Appunti del corso: Teoria delle Rappresentazioni Dott. Rocco Chirivì

Stefano Maggiolo
http://poisson.phc.unipi.it/~maggiolo/
maggiolo@mail.dm.unipi.it

2006–2007

Indice

1 Rappresentazioni e moduli

3.10.2006

Definizione 1.1. Sia G un gruppo, V uno spazio vettoriale di dimensione finita (su un campo che si potrà pensare essere $\mathbb{C}$); una *rappresentazione* di G in V è un morfismo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. La dimensione di V è il *grado* della rappresentazione; una rappresentazione è *fedele* se ρ è iniettiva.

Esempio 1.2. Sia $G = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{C}$; G è generato da 1, elemento di ordine 3, quindi $\rho(1)$ deve avere ordine che divide 3: le uniche possibilità sono $\rho^{(k)}(1) = e^{2\pi ik/3}$ con $k \in \{0, 1, 2\}$; $\rho^{(0)}$ è l'applicazione costante 1 e non è fedele; $\rho^{(1)}$ e $\rho^{(2)}$ sono fedeli.

Definizione 1.3. Sia G un gruppo; uno spazio vettoriale V è un *G-modulo* se dotato di un'azione $G \times V \to V$ (cioè tale che $ev = v$ e $(gh)v = g(hv)$) per cui $g(u + v) = gu + gv$ e $g(\lambda v) = \lambda(gv)$.

Osservazione 1.4. Rappresentazioni e G-moduli sono lo stesso concetto: se ρ è una rappresentazione, l'azione $gv = \rho_g(v)$ è lineare e definisce un G-modulo e viceversa.

Definizione 1.5. Due G-moduli U e V si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $f: U \to V$ tale che per ogni $g \in G$ si abbia

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, "g"'] & U \end{tikzcd} ,$$

dove con g si intende la moltiplicazione per l'elemento all'interno del G-modulo corrispondente.

Esempio 1.6. Nell'esempio precedente, ovviamente $\rho^{(0)}$ non è isomorfa a $\rho^{(1)}$ o $\rho^{(2)}$, ma nemmeno $\rho^{(1)} \cong \rho^{(2)}$: infatti dovrebbe esistere $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\star$ tale che

$$\rho_g^{(2)} = f\rho_g^{(1)}f^{-1} = ff^{-1}\rho_g^{(1)} = \rho_g^{(1)},$$

cosa che non può verificarsi. Si può estendere questo esempio notando che ciò accade perché $\mathbb{C}^\star$ è abeliano, quindi rappresentazioni di grado 1 sono isomorfe se e solo se coincidono.

Osservazione 1.7. Sia G un gruppo, $[G, G] = \langle ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G \rangle$ il sottogruppo dei commutatori di G; l'abelianizzato di G è ${}^{G}/_{[G,G]}$. Se $\rho\colon G \to \mathbb{C}^\star$ è una rappresentazione (di grado 1), allora $\rho_{ghg^{-1}h^{-1}} = \rho_g\rho_h\rho_{g^{-1}}\rho_{h^{-1}} = 1$, quindi $[G, G] \subseteq \ker(\rho)$. Ciò significa che le rappresentazioni di grado 1 sono sostanzialmente identiche per un gruppo e per il suo abelianizzato.

Esempio 1.8. Se $G = \mathbb{Z}_n$, ricalcando l'esempio precedente, le rappresentazioni sono completamente determinate da ρ_1, che deve essere un elemento di $\mathbb{C}^\star$ di ordine che divide n; in definitiva, esistono n rappresentazioni determinate da $\rho_1^{(k)} = e^{2\pi ik/n}$: sono tutte diverse quindi lo sono anche modulo isomorfismo.

Definizione 1.9. Sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione, un *G-sottomodulo* di V (o *sottospazio G-invariante*) è un sottospazio $U \leq V$ tale che $\rho_g(U) \subseteq U$ per ogni $g \in G$. In questo caso si scrive $U \leq_G V$.

Definizione 1.10. Un G-modulo V è *irriducibile* se $U \leq_G V$ implica $U \in \{0, V\}$.

Definizione 1.11. Se U e V sono G-moduli, anche $U \oplus_G V$ lo è con $g(u,v) \coloneqq (gu, gv)$.

