella forma  $l_1^3 + l_2^3 = 0$ , che si risolve tramite  $(l_1/l_2)^3 = -1$ . Ma i punti  $l_1$  e  $l_2$  sono proprio le radici dell'hessiano: si può scrivere per quanto detto  $f = \lambda l_1^3 + \mu l_2^3$ , e i coefficienti si possono inglobare dentro le forme lineari.

Nel caso reale, si osserva che se ci si riconduce a  $\lambda l_1^3 + \mu l_2^3 = 0$  con  $\lambda, \mu$  e i coefficienti delle forme reali, allora c'è solo una soluzione reale, perché si ha  $(l_1/l_2)^3 = -\mu/\lambda$  e le tre radici del secondo membro sono due complesse e una reale. Quindi le equazioni che hanno tre radici reali non ammettono una forma di quel tipo con coefficienti reali. Di conseguenza, la condizione affinché un polinomio reale abbia tre radici reali è che  $(a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) < 0$  (cioè il discriminante dell'hessiano deve essere negativo, che significa che le radici sono complesse). Questa equazione taglia lo spazio  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  in due parti, la prima dove le radici sono tutte reali, e l'altra dove le radici sono reali e complesse. Una secante deve stare quindi sempre in questa seconda parte, perché un punto sulla secante ha radici dell'hessiano complesse.

*Esercizio 2.4.* L'equazione  $H(f) = 0$ , grado per grado dà delle quadriche che tagliano la curva razionale normale  $C_r$  come schema.

## 2.6 Quaterne anarmoniche

Si considera la curva razionale normale di grado 4: questa volta, le secanti hanno 3 gradi di libertà in uno spazio di dimensione 4; ci si aspetta quindi che la varietà secante, cioè quella formata dalle somme di due potenze quarte, separi in due parti  $\mathbb{P}^4$ .

**Teorema 2.5.** *Dato  $f \in S^4U$ , se esistono delle forme lineari  $l_1$  e  $l_2$  tali che  $f = l_1^4 + l_2^4$  allora si annulla il determinante di*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.* Data una base  $(x, y)$  di  $U$ , una base di  $S^2U$  è  $(x^2, 2xy, y^2)$  e la corrispondente base duale è  $(\partial_x^2, \partial_x\partial_y, \partial_y^2)$ , allora si considera la matrice, dove l'uguaglianza è a meno di costanti:

$$\begin{pmatrix} \partial_x^2 \\ \partial_x\partial_y \\ \partial_y^2 \end{pmatrix} f(\partial_x^2 \quad \partial_x\partial_y \quad \partial_y^2) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Si considera il morfismo di gruppi  $f: \text{GL}(2) \rightarrow \text{GL}(3)$  dato da

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\gamma & \gamma^2 \\ \alpha\beta & \alpha\delta + \beta\delta & \gamma\delta \\ \beta^2 & 2\beta\delta & \delta^2 \end{pmatrix},$$

la base duale cambia per l'azione di  $g$  secondo

$$\begin{pmatrix} \partial_x^2 \\ \partial_x\partial_y \\ \partial_y^2 \end{pmatrix} = (f(g)^{-1})^t \begin{pmatrix} \partial_{x'}^2 \\ \partial_{x'}\partial_{y'} \\ \partial_{y'}^2 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni di  $C_4$  sono date dalle condizioni  $\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} = 1$ . Ora, un punto su una secante corrisponde a una combinazione lineare di due matrici di quel tipo, perciò corrisponde a una matrice di rango al più 2, in particolare con determinante nullo.  $\square$

Si potrebbe dimostrare anche il viceversa del teorema, che vale genericamente a meno dei polinomi che stanno sulle tangenti di  $C_4$ .

Con un facile calcolo, si ha  $\text{SL}(2) = \text{Sp}(1)$ ; si considera il morfismo di gruppi  $f: \text{SL}(2) \rightarrow \text{SL}(3)$  visto all'inizio; da  $g^t J g = J$  si ottiene  $f(g^t) f(J) f(g) = f(J) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Inoltre,

$$f(g)^t \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} f(g) = \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a'_2 & a'_3 & a'_4 \end{pmatrix}.$$

La differenza tra  $f(g)^t$  e  $f(g^t)$  sta solo in alcuni coefficienti:

$$f(g)^t = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\gamma & \gamma^2 \\ \alpha\beta & \alpha\delta + \beta\gamma & \gamma\delta \\ \beta^2 & 2\beta\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \quad f(g^t) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\gamma & \gamma^2 \\ 2\alpha\beta & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\gamma\delta \\ \beta^2 & \beta\delta & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

In particolare, si ha che  $\text{diag}(1, 2, 1)f(g)^t \text{diag}(1, 1/2, 1) = f(g^t)$ ; se si pone  $H := \text{diag}(1, 1/2, 1)$ , si ottiene  $f(g)^t H = Hf(g^t)$ , da cui  $f(g^t)Hf(J)f(g) = Hf(J)$ , cioè si deve modificare  $f(J)$  in  $Hf(J) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Allora si ha

$$f(g)^t(A - tHf(J))f(g) = f(g)^t Af(g) - tHf(J),$$

da cui  $\det(A - tHf(J)) = \det(A' - tHf(J))$ . Ma allora tutti i coefficienti del polinomio  $\det(A - tHf(J))$  sono invarianti. In effetti, questo polinomio, detto *polinomio caratteristico simplettico*, risulta essere  $-\frac{t^3}{2} + tI_2(a_i) + I_3(a)$  e si ritrovano i due invarianti delle quaterne armoniche e anarmoniche.

### 3 SL(2)-invarianti

16/10/2007

#### 3.1 Peso e grado

Preso un gruppo (per esempio SL(2)), si considera lo spazio tangente nell'identità  $\mathfrak{sl}(2) := T_I \text{SL}(2)$  (di dimensione 3); un campo vettoriale generato fissando un vettore in  $\mathfrak{sl}(2)$  e facendolo variare tramite il differenziale della moltiplicazione è detto *invariante a sinistra*. La *moltiplicazione bracket*  $[X, Y] := XY - YX$  è un'operazione interna a  $\mathfrak{sl}(2)$ . Fissate  $D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\Delta := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , allora  $[D, \Delta] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e questi tre elementi sono una base di  $\mathfrak{sl}(2)$ .

Dentro  $\mathfrak{sl}(2)$ , le matrici del tipo  $\text{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$  formano un sottogruppo abeliano isomorfo a  $\mathbb{C}^*$  detto *toro*. Invece, le matrici del tipo  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$  e del tipo  $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  formano sottogruppi ancora abeliani, ma isomorfi a  $\mathbb{C}$ . Dentro GL(2) si ha la stessa situazione, solo che un toro è dato anche dalle matrici del tipo  $\text{diag}(\lambda, \mu)$ , che sono isomorfe a  $\mathbb{C}^{*2}$ .

**Definizione 3.1.** Il monomio  $a_0^{\nu_0} \cdots a_n^{\nu_n}$  ha *grado*  $\sum_{i=0}^n \nu_i$  e *peso*  $\sum_{i=0}^n i\nu_i$ . Un polinomio con tutti i monomi di un certo peso è detto *isobarico*.

Per esempio,  $a_0 a_2$  e  $a_1^2$  hanno entrambi peso e grado uguali a 2.

**Teorema 3.2.** Un polinomio  $I(a_0, \dots, a_n)$  è invariante di peso  $p$  per l'azione di  $(\mathbb{C}^*)^2 = \{\text{diag}(\lambda, \mu)\}$  (cioè  $I(a'_0, \dots, a'_n) = (\lambda\mu)^p I(a_0, \dots, a_n)$ ) se e solo se tutti i suoi monomi hanno grado  $g$  e peso  $p = ng/2$ .

*Dimostrazione.* Facendo agire un elemento  $h := \text{diag}(\lambda^{-1}, \mu^{-1})$ , si ha:

$$h(a_0 x^n + \cdots + a_n y^n) = a_0 (\lambda x)^n + \cdots + a_n (\mu y)^n,$$

cioè  $a'_i = a_i \lambda^{n-i} \mu^i$ . Se  $a_0^{\nu_0} \cdots a_n^{\nu_n}$  è un monomio di un invariante, si ha

$$\begin{aligned} a_0^{\nu_0} \cdots a_n^{\nu_n} &= a_0^{\nu_0} \lambda^{n\nu_0} a_1^{\nu_1} \lambda^{(n-1)\nu_1} \mu^{\nu_1} \cdots a_n^{\nu_n} \mu^{n\nu_n} = \\ &= (a_0^{\nu_0} \cdots a_n^{\nu_n}) \lambda^{n\nu_0 + (n-1)\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1}} \mu^{\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n}. \end{aligned}$$

Se i due esponenti sono uguali e valgono  $p$ , allora, posto  $g = \sum \nu_i$ , si ha  $2p = ng$ .  $\square$

Sotto l'azione di  $\mathbb{C}^* \subseteq \text{SL}(2)$ , vale l'analogo: i polinomi invarianti per  $\mathbb{C}^*$  di grado  $g$  in  $a_0, \dots, a_n$  sono quelli isobarici di peso  $p = ng/2$ . Per dimostrarlo, basta porre  $\mu = \lambda^{-1}$  nella dimostrazione. In particolare, si ricavano delle condizioni aritmetiche: per esempio,  $n$  e  $g$  non possono essere entrambi dispari.

**Teorema 3.3.** *Sia*

$$D := a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)a_i \frac{\partial}{\partial a_{i+1}};$$

$I(a_0, \dots, a_n)$  è invariante per l'azione di  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \text{SL}(2)$  se e solo se  $DI = 0$ .

*Dimostrazione.* L'azione del gruppo è data da  $hx = x + ty$  e  $hy = y$ ; allora l'azione su  $f$  dà

$$\begin{aligned} hf &= a_0(x+ty)^n + na_1(x+ty)^{n-1}y + \cdots + a_n y^n = \\ &= x^n a_0 + x^{n-1}y(na_0 + na_1) + \\ &\quad + x^{n-2}y^2 \left( \binom{n}{2} a_0 t^2 + a_1 n(n-1)t + \binom{n}{2} a_2 \right) + \cdots. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $a'_0 = a_0$ ,  $a'_1 = ta_0 + a_1$ ,  $a'_2 = a_0 t^2 + 2a_1 t + a_2$ ; in generale,  $a'_i = \sum_{j=0}^i a_j \binom{i}{j} t^{i-j}$ . Allora  $I(a'_0, \dots, a'_n)$  è invariante se e solo è costante rispetto a  $t$ , cioè

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} I(a'_0, \dots, a'_n) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial I}{\partial a'_i} \frac{\partial a'_i}{\partial t};$$

ma  $\partial a'_i / \partial t = i a'_{i-1}$ , da cui

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial I}{\partial a'_i} i a'_{i-1} = DI,$$

cioè  $I$  è invariante se e solo se  $DI = 0$ . □

*Esempio 3.4.* Per  $n = 2$ ,  $D = a_0 \partial / \partial a_1 + 2a_1 \partial / \partial a_2$  e se  $I$  è invariante di grado  $g = 2$ , si deve avere  $p = ng/2 = 2$ , quindi  $I(a_0, a_1, a_2) = Aa_0 a_2 + Ba_1^2$ . Applicando  $D$ , si ottiene  $DI = 2Aa_0 a_1 + 2Ba_1 a_2 = 0$  se e solo se  $A = -B$ , cioè se e solo se  $I$  è un multiplo di  $a_0 a_2 - a_1^2$ .

*Esempio 3.5.* Si osserva in particolare che  $D$  lascia il grado invariato, mentre il peso cala di 1. Per le quaterne anarmoniche:  $n = 4$ ,  $g = 2$ , da cui  $p = 4$ : si cercano polinomi in  $a_0, \dots, a_4$  di peso 4 e grado 2, che sono generati dai monomi  $a_0 a_4$ ,  $a_1 a_3$ ,  $a_2^2$ . Si hanno le seguenti:

$$\begin{aligned} D(a_0 a_4) &= 4a_0 a_3, \\ D(a_1 a_3) &= a_0 a_3 + 3a_1 a_2, \\ D(a_2^2) &= 4a_1 a_2. \end{aligned}$$

In particolare,  $D$  è suriettiva dai monomi di peso 4 ai monomi di peso 3. Ora, se  $I(a_0, \dots, a_4) = Aa_0 a_4 + Ba_1 a_3 + Ca_2^2$ ,  $I$  è invariante se e solo se  $DI = a_0 a_3(4A + B) + a_1 a_2(3B + 4C) = 0$ , che ha soluzione  $(A, B, C) = (1, -4, 3)$ : si ritrova che  $I$  è  $a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$ . L'azione del toro ha dato il vincolo di poter avere una combinazione di soli 3 monomi; l'azione delle matrici  $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ha dato l'ulteriore vincolo  $DI = 0$ .

L'azione di  $D$  associa a  $a_i$  il monomio  $i a_{i-1}$  e corrisponde all'azione del generatore  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Esattamente duale al teorema precedente è il seguente.

**Teorema 3.6.** *Il polinomio  $I(a_0, \dots, a_n)$  è invariante per l'azione di  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$  se e solo se  $\Delta I = 0$ , dove*

$$\Delta = \sum_{i=0}^n (n-i+1)a_i \frac{\partial}{\partial a_{i-1}}.$$

L'unica differenza è che  $\Delta$  aumenta il peso di 1. L'operatore  $[D, \Delta]$  chiaramente lascia invariato il peso dei polinomi. Infatti

$$\begin{aligned} D\Delta &= \sum_{i,j=0}^n ia_{i-1}(n-j+1) \frac{\partial}{\partial a_i} \left( a_j \frac{\partial}{\partial a_{j-1}} \right) = \\ &= \sum_{i,j=0}^n ia_{i-1}(n-j+1) - \left( \delta_{i,j} \frac{\partial}{\partial a_{j-1}} + a_j \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_{j-1}} \right); \\ \Delta D &= \sum_{i,j=0}^n (n-j+1)a_j i \frac{\partial}{\partial a_{j-1}} \left( a_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i} \right) = \\ &= \sum_{i,j=0}^n (n-j+1)a_j \left( \delta_{i,j} \frac{\partial}{\partial a_i} + a_{i-1} \frac{\partial^2}{\partial a_{j-1} \partial a_i} \right). \end{aligned}$$

Per Schwartz, la differenza  $D\Delta - \Delta D$  elimina le derivate seconde e risulta

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n ia_{i-1}(n-i+1) \frac{\partial}{\partial a_{i-1}} - (n-i+1)a_i i \frac{\partial}{\partial a_i} &= \\ = \sum_{i=0}^n a_i ((i+1)(n-i) - (n-i+1)i) \frac{\partial}{\partial a_i} &= \sum_{i=0}^n a_i (n-2i) \frac{\partial}{\partial a_i}. \end{aligned}$$

**Teorema 3.7.** *Sia  $A$  un polinomio in  $a_0, \dots, a_n$ , di grado  $g$  e peso  $p$ , allora  $(D\Delta - \Delta D)A = (ng - 2p)A$ .*

*Dimostrazione.* Si ha

$$(D\Delta - \Delta D)(a_0^{\nu_0} \dots a_n^{\nu_n}) = \sum (n-2i)\nu_i a_0^{\nu_0} \dots a_n^{\nu_n} = (ng - 2p)(a_0^{\nu_0} \dots a_n^{\nu_n}). \quad \square$$

**Teorema 3.8** (fondamentale). *Il polinomio  $I(a_0, \dots, a_n)$  di grado  $g$  è un invariante di peso  $p$  se e solo se tutti i suoi monomi hanno peso  $ng/2$  e  $DI = 0$  (in particolare, da queste si ricava che  $\Delta I = 0$ ).*

*Dimostrazione.*

( $\Rightarrow$ ) Si è già visto.

( $\Leftarrow$ ) Basta dimostrare che se  $I$  è isobarico di peso  $p = ng/2$ , con  $DI = 0$ , allora  $\Delta I = 0$ . Sia  $\omega$  di grado  $g$  e peso  $p$ ; allora

$$\Delta(D\Delta - \Delta D)(\omega) = (ng - 2p)\Delta\omega;$$

ma  $\Delta\omega$  ha grado  $g$  e peso  $p+1$ , perciò

$$(D\Delta - \Delta D)(\Delta\omega) = (ng - 2p - 2)\Delta\omega$$

e sommando le due espressioni si ha

$$(\Delta D \Delta - \Delta \Delta D + D \Delta \Delta - \Delta D \Delta)(\omega) = 2(ng - 2p - 1)\Delta(\omega).$$

A partire da questa, per induzione si ottiene

$$(D\Delta^k - \Delta^k D)(\omega) = k(ng - 2p - k + 1)\Delta^{k-1}(\omega).$$

Ora, sia  $k$  minimo tra quelli per cui  $\Delta^k(\omega) = 0$  e  $\Delta^{k-1}(\omega) \neq 0$ :  $k$  esiste perché il peso è limitato, perciò esiste un peso massimo e  $\Delta$  non può aumentarlo a piacere. Per ipotesi,  $D(\omega) = 0$  e si deve dimostrare che  $k = 1$ . Da  $(D\Delta^k - \Delta^k D)(\omega) = 0$ , si ottiene  $k(ng - 2p - k + 1)\Delta^{k-1}(\omega) = 0$ ; ma  $ng - 2p = 0$ , quindi  $k(1 - k) = 0$  e  $k = 1$ .  $\square$

Sia  $H_{g,p}$  lo spazio dei monomi in  $a_0, \dots, a_n$  di grado  $g$  e peso  $p$  e al suo interno sia  $I_{g,p}$  il sottospazio degli invarianti.

**Teorema 3.9.** *Se  $ng = 2p$ , allora si ha una successione esatta*

$$0 \longrightarrow I_{g,p} \longrightarrow H_{g,p} \xrightarrow{D} H_{g,p-1} \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Rimane da dimostrare solo che nel caso  $ng = 2p$ ,  $D$  è suriettiva. Preso  $\omega \in H_{g,p-1}$ , come fatto in precedenza si dimostra per induzione che

$$(D^k \Delta - \Delta D^k)(\omega) = k(ng - 2p + k - 1)D^{k-1}(\omega);$$

si considera l'enunciato  $D^k \omega \in \text{Im } D^{k+1}$ : si vuole dimostrare per  $k = 0$ , ma sicuramente vale per  $k$  molto maggiore di 0 (precisamente per  $k$  tale che  $D^k(\omega) = 0$ ). Per induzione decrescente, si suppone che  $D^k(\omega) \in \text{Im } D^{k+1}$  e si deve dimostrare che  $D^{k-1}(\omega) \in \text{Im } D^k$ . Si ha  $k(k-1)D^{k-1}(\omega) = D^k \Delta(\omega) - \Delta D^k(\omega)$ : il primo termine sta in  $\text{Im } D^k$  bisogna dimostrare che vi appartiene anche il secondo. Per ipotesi induttiva,  $\Delta D^k(\omega) = \Delta D^{k+1}(\eta)$  per qualche  $\eta \in H_{g,p}$ . Per questo  $\eta$  si ha  $(D^k \Delta - \Delta D^k)(\eta) = (k+1)kD^k(\eta)$ ; per  $k \geq 1$ , questa relazione scrive  $\Delta D^{k+1}(\eta) = \Delta D^k(\omega)$  come elemento dell'immagine di  $D^k$ .  $\square$

19/10/2007

**Teorema 3.10.** *Sia  $H_g := \sum_p \dim H_{g,p} x^p$  (è una particolare serie di Hilbert); allora*

$$H_g = \frac{(1-x^{n+1})(1-x^n) \cdots (1-x^{n+g})}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^g)}.$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\dim H_{g,p} = \left| \left\{ (\nu_0, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=0}^n i\nu_i = p, \sum_{i=0}^n \nu_i = g \right\} \right|.$$

Si ottiene anche

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-y)(1-xy) \cdots (1-x^ny)} &= \prod_{j=0}^n \left( \sum_{i_j} x^{j i_j} y^{i_j} \right) = \\ &= \sum x^{i_1+2i_2+\cdots+ni_n} y^{i_0+i_1+\cdots+i_n}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, ogni monomio compare tante volte quante sono le  $n + 1$ -uple  $i_0, \dots, i_n$  che soddisfano  $\sum i_j = g$  e  $\sum j i_j = p$ , cioè

$$\dim H_{g,p} = (((1-y) \cdots (1-x^n y))^{-1})_{x^p y^g},$$

dove con questa notazione si indica il coefficiente di  $x^p y^g$  nello sviluppo in serie. Sviluppando la serie come  $c_0(x) + \cdots + c_j(x)y^j + \cdots$ , si cerca il coefficiente di  $x^p$  in  $c_g(x)$ . Se si moltiplica per  $(1-y)$ , si ottiene

$$\begin{aligned} (1-y)(c_0(x) + \cdots) &= \frac{1}{(1-xy) \cdots (1-x^n y)} = \frac{1-x^{n+1}y}{(1-xy) \cdots (1-x^{n+1}y)} = \\ &= (1-x^{n+1}y)(c_0(x) + c_1(x)xy + \cdots + c_j(x)x^j y^j + \cdots), \end{aligned}$$

perché al denominatore si ha un'espressione simile a quella di partenza, a cui si è solo sostituito  $xy$  a  $y$ . Considerando solo il termine  $y^g$ , l'uguaglianza diventa  $-c_{g-1} + c_g = c_g x^g - c_{g-1} x^{n+g}$ , da cui  $c_g(x^g - 1) = c_{g-1}(x^{n+g} - 1)$ , cioè

$$c_g = c_{g-1} \frac{1-x^{n+g}}{1-x^g}.$$

A partire da  $c_0 = 1$ , si possono ricavare induttivamente tutti i  $c_g$ : risulta che  $c_g = H_g$ .  $\square$

**Teorema 3.11** (Cayley-Sylvester). *Posto  $I_g := \sum_p \dim I_{g,p} x^p$ , si ha  $I_g = (1-x)H_g$ .*

*Dimostrazione.* Si calcola:

$$I_g = \sum_p (\dim H_{g,p} - \dim H_{g,p-1}) x^p = H_g - xH_g = H_g(1-x). \quad \square$$

Si applica quanto trovato per calcolare gli invarianti dei polinomi in  $x$  e  $y$  in vari gradi.

- Per i polinomi di grado 2; sostituendo  $n = 2$  in  $ng = 2p$  si ottiene  $g = p$ ; perciò

$$\begin{aligned} \dim I_{g,g} &= \left( \frac{(1-x^3) \cdots (1-x^{g+2})}{(1-x^2) \cdots (1-x^g)} \right)_{x^g} = \\ &= \left( \frac{(1-x^{g+1})(1-x^{g+2})}{1-x^2} \right)_{x^g} = \left( \frac{1}{1-x^2} \right)_{x^g} : \end{aligned}$$

si ottiene 0 per  $g$  dispari e 1 per  $g$  pari. Infatti, per  $g$  pari si ha l'invariante  $(a_0 a_2 - a_1)^{g/2}$ .

- Per  $n = 3$ ,  $\dim I_{g,3/2g} = ((1-x^4)^{-1})_{x^g}$ , che vale 1 se  $g \equiv 0 \pmod{4}$ , 0 altrimenti.
- Per  $n = 4$ ,  $\dim I_{g,2g} = ((1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1})_{x^g}$ , cioè si hanno due generatori, che corrispondono ai due invarianti e sono liberi.