Esempio 1.12. Sia $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$, $G = S_n$. Si può fissare $\rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ e ottenere una rappresentazione fedele di S_n, dove ρ_σ è una matrice di permutazione. Se $v = \sum_{i=1}^n e_i$, $\rho_\sigma(v) = v$, in quanto vengono solo permutati gli indici della base, quindi il sottospazio $\mathbb{C}v$ è G-invariante. Perciò V non è irriducibile, ma U, essendo di dimensione 1, lo è. Risulta $V = U \oplus_G W$ con

$$W = \{\, w \in V \mid w \cdot v = 0 \,\} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i e_i \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\}$$

e W è un altro G-sottomodulo di V.

Esempio 1.13. Sia $G = \mathbb{Z}$, $V = \mathbb{C}^2$, $\rho_n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; ρ è una rappresentazione e $\rho_n(e_1) = e_1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, quindi $\mathbb{C}e_1 \leq_G V$ e V non è irriducibile. Tuttavia, V non è somma diretta di G-moduli: se fosse $V = U \oplus_G W$, W sarà un sottospazio di dimensione 1, perciò $W = \mathbb{C}w$, ma w dovrebbe essere un autovettore comune a tutte le matrici ρ_n.

6.10.2006

Definizione 1.14. Un'applicazione $\pi \colon V \to V$ è una *proiezione* di V su W se $\pi(V) \subseteq W$ e $\pi_{|W} = \mathrm{Id}_W$.

Teorema 1.15. *Sia G un gruppo finito, W un G-sottomodulo di V, allora esiste un altro G-sottomodulo W' complementare di W.*

Dimostrazione. Sia W' il complementare di W in V (si prenda una proiezione π di V in W e sia $W' = \ker \pi$); si consideri $\bar\pi = {}^1\!/_{|G|} \sum_{g \in G} g\pi g^{-1}$, applicazione di $\mathrm{GL}(V)$; $\bar\pi$ è ancora una proiezione:

- $\bar\pi(v) = {}^1\!/_{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}v) \in W$, in quanto $\pi(g^{-1}v) \in W$ e W è stabile per G;
- $\bar\pi(w) = {}^1\!/_{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}w) = {}^1\!/_{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}w = w$.

Sia ora $W_0 = \ker \bar\pi$; se $h \in G$, allora

$$h\bar\pi h^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hg\bar\pi g^{-1}h^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\bar\pi g^{-1} = \bar\pi;$$

cioè $h\bar\pi = \bar\pi h$. Se $w \in W_0$, $\bar\pi h(w) = h\bar\pi(w) = 0$, cioè $hw \in W_0$. Si è ottenuto che W_0 è stabile per G, quindi è un G-sottomodulo. □

Teorema 1.16. *Sia G un gruppo di ordine finito, $\operatorname{ch} K = 0$, V un K-spazio vettoriale e G-modulo di grado finito, allora V è isomorfo come G-modulo a una somma diretta di G-moduli irriducibili.*

Osservazione 1.17. La decomposizione in G-moduli irriducibili non è unica, ad esempio se $V = K^n$ è la rappresentazione banale (che mappa ogni elemento del gruppo nell'identità di V), allora per ogni base $(e_1, \dots, e_n)$ di V, si decompone come $Ke_1 \oplus \cdots \oplus Ke_n$.

Esempio 1.18. Si vogliono trovare le rappresentazioni di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su $\mathbb{C}$. Quelle di grado uno devono mandare 1 in un elemento con ordine che divide n, quindi si hanno n possibili rappresentazioni determinate da $\rho_k(1) = e^{2\pi i k/n}$.

In generale per un gruppo finito G, la matrice ρ_g è tale che $\rho_g^m = I$, dove $m = \operatorname{ord} g$; se si scrive ρ_g in forma di Jordan, deve risultare che tutti gli autovalori sono radici dell'unità e non ci possono essere 1 sulla sopradiagonale. In particolare, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si rappresenta mandando 1 in un automorfismo diagonale con autovalori radici n-esime dell'unità e quindi queste rappresentazioni si spezzano in rappresentazioni di grado uno. Lo stesso vale per i gruppi abeliani in generale.

Se invece si considera $G = \mathbb{Z}$, la rappresentazione è completamente determinata dalla matrice ρ_1; due rappresentazioni sono isomorfe se esiste una matrice invertibile T tale che $\sigma_1 = T^{-1}\rho_1 T$; inoltre la rappresentazione è indecomponibile se e solo se la matrice ρ_1 ha un unico blocco di Jordan.