- Per  $n = 5$ ,

$$\dim I_{g,5/2g} = \left( \frac{1 - x^{36}}{(1 - x^4)(1 - x^8)(1 - x^{12})(1 - x^{18})} \right)_{x^g} :$$

si hanno quattro generatori, che corrispondono a quattro invarianti che però hanno delle relazioni in grado 36.

Si fa la dimostrazione del caso  $n = 4$ , cioè si dimostra che ci sono due generatori per l'algebra degli invarianti, indipendenti tra loro. Si cerca il coefficiente del grado  $g$  del prodotto di due serie geometriche, cioè  $\dim I_{g,2g}$  è il numero delle coppie  $(k, l)$  tali che  $2k + 3l = g$ ; l'invariante corrispondente a  $(k, l)$  è  $I_2^k I_3^l$ , e questi sono tutti indipendenti: se  $\sum c_{k,l} I_2^k I_3^l = 0$ , per  $a_1 = a_2 = 0$ , si ottiene  $\sum c_{k,l} (a_0 a_4)^k (-a_0 a_3)^l = 0$ , da cui  $c_{k,l} = 0$ .

### 3.2 Reciprocità di Hermite

La scrittura  $ng = 2p$  è simmetrica tra  $n$  e  $g$ ; questa semplice osservazione nasconde una simmetria più profonda. Se si scambiano  $n$  e  $g$  nella frazione che definisce  $I_g$ , risulta la stessa frazione:

$$\frac{(1 - x^{n+1}) \cdots (1 - x^{n+g})}{(1 - x^2) \cdots (1 - x^g)} = \frac{(1 - x^{g+1}) \cdots (1 - x^{n+g})}{(1 - x^2) \cdots (1 - x^n)};$$

in particolare, anche il coefficiente di  $x^p$  è lo stesso. Per esempio, per  $n = 2$  e  $g = 4$  si ha un unico invariante (la potenza del discriminante) e quindi anche per  $n = 4$  e  $g = 2$  ce ne deve essere solo uno, che infatti è l'invariante relativo alle quaterne anarmoniche.

Preso  $U$  di dimensione 2,  $\mathrm{SL}(U)$  agisce su  $S^n U$ ; però agisce anche sui polinomi di grado  $g$  su  $S^n U$ , cioè su  $S^g(S^n U)$ . Per la reciprocità di Hermite, se  $\dim U = 2$ ,  $S^g(S^n U) \cong S^n(S^g U)$ . Grazie alla reciprocità, si possono indagare i sottospazi  $\mathrm{SL}(2)$ -invarianti di  $S^g(S^n U)$ . Per esempio, vale il seguente.

**Teorema 3.12.** *Tutte le rappresentazioni irriducibili di  $\mathrm{SL}(2) = \mathrm{SL}(U)$  sono isomorfe a  $S^p U$  per qualche  $p \in \mathbb{N}$ ; inoltre, ogni rappresentazione di  $\mathrm{SL}(U)$  è somma diretta di rappresentazioni irriducibili.*

La seconda proposizione vale in ogni dimensione (cioè per  $\mathrm{SL}(n)$ ), e anche per ogni gruppo riduttivo, grazie al trucco unitario; invece la prima vale specificamente per  $\mathrm{SL}(2)$ .

*Esempio 3.13.* Si considera  $S^2(S^3 U)$ , i cui elementi possono essere pensati come le quadriche in  $a_0, \dots, a_3$ . Si può dimostrare che  $S^2(S^3 U) \cong S^6 U \oplus S^2 U$ . Poiché si ha un invariante se e solo se c'è una componente della forma  $S^0 U \cong K$ ,  $S^2(S^3 U)$  non ha invarianti. L'assenza di invarianti si può interpretare in un altro modo: nello spezzamento,  $S^2 U$  rappresenta le quadriche che contengono la cubica gobba, mentre  $S^6 U$  è l'anello delle coordinate di questa. Infatti  $C_3$  è  $\mathrm{SL}(U)$ -invariante, quindi anche il suo ideale deve essere invariante, e il suo ideale è generato da 3 quadriche, che sono i generatori di  $S^2 U$ . Incidentalmente, se si prende  $\Delta$  e si applica a  $a_0 a_2 - a_1^2$ , si ottiene  $3a_1 a_2 + a_0 a_3 - 4a_1 a_2 = a_0 a_3 - a_1 a_2$ , che è la seconda quadrica che contiene la cubica gobba; se si itera questo procedimento, si ottiene la terza quadrica, e poi 0; al contrario, si può applicare

$D$  per tornare indietro; perciò l'ideale è invariante. Invece,  $S^6U$  descrive l'anello delle coordinate di  $C_3$ : infatti una quadrica taglia  $C_3$  in 6 punti, e le possibili funzioni su  $C_3$  sono determinate dal valore su questi punti.

Si osserva che  $S^2(S^nU) \supseteq K = S^0U$  se e solo se  $n$  è pari (per la reciprocità di Hermite, è isomorfo a  $S^n(S^2U)$ ), mentre  $\Lambda^2(S^nU) \supseteq K$  se e solo se  $n$  è dispari. Per la quartica,  $S^2(S^4U) = S^8(U) \oplus S^4(U) \oplus S^0(U)$ : l'ultima parte corrisponde all'invariante  $I_2$ , mentre  $S^8(U)$  corrisponde all'anello delle coordinate.

In generale, si dimostra che  $S^2(S^nU) = \bigoplus_{i \geq 0} S^{2n-2-4i}U$ , mentre  $\Lambda^2(S^nU) = \bigoplus_{i \geq 0} S^{2n-2-4i}(U)$ .

## 4 $\mathrm{SL}(3)$ -invarianti

### 4.1 Curve ellittiche

Si considera ora  $U$  di dimensione 3. Il caso delle coniche nel piano è dato da  $S^2U$ : si calcola facilmente che c'è un unico invariante che discrimina il caso della conica degenerare da quella non degenerare. Il caso delle cubiche piane è più interessante: si lavora in  $S^3U$ , dove un polinomio è del tipo

$$f(x, y, z) = a_{0,0,0}x^3 + 3a_{0,0,1}x^2y + 3a_{0,0,2}x^2z + \cdots + a_{2,2,2}z^3 = 0.$$

Topologicamente, se  $f$  è non singolare,  $C_f := \{ (x, y, z) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid f(x, y, z) = 0 \}$  è omeomorfo a un toro, che però non è razionale, cioè non si può parametrizzare. In particolare, non ci sono proiettività del piano che conservano questa cubica. Tuttavia, la cubica è anche analiticamente isomorfa a  $\mathbb{C}/\Lambda$ , dove  $\Lambda$  è un reticolo, quindi ha un gruppo di automorfismi indotto dalle traslazioni di  $\mathbb{C}$  (che in generale non si possono indurre da proiettività).

Se  $p \in C_f$ , si considera la proiezione  $\pi_p$  su  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  da  $p$  (che è definita anche su  $p$  a meno di completarla in modo regolare). Questa proiezione è una mappa 2 a 1 ed è un rivestimento ramificato (cioè, al di fuori di certi valori particolari, è un rivestimento topologico) con punti di ramificazione corrispondenti ai valori in cui la retta per  $p$  è tangente alla cubica.

**Teorema 4.1.** *Sia  $C_f$  non singolare; allora per ogni  $p \in C_f$ , ci sono 4 punti  $p_1, \dots, p_4$  su  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  tali che  $\pi_p^{-1}(p_i)$  consiste in un punto di molteplicità 2; se  $q$  è un punto distinto dai  $p_i$ , allora la preimmagine è costituita esattamente da due punti.*

*Dimostrazione.* Il modo classico per dimostrare questo teorema è usare la formula di Riemann-Hurwitz. Più in linea con la teoria degli invarianti, si considerano i punti relativi alle rette passanti per  $p$  dentro  $S^3U$ ; le rette tangenti alla cubica saranno quelle relative ai punti contenuti nel discriminante in  $S^3U$ , che ha grado quattro.  $\square$

**Teorema 4.2 (Salmon).** *Per ogni  $p \in C_f$  e per ogni  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , viene determinata una quaterna su  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . La classe di equivalenza per l'azione di  $\mathrm{SL}(2)$  sulla quaterna non dipende né dal  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  scelto né da  $p$ .*

Che la classe di equivalenza non dipenda dallo schermo è ovvio, perché le rette sono le stesse quindi la trasformazione tra le due quaterne è una proiettività. La cosa notevole è che non dipende nemmeno dal punto di proiezione, cioè

dipende esclusivamente dalla curva. Grazie a questo teorema, di cui in seguito verrà fatta la dimostrazione, si ha il seguente.

**Teorema 4.3.** *Due cubiche  $C_f$  e  $C_g$  non singolari sono  $SL(3)$ -equivalenti se e solo se le loro quaterne di diramazione sono  $SL(2)$ -equivalenti.*

In particolare, sulle quaterne di diramazione si hanno gli invarianti  $I_2$  e  $I_3$ ; questi corrispondono a degli  $SL(3)$ -invarianti delle cubiche piane. Questi invarianti si possono esprimere in funzione degli  $a_{i,j,k}$ , ma i loro gradi aumentano: diventano 4 e 6 e si chiamano rispettivamente  $I_4$  e  $I_6$ . Un corollario non elementare è il seguente.

**Corollario 4.4.** *Tutti gli invarianti delle cubiche sono generati da  $I_4$  e  $I_6$ .*

23/10/2007

Data  $C$  una curva proiettiva,  $H^0(K_C) = \langle \omega_1, \dots, \omega_g \rangle$ , dove le  $\omega_i$  sono forme olomorfe. Se  $C$  è una curva ellittica,  $g = 1$ ; si potrebbe definire una mappa  $C \rightarrow \mathbb{C}$  in questo modo: fissato  $P_0 \in C$ , si manda  $P$  in  $\int_{P_0}^P \omega \in \mathbb{C}$ . Questa non è necessariamente ben definita, perché topologicamente la curva è un toro; tuttavia la variazione che si ha cambiando cammino ha una certa regolarità: se  $(\gamma_1, \gamma_2)$  è una base di  $H^1(C, \mathbb{Z})$ , l'integrale è definito a meno di un elemento del reticolo  $\Lambda := \left\langle \int_{\gamma_1} \omega, \int_{\gamma_2} \omega \right\rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ . Perciò l'applicazione  $AJ: C \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  (detto *morfismo di Abel-Jacobi*) è ben definita.

Data una funzione meromorfa  $f \in \mathcal{M}(C)$ , il divisore associato a  $f$  è  $(f) := \sum_P \mu_P(f)P$ . Per esempio, se  $C$  è la cubica piana,  $P \in C$  un suo punto di flesso,  $l_0$  la retta che interseca  $C$  in  $P$  molteplicità 3 e  $l_1$  una retta che interseca in tre punti distinti  $P_i$  la cubica, allora  $(l_1/l_0) = P_1 + P_2 + P_3 - 3P$ . Si osserva che tutti i divisori che vengono da funzioni meromorfe hanno grado 0.

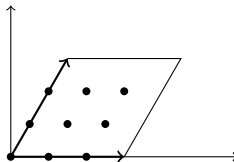
**Teorema 4.5** (Abel). *Sia  $\varphi: C \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  la mappa di Abel-Jacobi; allora  $\varphi(P) = \varphi(Q)$  se e solo se esiste  $f \in \mathcal{M}(C)$  tale che  $(f) = P - Q$*

In particolare, per la cubica ellittica la mappa di Abel-Jacobi è iniettiva, perché se esistesse una funzione razionale con divisore associato  $P - Q$ , allora la cubica sarebbe razionale. Però  $\varphi$  si estende ai divisori di grado  $d$ :  $\varphi(P_1 + \dots + P_k) := \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_k)$ , cioè al divisore  $\sum n_i P_i$  si associa la somma  $\sum n_i \int_{P_0}^{P_i} \omega$ . Quindi  $\varphi(D) = \varphi(D')$  se e solo se esiste  $f \in \mathcal{M}(C)$  tale che  $(f) = D - D'$ , cioè se  $D$  e  $D'$  sono linearmente equivalenti.