10.10.2006

Esempio 1.19. Si vogliono trovare tutti i possibili S_3-moduli (S_3 è isomorfo al gruppo diedrale D_3). Quelle finora esibite sono:

- la rappresentazione banale, di grado 1: $\rho_g = 1 \in \mathbb{C}^\star$;
- la rappresentazione alterna, di grado 1: $\rho_g = (-1)^g$;
- la riflessione: se ρ è la rappresentazione $\rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, si è visto che $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}(e_1 + e_2 + e_3) \oplus_G V$, dove

  $$V = \{\, a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0 \,\};$$

  posti $\omega = e^{2\pi i/3}$, $\varepsilon_1 = (1, \omega, \omega^2)$, $\varepsilon_2 = (\omega, 1, \omega^2)$, $\sigma = (1, 2)$, $\tau = (1, 2, 3)$, si ha $V = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ e su questa base

  $$\rho_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_\tau = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix};$$

  se V fosse riducibile, si scomporrebbe in G-moduli di grado 1 e questo può succedere solo se esistono autovettori comuni a tutte le matrici, ma questo non è chiaramente possibile; si ottiene quindi una rappresentazione di grado 2.

Teorema 1.20. *Un S_3-modulo irriducibile V, allora V può essere solo la rappresentazione banale, l'alterna o la riflessione.*

Dimostrazione. Si vede $S_3 = D_3 = \langle \sigma, \rho \rangle$; $\mathbb{Z}_3 \leq S_3$ è un sottomodulo abeliano massimale; data una rappresentazione irriducibile $\psi\colon S_3 \to \mathrm{GL}(V)$, esiste una rappresentazione $\bar{\psi}\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{GL}(V)$, la restrizione di ψ a $\mathbb{Z}_3$. Poiché $\mathbb{Z}_3$ è abeliano, $V = \mathbb{C}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_n$ come $\mathbb{Z}_3$ modulo, con $n = \dim V$; inoltre i v_j sono autovettori per ψ_ρ: $\psi_\rho(v_j) = \omega^{\alpha_j} v_j$, con $\omega = e^{2\pi i/3}$ e $\alpha_j \in \{-1, 0, 1\}$; inoltre $\psi_\rho(\psi_\sigma v_j) = \psi_\sigma \psi_\rho^2 v_j = \psi_\sigma \omega^{2\alpha_j} v_j = \omega^{2\alpha_j} \psi_\sigma v_j$, cioè anche $\psi_\sigma v_j$ è un autovettore per ψ_ρ, ma non necessariamente con lo stesso autovalore.

Sia $U = \langle v_j, \psi_\sigma v_j \rangle$; U è stabile per ψ_σ e per ψ_ρ che generano S_3, quindi è un S_3-sottomodulo di V, ma si era supposto che V fosse irriducibile e poiché $U \neq 0$, $U = V$. A questo punto:

- se $\alpha \neq 0$ e v è un autovettore per ψ_ρ di autovalore ω^α, $\psi_\sigma v$ è un autovettore per ψ_ρ di autovalore $\omega^{-\alpha} \neq \omega^\alpha$: v e $\psi_\sigma v$ hanno autovalori distinti quindi sono linearmente indipendenti e formano una base; su questa, si ha

$$\psi_\rho = \begin{pmatrix} \omega^\alpha & 0 \\ 0 & \omega^{-\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \psi_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cioè V è la riflessione;

- se $\alpha = 0$ e $(v, \psi_\sigma v)$ è una base, sono autovettori di ψ_ρ di autovalore 1, cioè

$$\psi_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \psi_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  ma prendendo come base $(v + \psi_\sigma v, v - \psi_\sigma v)$, le matrici diventano

$$\psi_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \psi_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

  che è impossibile in quanto l'autovettore $v+\psi_\sigma v$ è comune alle due matrici e quindi V si decomporrebbe;

- se $\alpha = 0$ e (v) è una base di U, si ha $\psi_\rho v = v$, $\psi_\sigma v = \pm v$; a seconda del segno si ha la rappresentazione alterna o la banale. □

Osservazione 1.21. Dato un G-modulo V con la rappresentazione ρ, anche $V^\star$ è un G-modulo con $\rho^\star \colon G \to \mathrm{GL}(V^\star)$ definita da $(\rho^\star_g(\varphi))(v) \coloneqq \varphi(\rho_{g^{-1}}(v))$.

Dati due G-moduli V e W, con le rappresentazioni ρ e σ, anche $\mathrm{Hom}(V, W)$ è un G-modulo con $\tau \colon G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V, W))$ definita da $(\tau_g(F))(v) \coloneqq \sigma_g F \rho_{g^{-1}}(v)$.