La varietà  $\mathbb{C}/\Lambda$  è detta *varietà jacobiana* di  $C$ ; nel caso della curva ellittica,  $\mathbb{C}/\Lambda \cong C$ , quindi la struttura di gruppo sulla varietà jacobiana si trasferisce sulla curva ellittica a meno di scegliere il punto  $P_0$  corrispondente all'elemento neutro. Tramite la mappa  $AJ$ , la somma formale  $P_1 + P_2 + P_3 - P$  diventa nella varietà jacobiana una vera somma, uguale a 0. Se si sceglie come  $P_0$  il punto di flesso  $P$ , si ottiene la condizione seguente: tre punti sono allineati se e solo se la loro somma è nulla. Come casi particolari: se  $2A + B = 0$ , vuol dire che la tangente in  $A$  taglia la cubica anche in  $B$ ; se  $3A = 0$ , si ha che  $A$  è un punto di flesso. Visto nel toro, i punti di flesso sono i punti di periodo 3, che sono esattamente 9 (vedi figura 1).

Inoltre, se  $P$  e  $Q$  sono flessi, la retta  $\langle P, Q \rangle$  incontra la cubica in un altro flesso, cioè i flessi sono a tre a tre allineati: infatti, per ipotesi  $3P = 3Q = 0$ , e se  $R$  è la terza intersezione (che esiste perché la retta deve intersecare trasversalmente sia  $P$  che  $Q$ ),  $P + Q + R = 0$ , da cui  $3R = 0$ .

Figura 1: I nove punti di periodo tre in  $\mathbb{C}/\Lambda$



*Dimostrazione del teorema di Salmon.* Si deve dimostrare che la  $SL(2)$ -classe dei 4 punti di ramificazione di  $\pi_P: C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  non dipende da  $P$ . I punti di ramificazione su  $C$  sono esattamente i punti  $Q$  che soddisfano  $2Q + P = 0$ . In particolare, se  $f: C \rightarrow C$  è il morfismo che manda  $Q$  in  $2Q$ , i punti  $Q$  sono gli elementi di  $f^{-1}(-P)$  (si riottiene che i punti sono 4, dato che  $f$  è una mappa quattro a uno), e sul toro tutte le quaterne di punti si ottengono l'una dall'altra per traslazione.

Ora,  $\pi_P: C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  corrisponde al sistema lineare  $|2Q|$ , dove  $2Q + P = 0$ . Cambiando punto, cioè prendendo  $\pi_{P'}$ , si ha un altro sistema lineare,  $|2Q'|$  con  $2Q' + P' = 0$ , che è diverso da  $|2Q|$ . Però, sul toro si ha la traslazione che manda  $Q$  in  $Q'$  e corrisponde a un automorfismo  $\sigma: C \rightarrow C$ . Allora si ha il diagramma

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\sigma} & C \\ \pi_P \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_{P'} \\ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \end{array}$$

dove  $f$  è un automorfismo di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , cioè un elemento di  $SL(2)$ : infatti,  $\pi_P$  e  $\pi_{P'} \circ \sigma$  provengono dallo stesso sistema lineare  $|2Q|$ , perciò possono differire al più per un cambio di base del sistema lineare.  $\square$

## 5 Calcolo simbolico

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  di cui se ne considerano  $d$  copie; su queste,  $SL(V)$  agisce in modo naturale: un elemento di  $V^{\oplus d}$  è una matrice  $n \times d$  del tipo  $(v_1, \dots, v_d)$  e se  $g \in SL(V)$ , si definisce  $g(v_1, \dots, v_d)$  come  $(gv_1, \dots, gv_d)$  (è l'usuale moltiplicazione a sinistra per la matrice di  $g$ ). Se  $d \geq n$ , ci sono degli invarianti, detti *bracket*, che non sono altro che i minori: si scelgono  $n$  colonne  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq d$  e si considera  $\det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ : questo si annulla se e solo se le colonne sono dipendenti. Si ha quindi la funzione  $\det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}): V^{\oplus d} \rightarrow K$  che è  $SL(V)$ -invariante (e che non ha contribuito dalle colonne non scelte).

**Teorema 5.1** (primo teorema fondamentale della teoria degli invarianti). *L'algebra degli  $SL(V)$ -invarianti su  $V^{\oplus d}$  è 0 se  $d < n$ ; è generata (non necessariamente indipendentemente) dai bracket se  $d \geq n$ .*

Ora, al posto della somma, si considera la potenza simmetrica  $S^d V$  e in particolare  $S^m(S^d V)$ ; questo oggetto è isomorfo in modo naturale (in particolare,  $SL(V)$ -invariante) alle funzioni  $F: \check{V}^{\oplus m} \rightarrow K$  multiomogenee di grado  $d$  (cioè

tali che, per ogni  $i$ ,  $F(v_1, \dots, v_n)$  è un polinomio omogeneo di grado  $d$  nei coefficienti di  $v_i$  col requisito che siano simmetriche su  $m$ , cioè per ogni permutazione  $\sigma \in \Sigma_m$ ,  $F(v_1, \dots, v_m) = F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)})$ .

Questo isomorfismo si scrive come

$$S^m(S^d V) \cong \text{Sym}^{d, \dots, d}(\check{V}).$$

Per esempio, per  $d = 1$ ,  $S^m V$  non è altro che l'insieme delle funzioni multilineari simmetriche su  $m$  copie di  $\check{V}$ . Poiché la corrispondenza è naturale, l'azione di  $\text{SL}(V)$  corrisponde ai due lati dell'isomorfismo e in particolare per scrivere un invariante a sinistra si possono usare i bracket.

*Esempio 5.2.* Si considera il caso  $d = 4$ ,  $m = 2$ ;  $(ab)^4$  è l'espressione simbolica delle quaterne anarmoniche: infatti  $(ab) = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ , da cui  $(ab)^4 = (a_0 b_1 - a_1 b_0)^4$ . Per come è stata scritta, questa è una funzione  $\check{V} \oplus \check{V} \rightarrow K$ , dove le basi del dominio sono  $(a_0, a_1)$  e  $(b_0, b_1)$ .

Si vuole trovare un oggetto corrispondente a sinistra, cioè una funzione su  $\alpha_0 x^4 + 4\alpha_1 x^3 y + 6\alpha_2 x^2 y^2 + 4\alpha_3 x y^3 + \alpha_4 y^4$ . Se questo corrispondesse alle quarte potenze,  $(a_0 x + a_1 y)^4$  e  $(b_0 x + b_1 y)^4$ , i coefficienti dovrebbero corrispondere:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0^4 = b_0^4 \\ \alpha_1 &= 4a_0^3 a_1 = 4b_0^3 b_1 \\ \alpha_2 &= 6a_0^2 a_1^2 = 6b_0^2 b_1^2 \\ \alpha_3 &= 4a_0 a_1^3 = 4b_0 b_1^3 \\ \alpha_4 &= a_1^4 = b_1^4. \end{aligned}$$

Con queste sostituzioni, risulta

$$\begin{aligned} (ab)^4 &= (a_0 b_1 - a_1 b_0)^4 = \alpha_0 \alpha_4 - 4\alpha_1 \alpha_3 + 6\alpha_2^2 - 4\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_4 \alpha_0 = \\ &= 2(\alpha_0 \alpha_4 - 4\alpha_1 \alpha_3 + 3\alpha_2^2) = 2I_2. \end{aligned}$$

Si considera ora il caso  $\dim V = 2$ ,  $m$  generico, per cui l'isomorfismo è

$$S^m(S^d V) \cong \text{Sym}^{\overbrace{d, \dots, d}^{m \text{ volte}}} V.$$

Se  $a_1, \dots, a_m$  sono  $m$  gruppi di indeterminate, ogni monomio di un elemento a destra sarà un prodotto di monomi di grado  $d$  in  $a_1, \dots, a_m$ , cioè sarà della forma

$$a_{1,0}^{\nu_1} a_{1,1}^{d-\nu_1} a_{2,0}^{\nu_2} a_{2,1}^{d-\nu_2} \dots a_{m,0}^{\nu_m} a_{m,1}^{d-\nu_m},$$

e questo corrisponde a sinistra alla funzione  $\alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} \dots \alpha_{\nu_m}$ , cioè a un monomio di grado  $m$  negli  $\alpha_i \in S^d V$ .

Il problema di questo approccio è che la maggior parte dei polinomi nei bracket si annulla e che non si riesce a semplificare un invariante nelle sue parti costituenti, dato che la struttura di algebra non è ben chiara.

*Esempio 5.3.* Il problema di Waring consiste nel capire come si scrive un dato numero intero come somma di potenze di fissato esponente di altri numeri; lo si vedrà trasferito sulle quartiche piane. Data una quartica piana, cioè  $F(x_0, x_1, x_2)$  di grado 4, si vuole scrivere  $F = \sum l_i^4$  con  $\deg l_i = 1$ . Lo spazio delle quartiche

piane,  $S^4\mathbb{C}^3$  ha dimensione  $\binom{6}{4} = 15$ . Ogni forma lineare è del tipo  $l_i = \alpha_0^i x_0 + \alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2$ , cioè ha 3 parametri; di conseguenza ci si aspetta che con 5 forme lineari si possa sempre risolvere il problema. Tuttavia non è così: il teorema di Clebsch dice che se  $F$  è omogeneo di grado 4 e si può scrivere come  $\sum_{i=1}^5 l_i^4$ , allora  $I_6(F) = 0$ . In particolare, la condizione di potersi scrivere come somma di 5 forme lineari alla quarta è invariante.

Si vuole scrivere questo invariante. Si ha  $S^4\mathbb{C}^3 \subseteq S^2(S^2\mathbb{C}^3)$  e per ogni  $F \in S^4\mathbb{C}^3$ , si considera la contrazione  $A_F: (S^2\mathbb{C}^3)^\vee = S^2(\mathbb{C}^3) \rightarrow S^2\mathbb{C}^3$ , cioè, se  $D_1, \dots, D_6$  sono una base degli operatori differenziali del secondo ordine in  $(x_0, x_1, x_2)$ , l'elemento  $(i, j)$  della matrice di  $A_F$  è dato da  $D_i D_j F \in \mathbb{C}$ . Il determinante di questa matrice è  $\text{SL}(\mathbb{C}^3)$ -invariante, con ragionamenti simili a quelli visti per l'hessiano; poiché la matrice è  $6 \times 6$ , il determinante è un invariante  $I_6$  di grado 6. L'annullarsi di  $I_6$  è una condizione necessaria per risolvere il problema di Waring con 5 forme lineari: se  $F = l^4$ , si può immaginare  $l = x^0$  e di conseguenza  $\text{rk}(A_F) = 1$ . Se  $F = \sum_{i=1}^5 l_i^4$ , allora  $A_F$  è somma di 5 matrici di rango 1 e deve avere rango minore di 6, da cui  $I_6 = 0$ .

## 6 Costruzione del quoziente

30/10/2007

Si considera un gruppo  $G$  che agisce su una varietà  $X$ ; si vorrebbe avere un quoziente  $X/G$  i cui punti parametrizzassero le orbite degli elementi di  $X$ , insieme a una mappa (almeno continua)  $\pi: X \rightarrow X/G$ . In generale, questo non è possibile perché le orbite non sono necessariamente chiuse, mentre le fibre di  $\pi$  che dovrebbero rappresentarle sono sempre chiuse, in quanto preimmagini di un chiuso.

### 6.1 L'esempio delle matrici

Si considera il caso particolare in cui  $X := \text{End}(V)$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ , e  $G := \text{GL}(V)$  agisce su  $V$ . Se  $A \in X$ , si considera l'azione indotta data da  $g \cdot A := g^{-1}Ag$ ; le orbite di questa azione sono descritte dalle possibili forme di Jordan (perché  $A$  e  $B$  hanno la stessa forma di Jordan se e solo se esiste  $g \in G$  tale che  $g^{-1}Ag = B$ ). Se  $A$  è diagonale, la sua orbita è chiusa; se però si considerano le  $A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , che hanno forma di Jordan  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  è l'identità, che ha forma di Jordan diversa (cioè, sta in un'orbita diversa).