Infine, $V \otimes W$ è un G-modulo con $\psi_g(v \otimes w) = gv \otimes gw$.

Questi G-moduli sono ben definiti: si deve dimostrare che $\rho^\star_g \rho^\star_h = \rho^\star_{gh}$, ma:

$$\begin{aligned}(\rho^\star_g \rho^\star_h(\varphi))(v) &= (\rho^\star_g(\rho^\star_h(\varphi)))(v) = \\ &= \rho^\star_h(\varphi)(\rho_{g^{-1}}(v)) = \varphi(\rho_{h^{-1}}\rho_{g^{-1}}(v)) = \\ &= \varphi(\rho_{h^{-1}g^{-1}}) = \varphi(\rho_{(gh)^{-1}}) = (\rho^\star_{gh}(\varphi))(v);\end{aligned}$$

le altre verifiche sono analoghe.

2 Caratteri

13.10.2006

Definizione 2.1. Data una rappresentazione $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$, il *carattere* di ρ è $\chi_\rho \colon G \to \mathbb{C}$ con $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g)$.

Proposizione 2.2. *Alcune proprietà del carattere:*

1. *se* $V \cong_G W$, $\chi_V = \chi_W$;
2. $\chi_V(e) = \dim V$;
3. $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$;
4. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$;
5. $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$ *(il carattere è una funzione di classe);*

6. $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$.

Dimostrazione. 1. Per ipotesi esiste un morfismo di G-moduli f, cioè tale che $f\rho_g = \sigma_g f$, quindi $\mathrm{Tr}(\sigma_g) = \mathrm{Tr}(f\rho_g f^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho_g)$ poiché la traccia è un'applicazione di classe;

2. $\chi_V(e) = \mathrm{Tr}(\rho_e) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}) = \dim V$;

3. g ha ordine finito, perciò esiste una base di V in cui $\rho_g = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, da cui $\chi_V(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ e $\rho_{g^{-1}} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$, ma $\lambda_i^{-1} = \bar{\lambda_i}$, quindi $\chi_V(g) = \overline{\chi_V(g^{-1})}$;

4. evidente per com'è costruita la matrice della rappresentazione di somma diretta;

5. $\chi_V(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho_{ghg^{-1}}) = \mathrm{Tr}(\rho_g\rho_h\rho_{g^{-1}}) = \mathrm{Tr}(\rho_h) = \chi_V(h)$;

6. siano $(e_1, \dots, e_n)$ e $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ basi di V e di W che diagonalizzano ρ_g e σ_g con autovalori λ_i e μ_i, allora $(e_i \otimes \varepsilon_j)$ è una base di $V \otimes W$ e $\rho_g(e_i \otimes \varepsilon_j) = ge_i \otimes g\varepsilon_j = \lambda_i e_i \otimes \mu_j \varepsilon_j = \lambda_i\mu_j e_i \otimes \varepsilon_j$, quindi questa base diagonalizza $(\rho \otimes \sigma)_g$ e $\chi_{V\otimes W}(g) = \sum_{i,j} \lambda_i\mu_j = (\sum_i \lambda_i)(\sum_j \mu_j) = \chi_V(g)\chi_W(g)$. □

Definizione 2.3. Lo spazio delle applicazioni di classe da G a $\mathbb{C}$ si denota

$$X_G \coloneqq \left\{ f \colon G \to \mathbb{C} \mid (\forall g, h \in G) f(ghg^{-1}) = f(h) \right\}.$$

Osservazione 2.4. Lo spazio X_G è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$; se $C_1, \dots C_r$ sono le classi di coniugio di G, X_G è generato dalle applicazioni δ_h che valgono 1 sugli elementi di C_h e 0 altrove.

Definizione 2.5. Date $f, h \in X_G$, si definisce $\langle f, h\rangle \coloneqq {}^1/_{|G|} \sum_{g\in G} f(g)\overline{h(g)}$.

Osservazione 2.6. L'applicazione $(f, h) \mapsto \langle f, h\rangle$ è un prodotto scalare hermitiano, cioè è non degenere, lineare nella prima variabile, antilineare nella seconda.