**Lemma 6.1.** *Data  $A \in X$ ,  $\dim G \cdot A + \dim \text{Stab}_G(A)$  è costante.*

*Dimostrazione.* Denotando l'azione con  $\alpha: G \times X \rightarrow X$ , si considera il diagramma

$$G \xleftarrow{p} \alpha^{-1}(A) \xrightarrow{q} X;$$

su questo diagramma si possono leggere  $G \cdot A = q(\alpha^{-1}(A))$  e  $\text{Stab}_G(A) = p(q^{-1}(A)) \cong q^{-1}(A)$ ; poiché lo stabilizzatore di un elemento nell'orbita di  $A$  è coniugato allo stabilizzatore di  $A$ , tutte le fibre di  $q$  hanno la stessa dimensione. Di conseguenza,  $\dim \alpha^{-1}(A) = \dim G \cdot A + \dim \text{Stab}_G(A) = \dim G$ . In particolare, se lo stabilizzatore è grande, l'orbita sarà piccola e viceversa.  $\square$

Nell'esempio precedente, se  $A = \lambda I$ , lo stabilizzatore è tutto  $G$  (quindi l'orbita sarà piccola); se invece  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  con  $\lambda_i$  distinti, allora lo stabilizzatore è dato dalle matrici diagonali, perciò l'orbita sarà più grande.

Ora si passa alla costruzione di un oggetto quanto più simile possibile a un quoziente, nel caso particolare in esame. Per ogni  $A \in X$ , si considera il polinomio caratteristico  $P_A(t) := \det(A - tI) = (-1)^n t^n + \sigma_{n-1}(A)t^{n-1} + \dots + \sigma_0(A)$ , dove  $\sigma_0(A) = \det A$ ; si può considerare la mappa  $\sigma: X \rightarrow K^n$  con  $\sigma(A) := (\sigma_{n-1}(A), \dots, \sigma_0(A))$ . Questa mappa ha la proprietà che  $\sigma(A) = \sigma(g \cdot A)$  (cioè le fibre di  $\sigma$  sono unioni di orbite); oltre questo, dimensionalmente ci si aspetta che le matrici modulo coniugio siano descritte da  $n$  parametri. In effetti, nella maggior parte dei casi la fibra è costituita esattamente da un'orbita: a partire da  $\sigma(A)$  si ottengono in modo biunivoco gli autovalori di  $A$ ; di conseguenza, una fibra sopra un punto di  $K^n$  che non appartiene all'ipersuperficie discriminante  $\Delta$  è esattamente un'orbita di una matrice diagonalizzabile. Posto  $U := K^n \setminus \Delta$ , si ha il diagramma commutativo seguente:

$$\begin{array}{ccc} \sigma^{-1}(U) & \xrightarrow{\sigma} & U \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\sigma} & K^n. \end{array}$$

Su  $U$  si ha una situazione ideale; se invece  $y \in \Delta$ ,  $\sigma^{-1}(y)$  è una unione di orbite parametrizzate da blocchi di Jordan, tra le quali c'è una unica orbita chiusa che corrisponde alle matrici diagonalizzabili (è la situazione vista prima con le  $A_\varepsilon$ ).

Ora, la chiusura di un'orbita è ancora  $G$ -invariante, in particolare è unione di orbite: preso  $z \in \overline{G \cdot A}$  e  $g' \in G$ , si deve dimostrare che  $g' \cdot z \in \overline{G \cdot A}$ ; da  $z \in \overline{G \cdot A}$ , si ha che ogni intorno  $U_z$  contiene un elemento  $g \cdot A$ ; di conseguenza,  $g' \cdot z \in g'U_z = U_{g' \cdot z}$ , che è un intorno che contiene  $g'g \cdot A \in G \cdot A$ , da cui  $g' \cdot z \in \overline{G \cdot A}$ .

Se l'azione è algebrica, il lemma dell'orbita chiusa dice che le orbite diverse da  $G \cdot A$  contenute in  $\overline{G \cdot A}$  sono di dimensione minore di quella di  $G \cdot A$ , anche se potrebbero essere in numero infinito; la dimostrazione si basa sul fatto che l'immagine di insiemi costruibili è costruibile. Se l'azione non è algebrica, il lemma non vale: per esempio, per l'azione sul toro  $\lambda \cdot (x, y) := (x + \lambda, y + \alpha\lambda)$  con  $\alpha$  irrazionale. Alternativamente, si osserva che  $q^{-1}(A) = \{(g, A) \mid g \cdot A = A\} \cong \text{Stab}_G(A)$  e che  $q$  è un'applicazione algebrica; di conseguenza, se  $(x_n) \rightarrow x$ ,  $\dim q^{-1}(x_n) \leq \dim q^{-1}(x)$  (cioè,  $\{x \mid \dim q^{-1}(x) \geq k\}$  è un chiuso). Questo implica che in un intorno, la dimensione dello stabilizzatore può solo crescere, quindi la dimensione dell'orbita deve diminuire.

## 6.2 Generalizzazione del quoziente

Nel caso delle matrici,  $X = \text{End}(V)$  è isomorfo a  $\text{Spec}(K[x_{i,j}])$ ; in particolare,  $X$  è una varietà affine. L'azione di  $G$  su  $X$  induce un'azione sull'anello delle coordinate  $K[x_{i,j}]$ .

**Teorema 6.2** (Gauss).

$$K[x_{i,j}]^{\text{GL}(V)} = K[\sigma_{n-1}, \dots, \sigma_0].$$

## 6. Costruzione del quoziente

In particolare, il teorema dice che data  $f: X \rightarrow K$  invariante per coniugio, cioè tale che  $f(g^{-1}Ag) = f(A)$ , esiste  $h: K^n \cong \text{Spec } K[\sigma_{n-1}, \dots, \sigma_0] \rightarrow K$  tale che  $h \circ \sigma = f$ , cioè che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \text{End}(V) & \xrightarrow{f} & K \\ \searrow \sigma & & \nearrow h \\ & K^n & \end{array}$$

commuta. Si è trovata un'interpretazione per il quoziente  $K^n$ : non è altro che lo spettro dell'algebra degli invarianti<sup>2</sup>; si può provare a generalizzare questo approccio. Se  $X := \text{Spec } A$  e  $G$  agisce su  $X$ ,  $G$  agisce anche su  $A$  e dentro  $A$  si ha la sottoalgebra degli invarianti  $A^G$ ; se  $G$  è riduttivo, per quanto dimostrato da Hilbert,  $A^G$  è finitamente generato e si definisce il quoziente  $X/G$  come lo spettro di  $A^G$ . L'inclusione naturale  $i: A^G \hookrightarrow A$  induce una mappa  $i^*: X \rightarrow X/G$  con immagine che è sicuramente densa in quanto  $i$  è un'inclusione di algebre; in realtà si ha il seguente.

**Teorema 6.3.** *La mappa  $i^*$  è suriettiva (nel senso che la preimmagine di ogni punto chiuso contiene almeno un punto chiuso).*

*Dimostrazione.* Un punto chiuso  $y \in X/G$  è un ideale massimale  $\eta_y$  di  $A^G$ ; si deve mostrare che esiste un ideale massimale di  $A$  la cui restrizione a  $A^G$  è  $\eta_y$ .

Chiaramente  $\eta_y \subseteq (A\eta_y)^G$ , ma vale anche il viceversa: sia  $f \in (A\eta_y)^G$ , allora  $f = \sum_i a_i n_i$  con  $a_i \in A$  e  $n_i \in \eta_y$  e  $f$  è invariante. Poiché  $G$  è riduttivo, si può considerare l'operatore di Reynolds  $R: A \rightarrow A^G$ ; allora

$$f = R(f) = \sum R(a_i n_i) = \sum R(a_i) n_i \in \eta_y.$$

Di conseguenza,  $A \cdot \eta_y$  è un ideale proprio di  $A$ , altrimenti  $\eta_y$  sarebbe tutto  $A^G$ , perciò esiste un ideale massimale  $\eta_x \leq A$  tale che  $A \cdot \eta_y \subseteq \eta_x$ , da cui  $i^*(x) = y$ .  $\square$

Sia  $F \subseteq X$  un chiuso  $G$ -invariante; si può ripetere il ragionamento per  $F$  invece che per  $X$ , ottenendo un'applicazione suriettiva  $F \rightarrow F/G \subseteq X/G$ : da ogni chiuso invariante si ottiene un chiuso nel quoziente. In particolare, se  $F$  è un'orbita chiusa, si ottiene sempre un punto in  $X/G$ . Per il viceversa, bisogna mostrare che due orbite chiuse distinte vengono mandate in punti diversi di  $X/G$ .

**Lemma 6.4.** *Siano  $F_1$  e  $F_2$  chiusi  $G$ -invarianti disgiunti in  $X$ ; allora le loro immagini mediante  $i^*$  sono disgiunte.*

*Dimostrazione.* Per il Nullstellensatz,

$$I(F_1) + I(F_2) = I(F_1 \cap F_2) = I(\emptyset) = A;$$

di conseguenza, esistono  $f_i \in I(F_i)$  tali che  $1 = f_1 + f_2$ . Applicando l'operatore di Reynolds,  $R(f_i) \in I(F_i)^G$ , perché  $R(f_i)$  si annulla ancora su  $I(F_i)$  ed è invariante per definizione; e si ha  $1 = R(f_1) + R(f_2)$ . Se  $R(f_1)$  si annulla su  $F_2$ ,

<sup>2</sup>L'idea di considerare lo spettro dell'algebra degli invarianti come naturale spazio di parametrizzazione delle orbite dell'azione è di Mumford, negli anni settanta.



si trova una contraddizione: se così fosse,  $R(f_1)^m \in I(F_2)$  e da  $R(f_1) = 1 - R(f_2)$ ,  $(1 - R(f_2))^m \in I(F_2)$ , cioè  $1 \in I(F_2)$ , assurdo.

Allora  $R(f_1)$  non si annulla su  $F_2$  e viceversa. Ora, se  $y \in i^*(F_1) \cap i^*(F_2)$ , ponendo  $\mathcal{F}_i := (i^*)^{-1}(y) \cap F_i$ ,  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  sono chiusi disgiunti e  $G$ -invarianti, assurdo.  $\square$

Si è quindi dimostrato che ogni punto di  $X/G$  corrisponde a un'orbita chiusa di  $X$  e viceversa.

**Definizione 6.5.** Un punto  $x \in X$  si dice *stabile* per l'azione di  $G$  se:

1.  $G \cdot x$  è chiusa;
2.  $\dim(G \cdot x)$  è massima rispetto alle altre orbite.

*Esempio 6.6.* Per  $X := \text{End}(V)$ , la stabilità di  $A$  è equivalente all'avere tutti autovalori distinti (il che implica la diagonalizzabilità).

Sostanzialmente, i punti stabili sono i punti che non danno problemi per fare il quoziente. Sia  $X^S \subseteq X$  l'insieme dei punti stabili;  $\pi: X \rightarrow X^S/G$  è un "vero" quoziente, detto *quoziente geometrico*; si dimostrerò che  $X^S$  è un aperto denso.

*Esercizio 6.7.* Si considera  $\mathbb{P}(S^3\mathbb{C}^2)$ ; contiene tre orbite:  $C_3$ ,  $T \setminus C^3$  e  $\mathbb{P} \setminus T$ , dove  $T$  è la sviluppabile delle tangenti. In particolare, il quoziente è formato da un punto solo, perché l'unica orbita chiusa è  $C^3$ .