Proposizione 2.7. *Per ogni rappresentazione V, si ha $\chi_{V^\star} = \overline{\chi_V}$.*

Dimostrazione. Per ogni elemento $g \in G$, esiste una base $(e_1, \dots, e_n)$ per cui $\rho_g = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; sia $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ la base duale, allora

$$\rho_g^\star(\varphi_i)(e_j) = \varphi_i(\rho_{g^{-1}}(e_j)) = \varphi_i(\lambda_j^{-1}e_j) = \lambda_j^{-1}\delta_{i,j} = \lambda_i^{-1}\delta_{i,j} = \lambda_i^{-1}\varphi_i(e_j);$$

poiché questo vale per ogni e_j, si ha che $\rho_g^\star(\varphi_i) = \lambda_i^{-1}\varphi_i = \bar{\lambda_i}\varphi_i$, quindi

$$\chi_{V^\star}(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g^\star) = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda_i} = \overline{\mathrm{Tr}(\rho_g)} = \overline{\chi_V(g)}. \qquad \square$$

Definizione 2.8. Dato un G-modulo V, si definiscono l'*algebra simmetrica del secondo ordine* e l'*algebra alternante del secondo ordine* rispettivamente come

$$S^2(V) \coloneqq \frac{V \otimes V}{\langle v \otimes w - w \otimes v\rangle_{v,w\in V}},$$
$$\Lambda^2(V) \coloneqq \frac{V \otimes V}{\langle v \otimes w + w \otimes v\rangle_{v,w\in V}}.$$

In $S^2(V)$ si indica il prodotto (commutativo) con $\cdot$; in $\Lambda^2(V)$ si indica il prodotto (anticommutativo) con $\wedge$.

Osservazione 2.9. Le algebre $S^2(V)$ e $\Lambda^2(V)$ ereditano in modo naturale la struttura di G-modulo da $V \otimes V$: $g(v \cdot w) := gv \cdot gw$ e $g(v \wedge w) := gv \wedge gw$.

Definizione 2.10. Dati due G-moduli V e W, $f\colon V \to W$ è un *morfismo di G-moduli* (o è *G-equivariante*) se è un'applicazione lineare tale che $f(gv) = gf(v)$; l'insieme dei morfismi di G-moduli si denota con $\operatorname{Hom}_G(V, W)$.

Osservazione 2.11. Si ha $\operatorname{Hom}_G(V, W) = \operatorname{Hom}(V, W)^G$, l'insieme degli elementi fissati da G nel G-modulo $\operatorname{Hom}(V, W)$. Infatti, se $f \in \operatorname{Hom}(V, W)^G$, si ha $f(v) = (g^{-1}f)(v) = g^{-1}f(gv)$, cioè $gf(v) = f(gv)$ e viceversa.

Lemma 2.12 (Schur)**.** *Siano V e W due G-moduli irriducibili, $f\colon V \to W$ un morfismo di G-moduli, allora, se $V \not\cong_G W$, $f \equiv 0$, altrimenti se $V \cong_G W$, $f = \frac{\operatorname{Tr} f}{\dim V} \operatorname{Id}_V$.*

Dimostrazione. Sia $v \in \ker f$, allora $f(gv) = gf(v) = 0$, quindi $gv \in \ker f$, cioè $\ker f$ è un G-sottomodulo di V; se $w = f(v)$, $gw = gf(v) = f(gv)$, quindi anche $\operatorname{Im} f$ è un G-sottomodulo di W. Poiché V e W sono irriducibili, ci sono solo due possibilità:

- se $\ker f = 0$, $\operatorname{Im} f$ non può essere 0 ma deve essere W, cioè f è un isomorfismo di G-moduli; in questo caso si può supporre $V = W$ e f un automorfismo di V; per questo motivo esiste un autovalore λ di f, cioè $\ker(f - \lambda \operatorname{Id}_V) \neq 0$, ma ancora perché V è irriducibile, $f = \lambda \operatorname{Id}_V$, e λ è la media degli autovalori di f, perciò $\lambda = \frac{\operatorname{Tr} f}{\dim V}$;
- se $\ker f = V$, chiaramente $\operatorname{Im} f = 0$ e $f \equiv 0$. ☐

Osservazione 2.13. Se f e h sono entrambi morfismi non nulli di G-moduli irriducibili differiscono per una costante moltiplicativa: $f = \lambda h$. Il lemma di Schur si può enunciare anche come $\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = \delta_{V,W}$, dove $\delta_{V,W} = 1$ se $V \cong_G W$, 0 altrimenti. Se V è irriducibile, $\operatorname{End}_G(V) \to \mathbb{C}^\star$ che associa a f il numero $\frac{\operatorname{Tr} f}{\dim V}$ è un isomorfismo.

Teorema 2.14 (ortonormalità dei caratteri di rappresentazioni irriducibili)**.** *Siano V e W G-moduli irriducibili, allora $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \delta_{V,W}$.*

Dimostrazione. Per ogni G-modulo U, $\pi\colon U \to U$ con $\pi(u) = {}^1\!/_{|G|} \sum_{g \in G} gu$ è una proiezione da U su $U^G = \{\, u \in U \mid (\forall g \in G) gu = u \,\}$: infatti

$$h\pi(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgu = \pi(u)$$

cambiando indice da g a hg, e se $u \in U$ è invariante,

$$\pi(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gu = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u = u.$$

Quindi si ha

$$\dim U^G = \operatorname{Tr}(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g).$$

Se si prende $U = \operatorname{Hom}(W, V)$, si ottiene

$$\dim U^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_W(g)} \chi_V(g) = \langle \chi_V, \chi_W \rangle ,$$

ma per il lemma di Schur $\dim U^G = \dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = \delta_{V,W}$. □

Proposizione 2.15. *Sia V un G-modulo, V_i G-moduli irriducibili tali che $V \cong_G V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$; sia $\mu_U(V) := |\{ V_i \mid V_i \cong_G U \}|$; questa quantità è intrinseca e vale $\langle \chi_U, \chi_V \rangle$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \langle \chi_U, \chi_V \rangle = \langle \chi_U, \chi_{V_1 \oplus \cdots \oplus V_r} \rangle = \left\langle \chi_U, \sum_{i=1}^{r} \chi_{V_i} \right\rangle = \\ = \sum_{i=1}^{r} \langle \chi_U, \chi_{V_i} \rangle = \sum_{i=1}^{r} \delta_{U,V_i} = \mu_U(V). \end{aligned}$$ □

Corollario 2.16. *L'applicazione χ dai G-moduli modulo isomorfismo a X_G è iniettiva.*

17.10.2006

Dimostrazione alternativa per l'ortonormalità dei caratteri. Siano $\rho\colon G \to \operatorname{GL}(V)$, $\sigma\colon G \to \operatorname{GL}(W)$ due rappresentazioni irriducibili. Se $F\colon V \to W$ è un'applicazione lineare, sia

$$\tilde{F} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma_g F \rho_{g^{-1}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gF;$$

$\tilde{F}$ è invariante, cioè $h\tilde{F} = \tilde{F}$, quindi $\tilde{F}$ è un morfismo di G-moduli.

Siano $(e_1, \ldots, e_n)$ e $(f_1, \ldots, f_m)$ basi di V e W; si definisce $F_{i,j}\colon V \to W$ con $F_{i,j}(e_s) := \delta_{i,s} f_j$. In generale vale

$$\begin{aligned} |G|\, \tilde{F_{i,j}}(e_t) = \sum_{g \in G} \sigma_g F_{i,j} \rho_{g^{-1}}(e_t) = \sum_{g \in G} \sigma_g F_{i,j} \sum_{s=1}^{n} (\rho_{g^{-1}})_{s,t} e_s = \\ = \sum_{g \in G} \sigma_g (\rho_{g^{-1}})_{i,t} f_j = \sum_{g \in G} \sum_{h=1}^{m} (\sigma_g)_{h,j} (\rho_{g^{-1}})_{i,t} f_h. \end{aligned}$$

Se $V \not\cong_G W$, $\tilde{F_{i,j}} = 0$ e per ogni $h \in \{1, \ldots, m\}$ deve essere $\sum_{g \in G} (\sigma_g)_{h,j} (\rho_{g^{-1}})_{i,t} = 0$. Per l'arbitrarietà di i, j, t, quella quantità deve annullarsi per ogni i, j, h, t.

Allora si ha

$$\begin{aligned}\langle\chi_W,\chi_V\rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_W(g)\overline{\chi_V(g)} =\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\sum_{i=1}^{m}(\sigma_g)_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(\bar{\rho_g})_{j,j}\right) =\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\sum_{i=1}^{m}(\sigma_g)_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(\rho_{g^{-1}})_{j,j}\right) =\\ &= \sum_{i,j}\frac{1}{|G|}\left(\sum_{g\in G}(\sigma_g)_{i,i}\left(\rho_{g^{-1}}\right)_{j,j}\right) = 0.\end{aligned}$$