06/11/2007

**Lemma 6.8.** *L'insieme  $X^S$  è un aperto.*

*Dimostrazione.* Si considera  $F$ , l'insieme degli  $x \in X$  tali che la dimensione dell'orbita di  $x$  non è massima;  $F$  è chiaramente  $G$ -invariante ed è un chiuso, con considerazioni sulla semicontinuità della dimensione delle fibre per una funzione algebrica, applicati alla mappa  $\psi: G \times X \rightarrow X \times X$  con  $(g, x) \mapsto (gx, x)$  (che soddisfa  $\psi^{-1}(x, x) = (\text{Stab}_G(x), x)$ ).

Ora, se  $\pi: X \rightarrow X/G$  è la mappa quoziente,  $F$  è un chiuso ed è  $G$ -invariante, perciò  $\pi(F)$  è un chiuso di  $X/G$  e si ha  $X^S = \pi^{-1}(X/G \setminus \pi(F))$ : se  $x \in X^S$  allora  $\pi(x) \notin \pi(F)$ , cioè  $\pi(x) \in X/G \setminus \pi(F)$ , cioè  $x \in \pi^{-1}(X/G \setminus \pi(F))$ ; viceversa, se  $x \notin X^S$  può significare due cose: che l'orbita di  $x$  non è chiusa o che la dimensione dell'orbita è minore della dimensione massima; in entrambi i casi,  $\pi(x) \in \pi(F)$ , cioè  $x \notin \pi^{-1}(X/G \setminus \pi(F))$ .  $\square$

Si ha quindi la seguente situazione: dentro  $X$  si ha un aperto  $X^S$  tale che  $X^S \rightarrow U \subseteq X/G$  è un quoziente geometrico; in particolare tutte le fibre sono orbite.

### 6.3 Caso proiettivo

Si esamina il caso proiettivo. Siano  $X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$  una varietà proiettiva e  $G$  un gruppo riduttivo che agisce linearmente su  $V$  in modo che  $X$  sia  $G$ -invariante. Non si richiede un'azione su  $\mathbb{P}(V)$ , ma direttamente sullo spazio vettoriale  $V$  e si richiede lineare in modo che passi al quoziente. Questo perché, la stessa azione su  $\mathbb{P}(V)$  può essere sollevata ad azioni diverse su  $V$ ; in questo modo si fissa a priori l'azione su  $V$  che è una linearizzazione di quella su  $\mathbb{P}(V)$ .

Si può considerare l'algebra omogenea delle coordinate  $K[X]$ , definita come  $K[V]/I$  (dove  $I$  è l'ideale di  $X$  dentro  $K[V]$ ), e grazie all'azione linearizzata,  $G$

agisce direttamente sull'algebra delle coordinate; quindi si può definire  $K[X]^G$ , la sottoalgebra invariante, generata da  $f_1, \dots, f_k$ . Mimando il caso affine, si considera la mappa

$$\pi: X = \text{Proj } K[X] \dashrightarrow \text{Proj } K[X]^G$$

indotta dall'inclusione; tuttavia, in questo caso, questa mappa sarà solo una mappa razionale. In coordinate, è la mappa data da  $(f_1^{N/N_1}, \dots, f_k^{N/N_k})$ , dove  $N$  è il prodotto di tutti i gradi  $N_i$  di  $f_i$ .

*Esempio 6.9.* Sia  $X := \mathbb{P}(S^4\mathbb{C}^2)$ ; allora  $K[X] = K[S^4\mathbb{C}^2]$  e  $\text{Proj}(K[X]) = \mathbb{P}^4$ ; la sottoalgebra invariante è  $K[X]^G$  che si sa essere generata da  $I_2$  e  $I_3$ ; allora la mappa razionale è  $\mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  che mappa un elemento in  $(I_2^3, I_3^2)$ .

**Definizione 6.10.** Si definisce il *quoziente* di  $X$  su  $G$  come  $X/G := \text{Proj } K[X]^G$ .

**Definizione 6.11.** Un punto  $x \in X$  è *semistabile* se esiste  $f \in K[X]^G$  di grado positivo tale che  $f(x) \neq 0$ . Il luogo dei punti semistabili si indica con  $X^{ss} \subseteq X$ .

Per come è stato definito,  $X^{ss}$  è un aperto. L'insieme  $X \setminus X^{ss}$  è il luogo dei punti di  $X$  dove la mappa razionale  $\pi$  non è definita.

**Lemma 6.12.** Il punto  $x = [v]$  è non semistabile se e solo se  $0 \in \overline{Gv}$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $x$  non è semistabile, per ogni  $f \in K[X]^G$  di grado positivo,  $f(v) = 0$ . Per assurdo, se  $0 \notin \overline{Gv}$ , allora  $0$  e  $\overline{Gv}$  sono due chiusi invarianti distinti ed esiste  $f$  che li separa, cioè esiste  $f$  che si annulla su  $0$  (da cui  $\deg f > 0$ ) e  $f(v) \neq 0$ , assurdo.

( $\Leftarrow$ ) Per ipotesi, esiste una successione  $g_n \in G$  tale che  $g_nv \rightarrow 0$ ; sia  $f \in K[X]^G$  di grado positivo; allora  $f(v) = f(g_nv) \rightarrow f(0) = 0$ , da cui  $f(v) = 0$ .  $\square$

Dato  $f \in K[X]^G$ ,  $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  è un aperto affine, lo spettro di  $K[X]_f$ ; inoltre in  $X_f$  si hanno solo punti semistabili, perché almeno  $f$  non si annulla; perciò su  $X_f$  si può usare quanto visto nel caso affine e si ha il quoziente  $X_f/G$ .

**Definizione 6.13.** Un punto  $x \in X$  si dice *stabile* se è semistabile, se l'orbita  $G \cdot x$  è chiusa in  $X_f$  e se la sua dimensione è massimale.

Si hanno le inclusioni  $X^s \subseteq X^{ss} \subseteq X$  che possono essere tutte strette; in ogni caso sono inclusioni aperte:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \uparrow & \searrow & \\ X^{ss} & \xrightarrow{\pi} & X^{ss}/G \\ \uparrow & & \uparrow \\ X^s & \xrightarrow{\pi|_{X^s}} & X^s/G \end{array}$$

**Teorema 6.14** (criterio di Hilbert-Mumford). *Un punto  $x \in X$  è stabile (semistabile) se e solo se per ogni toro  $\mathbb{C}^* \subseteq G$ ,  $x$  è stabile (semistabile) per l'azione di  $\mathbb{C}^*$ .*

Il vantaggio che dà il teorema viene dal fatto che il calcolo nel caso dei tori è molto facile. Se  $T$  è un toro che agisce su  $V$ ,  $V$  si decompone in una somma diretta di autospazi  $\bigoplus_{\alpha_i \in \mathbb{Z}} V_{\alpha_i}$  dove  $V_{\alpha_i} := \{v \in V \mid t \cdot v = t^{\alpha_i} v\}$  e gli  $\alpha_i$  si dicono *pesi* dell'azione. Questo perché l'azione di  $T$  proviene da una mappa

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ t &\longmapsto \mathrm{diag}(t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_n}). \end{aligned}$$

Una conseguenza del criterio è la seguente:  $x = [v]$  è non semistabile se e solo se  $v \in \bigoplus_{\alpha_i > 0} V_{\alpha_i}$  oppure  $v \in \bigoplus_{\alpha_i < 0} V_{\alpha_i}$ ;  $x = [v]$  è non stabile se e solo se  $v \in \bigoplus_{\alpha_i \geq 0} V_{\alpha_i}$  oppure  $v \in \bigoplus_{\alpha_i \leq 0} V_{\alpha_i}$ . Per vederlo, si osserva che  $x = [v]$  è non semistabile se e solo se  $0 \in \overline{Tv}$ , se e solo se  $0 \in Tv$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot v = 0$  o  $\lim_{t \rightarrow \infty} tv = 0$ , dato che questi sono gli unici due punti (se esistono) che vengono aggiunti alla chiusura. Infine, per  $t \rightarrow 0$ ,  $0 = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot v$  se e solo se  $v \in \bigoplus_{\alpha_i > 0} V_{\alpha_i}$ ; analogamente si considerano gli altri casi.

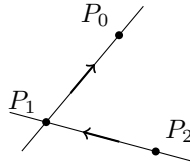
*Esempio 6.15.* Si calcolano i punti stabili e semistabili dell'azione  $t \cdot (x_0, x_1, x_2) := (1/tx_0, x_1, tx_2)$ . Questa è l'azione indotta su  $W := S^2V$  da quella su  $V$  data da

$$t \cdot v := \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 \\ 0 & t^{1/2} \end{pmatrix} v;$$

comunque, questo è un toro  $\mathbb{C}^* \subseteq \mathrm{SL}(3)$ .

Si calcolano i punti fissi:  $(1/tx_0, x_1, tx_2) = \lambda(t)(x_0, x_1, x_2)$  ha 3 soluzioni: se  $\lambda = t^{-1}$ , si ha  $P_0 := (1, 0, 0)$ ; se  $\lambda = 1$ , si ha  $P_1 := (0, 1, 0)$  e se  $\lambda = t$  si ha  $P_2 := (0, 0, 1)$ . Questa è anche una decomposizione in autospazi e i pesi sono rispettivamente 1, 0, -1, cioè  $W_i = \langle P_i \rangle$ . I punti non stabili saranno  $(W_{-1} \oplus W_0) \cup (W_0 \oplus W_1)$  e la dinamica è quella di figura 2: sulla prima retta si va da  $P_1$  verso  $P_0$  per  $t \rightarrow \infty$ ; sulla seconda invece si va da  $P_2$  a  $P_0$ ; al di fuori di queste rette, le orbite sono iperboli  $x_0x_2 - \lambda x_1^2$ , che sono orbite chiuse se ci si restringe all'affine, in quanto il loro limite sarebbe un punto non semistabile. I punti non stabili sono solo  $P_0$  e  $P_2$ .

Figura 2: Punti non semistabili e dinamica dell'azione.



09/11/2007

Sia  $T \cong \mathbb{C}^{*n} \subseteq G := \mathrm{GL}(n)$  un toro massimale, costituito per esempio dalle matrici diagonali. Allora si ha una mappa  $\mathbb{C}^{*n} \rightarrow T$  che manda la  $n$ -upla  $(t_1, \dots, t_n)$  nella matrice diagonale  $\mathrm{diag}(t_1^{\alpha_1}, \dots, t_n^{\alpha_n})$ , dove  $\alpha_i \in \mathbb{Z}$  è il peso di  $t_i$ .

Se  $V$  è un  $T$ -modulo,  $V$  si decompone come  $\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} V_\lambda$  dove

$$V_\lambda := \left\{ v \in V \mid (t_1, \dots, t_n) \cdot v = t_1^{\lambda_1} \dots t_n^{\lambda_n} v \right\}.$$

Se  $v \in V$ ,  $v = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} v_\lambda$  e si indicherà con  $\mathrm{Supp}(v)$  il *supporto* di  $v$ , cioè l'involuppo convesso di  $\{\lambda \in \mathbb{Z}^n \mid v_\lambda \neq 0\}$ .

**Teorema 6.16.** *I seguenti fatti sono equivalenti:*

1.  $v$  non è  $T$ -semistabile;
2.  $0 \in \overline{Tv}$ ;
3. esiste un toro 1-dimensionale  $S \subseteq T$ ,  $0 \in \overline{Sv}$ ;
4.  $0 \notin \text{Supp}(v)$ .

*Dimostrazione.*

(1  $\Leftrightarrow$  2) È già stata dimostrata.