Se invece $V \cong_G W$, risulta $\chi_V = \chi_W$; per Schur, $\tilde{F_{i,j}} = \frac{\operatorname{Tr}\tilde{F_{i,j}}}{\dim V}\operatorname{Id}_V$ e

$$\operatorname{Tr}\tilde{F_{i,j}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr}\left(\rho_g F_{i,j}\rho_{g^{-1}}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr}F_{i,j} = \operatorname{Tr}F_{i,j} = \delta_{i,j},$$

quindi $\tilde{F_{i,j}} = {}^{\delta_{i,j}}/_{n}\operatorname{Id}_V$. Si ha

$$|G|\frac{\delta_{i,j}}{n}e_t = |G|\,\tilde{F_{i,j}}(e_t) = \sum_{g\in G}\sum_{h=1}^{n}(\rho_g)_{h,j}\left(\rho_{g^{-1}}\right)_{h,j}e_h$$

e perciò ${}^{1}/_{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_g)_{h,j}\left(\rho_{g^{-1}}\right)_{i,t} = \frac{\delta_{i,j}\delta_{h,t}}{n}$ e infine

$$\langle\chi_V,\chi_V\rangle = \sum_{i,j}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_g)_{i,i}\left(\rho_{g^{-1}}\right)_{j,j}e_h = \sum_{i,j}\frac{\delta_{i,j}\delta_{j,i}}{n} = 1. \qquad \square$$

Osservazione 2.17. Con questa dimostrazione si ha che, definite $\rho_{i,j}\colon G\to\mathbb{C}$ con $\rho_{i,j}(g) := \rho_{g_{i,j}}$, $\left(\rho_{g^{-1}}\right)_{i,j} = \left(\rho_g^{-1}\right)_{i,j} = \left(\bar{\rho_g}^t\right)_{i,j} = \left(\bar{\rho_g}\right)_{j,i}$, poiché si può prendere una base che diagonalizza ρ_g. Si ottiene quindi $\langle\rho_{h,j},\sigma_{t,i}\rangle = {}^{1}/_{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_g)_{h,j}(\bar{\sigma_g})_{t,i} = 0$ se $V \not\cong_G W$ e $\langle\rho_{h,j},\rho_{t,i}\rangle = \frac{\delta_{i,j}\delta_{h,t}}{n}$.

Corollario 2.18. *Dato un G-modulo V, $\langle\chi_V,\chi_V\rangle$ è un intero positivo ed è 1 se e solo se V è irriducibile.*

Dimostrazione. Si suppone di poter scrivere $V \cong_G Z_1^{\mu_1}\oplus\cdots\oplus Z_r^{\mu_r}$, allora $\langle\chi_V,\chi_V\rangle = \sum_{i,j}\mu_i\mu_j\left\langle\chi_{Z_i},\chi_{Z_j}\right\rangle = \sum_i\mu_i^2 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Inoltre l'unico modo in cui una somma di quadrati può dare 1 è che $r=1$ e $\mu_1 = 1$; viceversa, se V è irriducibile, $r=1$ e $\mu_1=1$. $\square$

20.10.2006

Esercizio 2.19. Sia Ω un insieme finito su cui agisce un gruppo G e sia $V = \langle\, e_\omega \mid \omega\in\Omega\,\rangle_{\mathbb{C}}$; se s è il numero di orbite di G in Ω allora V contiene s copie della rappresentazione banale.

Soluzione. Siano $\Omega_1,\dots,\Omega_s$ le orbite, allora $v_i = \sum_{\omega\in\Omega_i}e_\omega$ è stabile: $gv_i = \sum_{\omega\in\Omega_i}ge_\omega = \sum_{\omega\in\Omega_i}e_{g\omega} = \sum_{\omega\in\Omega_i}e_\omega = v_i$, quindi V contiene almeno s copie della rappresentazione banale. Se ora $v = gv \in V$ per ogni $g\in G$,

$v = \sum_{\omega\in\Omega} a_\omega e_\omega$ e $gv = \sum_{\omega\in\Omega} a_\omega e_{g\omega}$, quindi $a_\omega = a_{g\omega}$ per ogni g, cioè a è funzione di classe; allora $v = \sum_{i=1}^{s} a_{\omega_i} v_i$ con $\omega_i \in \Omega_i$ qualsiasi: v è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$, perciò V contiene solo s copie della banale.