(4  $\Rightarrow$  3) Se  $0 \notin \text{Supp}(v)$ , per la convessità si può considerare un iperpiano  $\sum \beta_i x_i = 0$  passante per 0 che non incontra  $\text{Supp}(v)$  e inoltre si può sceglierlo con coefficienti razionali. Siano  $\lambda_1 := (\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,n}), \dots, \lambda_h := (\alpha_{h,1}, \dots, \alpha_{h,n})$  i vertici del politopo convesso  $\text{Supp}(v)$ , allora  $\sum_i \beta_i \alpha_{j,i} > 0$  per ogni  $j$ . Si considera l'applicazione  $\mathbb{C}^* \rightarrow T: t \mapsto \underline{t} := (t^{\beta_1}, \dots, t^{\beta_n})$ ; se  $v := \sum_{j=1}^h v_{\lambda_j}$  e  $\underline{t} := (t_1, \dots, t_n)$ , allora  $\underline{t} \cdot v = \sum_{j=1}^h t_1^{\alpha_{j,1}} \dots t_n^{\alpha_{j,n}} v_{\lambda_j}$ . Componendo con  $T \rightarrow \text{GL}(V)$  si ottiene che  $V$  è un  $\mathbb{C}^*$ -modulo tale che  $t \cdot v = \sum_{j=1}^h t^{\sum \beta_i \alpha_{j,i}} v_{\lambda_j}$ ; ma l'esponente è positivo, per cui se  $t \rightarrow 0$ ,  $t \cdot v \rightarrow 0$ .

(3  $\Rightarrow$  2) Banale.

(2  $\Rightarrow$  4) Per ipotesi, si ha una successione  $(\underline{t}_m := (t_{m,1}, \dots, t_{m,n}))$  di elementi di  $T$  tali che  $\lim_{m \rightarrow \infty} \underline{t}_m \cdot v = 0$ . Se per assurdo  $0 \in \text{Supp}(v)$ , esisterebbero costanti razionali  $c_i$  tali che  $0 \leq c_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^h c_i \lambda_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^h c_i = 1$ . Ora, se  $v := \sum v_{\lambda_j}$ ,  $\sum t_{m,1}^{\alpha_{j,1}} \dots t_{m,n}^{\alpha_{j,n}} v_j \rightarrow 0$  per  $m \rightarrow \infty$ ; di conseguenza,  $t_{m,1}^{\alpha_{j,1}} \dots t_{m,n}^{\alpha_{j,n}} \rightarrow 0$  e anche

$$(t_{m,1}^{\alpha_{1,1}} \dots t_{m,n}^{\alpha_{1,n}})^{c_1} \dots (t_{m,1}^{\alpha_{h,1}} \dots t_{m,n}^{\alpha_{h,n}})^{c_h} \rightarrow 0.$$

Ma espandendola, risulta  $t_{m,1}^{\alpha_{1,1}c_1 + \dots + \alpha_{h,1}c_h} \dots t_{m,n}^{\alpha_{1,n}c_1 + \dots + \alpha_{h,n}c_h} = 1$ , perché tutti i coefficienti sono nulli, assurdo.  $\square$

**Corollario 6.17.** *Un vettore  $v$  è  $T$ -semistabile se e solo se per ogni toro unidimensionale<sup>3</sup>  $S \subseteq T$ ,  $v$  è  $S$ -semistabile.*

Questo corollario ha una forma molto simile al teorema di Hilbert-Mumford, cambiando  $T$  con  $G$ . L'analogo teorema per la stabilità è il seguente.

**Teorema 6.18.** *Sono equivalenti:*

1.  $v$  non è  $T$ -stabile;
2.  $0$  non è contenuto nella parte interna di  $\text{Supp}(v)$ .

*Dimostrazione del criterio di Hilbert-Mumford.* Per provare che esiste un toro unidimensionale  $S \subseteq G$  tale che  $0 \in \overline{Sv}$  a partire dal fatto che  $0 \in \overline{Gv}$ , sarà sufficiente trovare un toro massimale  $T \subseteq G$  tale che  $0 \in \overline{TG}$ .

Se  $G$  è riduttivo, con  $K \subseteq G$  un compatto massimale, si può fare la decomposizione di Cartan, cioè si può scrivere  $G = KTK$  (nel caso di  $\text{GL}(n)$ , si scrive

<sup>3</sup>Un toro unidimensionale è chiamato spesso *sottogruppo a un parametro*.

$GL(n) = U(n)DU(n)$ ). Per ipotesi,  $0 \in \overline{KTKv}$ , dove la chiusura è nella topologia di Zariski, ma questa coincide con quella fatta nella topologia euclidea. Nella topologia euclidea,  $K$  è compatto, perciò  $0 \in \overline{TKv}$ .

Si considera la proiezione (continua e suriettiva)  $\pi: V \rightarrow V/T = \text{Spec } K[V]^T$ ;  $\pi(0) \in \pi(\overline{TKv})$  e inoltre  $\pi(0) \in \pi(TKv) = \pi(Kv)$ : l'ultima uguaglianza viene dal fatto che  $\pi$  è  $T$ -invariante; il fatto che  $\pi(0)$  sia nella parte interna si prova in questo modo:  $\pi(Kv)$  è compatto, e se  $t_n k_n v \rightarrow 0$ ,  $\pi(t_n k_n v) \rightarrow \pi(0)$ , ma  $\pi(t_n k_n v) = \pi(k_n v)$ , da cui  $\pi(0) \in \pi(Kv)$ .

Perciò, esiste  $g \in K$  tale che  $\pi(0) \in \pi(Tgv)$ , cioè  $0 \in \overline{Tgv}$ , che a sua volta implica che  $0 \in \overline{g^{-1}Tgv}$ .  $\square$

**Teorema 6.19** (Hilbert). *Siano  $f \in S^d \mathbb{C}^2$  e  $G := \text{SL}(2)$ ; allora allora  $f$  è non semistabile se e solo se  $f$  ha un fattore di molteplicità maggiore di  $d/2$ ;  $f$  è non stabile se e solo se  $f$  ha un fattore di molteplicità maggiore o uguale a  $d/2$ .*

*Dimostrazione.* È un'applicazione del criterio di Hilbert-Mumford. Per  $\text{SL}(2)$ , i tori unidimensionali sono massimali, quindi  $f$  è non semistabile se e solo se esiste  $\mathbb{C}^* \subseteq \text{SL}(2)$  tale che  $0 \in \overline{\mathbb{C}^* f}$ . A meno di coniugio, esiste un unico toro dato da  $\mathbb{C}^* \hookrightarrow \text{SL}(2): t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ .

Se  $f := a_0 x^d + \dots + a_d y^d$ , il primo addendo ha peso  $d$ , il secondo  $d-2$  e così via a scendere di due in due fino ad arrivare all'ultimo addendo che ha peso  $-d$ . Il risultato segue usando il fatto che  $f$  è non semistabile se e solo se  $0 \notin \text{Supp}(f)$ , cioè se e solo se gli addendi di  $f$  hanno tutti peso maggiore di 0 o tutti peso minore di 0.  $\square$

*Esempio 6.20.* Per  $d = 3$ , si considera  $S^3 \mathbb{C}^2$  e si ha che  $x^3$  e  $x^2 y$  non sono semistabili, mentre  $xy(x-1)$  è stabile;  $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2)^{ss}$  è tutto  $\mathbb{P}(S^3 \mathbb{C}^2)$  meno l'ipersuperficie discriminante. Passando al quoziente, si ottiene un unico punto.

*Esempio 6.21.* Per  $d = 4$ ,  $x^4$ ,  $x^3 y$  non sono semistabili,  $x^2 y(x-1)$  è semistabile ma non stabile e  $xy(x-1)(x+1)$  è stabile. Perciò,  $\mathbb{P}(S^4 \mathbb{C}^2)^s$  è tutto  $\mathbb{P}(S^4 \mathbb{C}^2)$  meno l'ipersuperficie discriminante; il suo quoziente è  $\mathbb{A}^1$ : infatti, vive dentro  $\mathbb{P}(S^4 \mathbb{C}^2)^{ss}/\text{SL}(2)$ , che è  $\mathbb{P}^1$ , perché generato da  $I_2$  e  $I_3$  e l'applicazione quoziente  $\mathbb{P}(S^4 \mathbb{C}^2)^s \rightarrow \mathbb{P}(S^4 \mathbb{C}^2)^s/\text{SL}(2)$  è l'applicazione  $(I_2^3, I_3^2)$ ; il discriminante è  $\Delta = 27I_2^3 - 4I_3^2$  e ha grado 6 (infatti  $I_2^3/\Delta$  ha grado 6 sia al numeratore che al denominatore, quindi è ben definita).

Le orbite di un generico  $f \in S^4 \mathbb{C}^2$  hanno grado  $6 = (d-1)(d-2)$ . Infatti, si è già visto che  $I_2$  ha orbita di grado 2 mentre  $I_3$  ha grado 3; allora  $F_\lambda := (27I_2^3 - 4I_3^2)\lambda - I_2^3$  ha genericamente orbita 6.

Sull'insieme delle orbite si può mettere un ordine parziale, detto *ordine di Bruhat*, secondo il quale  $O_1 \leq O_2$  se e solo se  $O_1 \subseteq \overline{O_2}$ . Nel caso in esame, c'è un'unica orbita minimale, che è la curva razionale normale  $C_4$ ; per le altre relazioni tra le orbite si veda la figura 3.

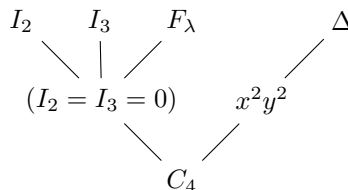
Si considerano le ipersuperfici di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^n$ , con  $n \geq 2$ ; allora  $\text{SL}(n+1)$  agisce su  $\mathbb{P}(S^d \mathbb{C}^{n+1})$ , visto come spazio dei moduli di tutte le ipersuperfici siffatte.

**Proposizione 6.22.** *Ogni ipersuperficie liscia è semistabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $\Delta \subseteq \mathbb{P}(S^d \mathbb{C}^{n+1})$  il sottospazio delle ipersuperfici singolari, che ha codimensione 1 ed è chiaramente  $\text{SL}(n+1)$ -invariante (le singolarità non cambiano a meno di proiettività). Di conseguenza è invariante l'equazione di

13/11/2007

Figura 3: Il diagramma di Hasse delle orbite di  $\mathbb{P}(S^4\mathbb{C}^2)$ .



$\Delta$ , che per esempio per le cubiche piane ha grado 12 (in generale, per le curve piane di grado  $d$  ha dimensione  $3(d-1)^2$ ). Se  $X$  è un'ipersuperficie liscia,  $\Delta \neq 0$ , perciò  $X$  è semistabile.  $\square$

Se  $d \geq 3$  e  $X$  è una ipersuperficie liscia, si denota con  $\text{Aut}(X) := \{g \in \text{SL}(n+1) \mid gX = X\}$  l'insieme degli automorfismi proiettivi di  $X$ ; un risultato classico dice che in questo caso,  $\text{Aut}(X)$  è un gruppo finito. Grazie a questo, si dimostra che ogni ipersuperficie liscia di grado maggiore o uguale a 3 è stabile, non solo semistabile.

*Esempio 6.23.* Si considerano le cubiche piane. Allora lo spazio in questione è  $\mathbb{P}(S^3\mathbb{C}^3) = \mathbb{P}^9$ ; sia  $v \in \mathbb{P}^9$ , allora  $v$  è non semistabile se e solo se  $0 \in \overline{Gv}$ , con  $G := \text{SL}(3)$ , e questo avviene se e solo se esiste un toro massimale  $T$  tale che  $0 \in \overline{Tv}$ , se e solo se  $0 \notin \text{Supp}(v)$  dove  $S^3\mathbb{C}^3$  è visto come  $T$ -modulo. Ora, un toro massimale è dato dall'insieme  $\{\text{diag}(t_1, t_2, (t_1t_2)^{-1})\} \cong (\mathbb{C}^*)^2 \subseteq \text{SL}(3)$  e l'azione è

$$(x_0, x_1, x_2)^t \mapsto (t_1x_0, t_2x_1, x_2/t_1t_2)^t.$$

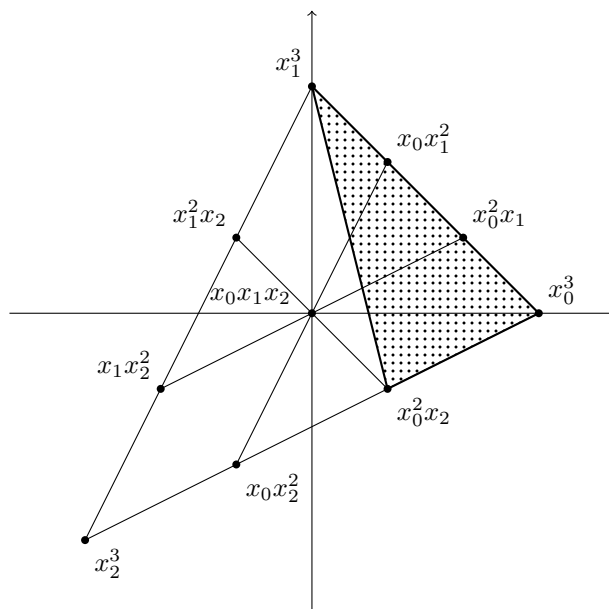
Ora si cercano gli autospazi di  $S^3\mathbb{C}^3$ . Facendo corrispondere a  $t_1^\alpha t_2^\beta$  la coppia  $(\alpha, \beta)$ , si hanno le corrispondenze

$$\begin{aligned} x_0^3 &\mapsto (3, 0), \\ x_0^2x_1 &\mapsto (2, 1), \\ x_0x_1^2 &\mapsto (1, 2), \\ x_1^3 &\mapsto (0, 3), \end{aligned}$$

e così via coinvolgendo anche  $x_2$  (che darà pesi negativi).

Si possono disegnare questi pesi su un piano cartesiano e si ottengono 9 pesi allineati a quattro a quattro su un triangolo più un ultimo punto, corrispondente a  $x_0x_1x_2$ , che sta sull'origine ed è il baricentro del triangolo (si veda la figura 4).

Ora, se  $v$  si scrive sulla base data da questi monomi, il supporto è l'involuppo convesso dei monomi che compaiono. Si ottiene che  $\text{Supp}(v)$  non contiene l'origine se contiene al più i monomi di un lato e uno adiacente a uno dei vertici di questo lato (la figura è un esempio). Di conseguenza, a meno di proiettività, i punti non semistabili hanno equazione  $ax_0^3 + bx_0^2x_1 + cx_0x_1^2 + dx_1^3 + ex_0^2x_2$ , cioè disomogeneizzando,  $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2$ . Tra questi, per esempio, si ha la cuspide  $y^2 = x^3$ . Una curva non semistabile deve avere una singolarità "brutta" nell'origine: un nodo ordinario non basta, deve essere una cuspide se  $e \neq 0$  oppure una singolarità di terzo grado se  $e = 0$ .

Figura 4: Pesi dei monomi in  $S^3\mathbb{C}^3$ .

In realtà, si possono classificare completamente: una curva non semistabile è una cuspidale irriducibile, una retta tangente a una conica, tre rette concorrenti, due rette incidenti di cui una è doppia oppure una retta tripla. Viceversa, i punti semistabili possono essere: una curva liscia, un nodo ordinario, una retta e una conica non tangenti oppure tre rette non concorrenti. In particolare, tra i semistabili solo il caso liscio e l'ultimo danno orbite chiuse. L'orbita della retta con la conica contiene nella sua chiusura le tre rette; il nodo ordinario contiene nella sua chiusura la retta più conica e le tre rette. Il quoziente completo è un  $\mathbb{P}^1$ , mentre le orbite delle curve lisce (i punti stabili) corrispondono biunivocamente a  $\mathbb{A}^1$ .

Ci sono due punti particolari in  $\mathbb{A}^1$ , che corrispondono a cubiche che hanno un numero maggiore di automorfismi. Per vederlo, conviene considerare la cubica come  $\mathbb{C}/\Lambda$ : gli automorfismi della cubica sono gli automorfismi del reticolo che fissano l'origine. Se  $\Lambda$  è generale gli automorfismi sono solo  $\pm 1$ ; se  $\Lambda$  è il reticolo quadrato si ha un gruppo di ordine 4 ( $(1, i)$ ); se  $\Lambda$  è un reticolo "esagonale", il gruppo ha ordine 6 (si veda figura 5). Le curve corrispondenti sono rispettivamente  $x_1^2x_2 + x_0^3 + x_0x_2^2 = 0$  e  $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$  (la prima è armonica, la seconda anarmonica).

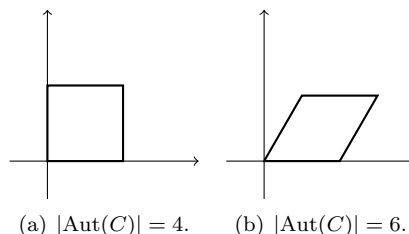
## 7 Cenni ulteriori

### 7.1 Orbite delle forme lineari

**Teorema 7.1.** *Sia  $f \in \mathbb{P}(S^d\mathbb{C}^2)$ ; si hanno i seguenti casi:*

1.  $\dim \overline{Gf} = 1$  se e solo se  $f = x_0^d$ ;

Figura 5: Reticoli delle cubiche con maggior numero di automorfismi.



2.  $\dim \overline{Gf} = 2$  se e solo se  $f = x_0^i x_1^{d-i}$ ; in questo caso,  $(f = 0)$  è liscia se e solo se  $d = 2i$ , altrimenti è singolare lungo la curva razionale normale;
3.  $\dim \overline{Gf} = 3$  in tutti i casi diversi dai precedenti.

In generale, la formula di Enriques-Fano dice che  $\deg \overline{Gf} = |\Gamma|^{-1} d(d-1)(d-2)$ , dove  $\Gamma := \{g \in \mathbb{PGL}(2) \mid gf = f\}$ . Per  $d = 4$ , genericamente si ha  $|\Gamma| = 4$  (perché  $\mathrm{SL}(2) \rightarrow \mathbb{PGL}(2)$  è un rivestimento doppio), perciò  $\deg \overline{Gf} = 6$ . Nei due casi particolari, si ha  $\deg \overline{Gf}$  uguale rispettivamente a 3 e a 2.

Le uniche  $\overline{Gf}$  lisce di dimensione 3 sono le seguenti:

1.  $\mathbb{P}^3$ , dato da  $f := x^3 + y^3$ , perciò  $|\Gamma| = 6$  (le simmetrie del triangolo);
2.  $Q_3 \subseteq \mathbb{P}^4$ , la quadrica delle quaterne anarmoniche, corrispondente a  $f := x(x^3 + y^3)$ , perciò  $|\Gamma| = 12$  (le simmetrie del tetraedro);
3.  $\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^4) \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$  (la grassmanniana delle rette in  $\mathbb{P}^4$  tagliata da tre iperpiani): ha grado 6 ed è data da  $x^5 y - x y^5 = xy(x^4 - y^4)$ ; si deduce che  $|\Gamma| = 24$  e  $\Gamma$  corrisponde alle isometrie dell'ottaedro (o del cubo);
4. per  $d = 12$ , il polinomio  $x^{11} y + 11x^6 y^6 - x y^{11}$ ; qui  $\Gamma$  ha ordine 60 e corrisponde alle simmetrie del dodecaedro (o dell'icosaedro).

## 7.2 Sistemi multilineari

Siano  $V_i$  degli spazi vettoriali. Su  $\mathbb{P}(V_0 \otimes \cdots \otimes V_p)$  agisce  $\mathrm{SL} := \mathrm{SL}(V_0) \times \cdots \times \mathrm{SL}(V_p)$ . La differenza dal caso originale è che si considerano più spazi vettoriali, ma senza prenderne la potenza simmetrica. L'oggetto che si studia si interpreta come l'insieme delle matrici multidimensionali. Il caso  $p = 0$  è banale; nel caso  $p = 1$ , ogni matrice si può portare in forma canonica al variare del rango della matrice (si può moltiplicare a destra e a sinistra). In generale, non ci sono invarianti, a meno che  $\dim V_0 = \dim V_1$ , nel qual caso si ha il determinante.

Per  $p \geq 2$  si considera l'analogia con le matrici quadrate: il determinante di  $A$  indica se esiste una soluzione non nulla del sistema  $Ax = 0$ . Per più dimensioni, invece del sistema  $\sum a_{i,j} x_j = 0$ , si considera  $\sum a_{i_0, \dots, i_p} x_{i_0}^{(1)} \cdots x_{i_p}^{(p)} = 0$ , dove  $x^{(i)}$  sono vettori di incognite. Questo è detto sistema multilineare, e ha  $\dim V_0$  equazioni. Le soluzioni interessanti sono quelle dove tutti i vettori incogniti sono non nulli (basta che se ne annulli uno perché sia tutto banale).



**Teorema 7.2.** *Posto  $k_i := \dim V_i - 1$ , se  $k_0 < \sum_{i=1}^p k_i$  allora il sistema ammette sempre soluzioni non banali (ci sono più incognite che equazioni); se  $k_0 \geq \sum_{i=1}^p k_i$ , allora l'insieme delle matrici tali che il sistema associato non ha soluzioni non banali è una sottovarietà di codimensione  $k_0 - \sum_{i=1}^p k_i + 1$ .*

Nel teorema, il caso di bordo è l'uguaglianza: se  $k_0 = \sum k_i$ ,  $A$  si dice di *formato bordo* (per  $p = 1$ ,  $A$  è di formato bordo se e solo se è quadrata). Se  $A$  è di formato bordo, allora la sottovarietà delle soluzioni ha codimensione 1 ed è invariante per  $SL$ ; questo invariante è detto *iperdeterminante*. In particolare, il sistema relativo a  $A$  ha soluzioni non banali se e solo se l'iperdeterminante di  $A$  è diverso da 0

Se  $A$  ha formato bordo, gli elementi  $a_{i_0, \dots, i_p}$  con  $i_0 = \sum i_p$  si dicono *elementi diagonali*;  $A$  è *triangolare superiore* se  $a_{i_0, \dots, i_p} = 0$  per  $i_0 > \sum i_p$ .

**Teorema 7.3** (Ancona-Ottaviani). *Se  $A$  ha formato bordo e ha iperdeterminante non nullo, allora  $A$  è semistabile ed è non stabile se e solo se è triangolabile, cioè se esiste  $g \in SL$  tale che  $gA$  è triangolare. Inoltre, lo stabilizzatore di  $A$  ha dimensione diversa da 0 se e solo se  $A$  è diagonalizzabile.*

Un altro risultato, dovuto a Dionisi, dice che  $\text{Stab}^0(A) \subseteq SL(2)$  (dove  $\text{Stab}^0(A)$  è la componente connessa contenente l'identità) e si ha l'uguaglianza se e solo se esiste  $g$  tale che  $gA$  è nulla ovunque tranne sulla diagonale dove ha 1, cioè se  $gA$  è la generalizzazione dell'identità.



## Riferimenti bibliografici

- [Dol03] Dolgachev, Igor V.: *Lectures on invariant theory*. Numero 96 nella serie *London mathematical society lecture notes series*. Cambridge university press, 2003.
- [FKM94] Fogarty, John, Frances C. Kirwan e David B. Mumford: *Geometric invariant theory*. Springer, 1994.
- [Hil93] Hilbert, David: *Theory of algebraic invariants*. Cambridge university press, 1993.
- [Olv99] Olver, Peter J.: *Classical invariant theory*. Numero 44 nella serie *London mathematical society student text*. Cambridge university press, 1999.
- [PV94] Popov, Vladimir L. e Ernest B. Vinberg: *Encyclopaedia of mathematical science: algebraic geometry IV*, pagine 123–284. Springer, 1994.
- [Wey39] Weyl, Hermann: *The classical groups*. Princeton university press, 1939.