Oppure, usando i caratteri, si calcola

$$\begin{aligned}
\langle \chi_V, \chi_B \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_V(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \mathrm{Tr}(g) = \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \frac{1}{|G|} |\{\, (g,\omega) \mid g\omega = \omega \,\}| = \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\omega\in\Omega} |\mathrm{Stab}(\omega)| = \frac{1}{|G|} \sum_{\omega\in\Omega} \frac{|G|}{|O(\omega)|} = \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{|O(\omega)|} = s.
\end{aligned}$$ □

Esercizio 2.20. Data un'azione doppiamente transitiva di G su Ω (cioè tale che per ogni (x,y) e (x',y') con $x \neq y$ e $x' \neq y'$, esista $g \in G$ con $gx = x'$ e $gy = y'$), sia $W = \left\langle e_{(x,y)} \mid (x,y) \in \Omega^2 \right\rangle_{\mathbb{C}}$, allora $\chi_W = \chi_V^2$; $V \cong_G B \oplus U$ con U irriducibile; la riflessione per S_n è irriducibile.

Soluzione. Si ha $\chi_W(g) = |\mathrm{Fix}_{\Omega^2}(g)| = \left|\left\{\, (x,y) \in \Omega^2 \mid gx = x, gy = y \,\right\}\right| = |\{\, x \in \Omega \mid gx = x \,\}|^2 = \chi_V(g)^2$.

Poiché W si divide in due orbite (la diagonale e il resto), $\langle \chi_W, \chi_B \rangle = 2 = \left\langle \chi_V^2, \chi_B \right\rangle = {}^1\!/\!_{|G|} \sum_{g\in G} \chi_V(g)^2 = {}^1\!/\!_{|G|} \sum_{g\in G} \chi_V(g)\overline{\chi_V(g)} = \langle \chi_V, \chi_V \rangle$. Quindi se V si scompone in $\bigoplus_{i=1}^{r} Z_i^{\mu_i}$, deve essere che $2 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2$, e l'unica possibilità è che si scomponga in due rappresentazioni irriducibili. Poiché ha una sola orbita, si ha $V = B \oplus U$ con U irriducibile e non banale.

In particolare, S_n agisce n-transitivamente su $\{1, \dots, n\}$, quindi la rappresentazione di permutazione si scompone in $B \oplus R$ dove R è la rappresentazione di riflessione che di conseguenza è irriducibile. □

Lemma 2.21. *Sia $\varphi \colon G \to \mathbb{C}$; dato un G-modulo V, si definisce $f_{\varphi,V} \colon V \to V$ con $f_{\varphi,V}(v) \coloneqq \sum_{g\in G} \varphi(g) gv$; allora $f_{\varphi,V}$ è un morfismo di G-moduli per ogni V se e solo se φ è una funzione di classe.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$ Se φ è funzione di classe,

$$h f_{\varphi,V} h^{-1}(v) = h \sum_{g\in G} \varphi(g) g h^{-1}(v),$$

che grazie a un cambiamento di variabile è uguale a

$$\sum_{g\in G} \varphi(h^{-1}gh) gv = \sum_{g\in G} \varphi(g) gv = f_{\varphi,V}(v),$$

cioè $f_{\varphi,V}$ è G-equivariante.

$\Rightarrow$ Se $f_{\varphi,V}$ è G-equivariante per ogni V, lo è in particolare per la rappresentazione regolare $V = \mathrm{P} \coloneqq \langle e_g \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}}$, allora si ha $h f_{\varphi,V} h^{-1}(e_e) = f_{\varphi,V}(e_e)$ per ogni $h \in G$; ma $f_{\varphi,V}(e_e) = \sum_{g\in G} \varphi(g) e_g$ e

$$h f_{\varphi,V} h^{-1}(e_e) = h \sum_{g\in G} \varphi(g) g h^{-1} e_e = \sum_{g\in G} \varphi(g) h g h^{-1} e_e = \sum_{g\in G} \varphi(h^{-1}gh) e_g,$$

quindi $\varphi(h^{-1}gh) = \varphi(g)$ per ogni $g, h \in G$. $\square$

Teorema 2.22. *L'insieme* $\{\chi_V \mid V \text{ irriducibile}\}$ *è una base ortonormale di* X_G. *In particolare, il numero dei* G*-moduli irriducibili distinti è pari al numero di classi di coniugio di* G.

Dimostrazione. Si è già dimostrato che la famiglia $\{\chi_V\}$ è ortonormale, si deve solo provare che generano tutto X_G. Sia quindi $\varphi \in X_G$ tale che $\langle \varphi, \chi_V \rangle = 0$ per ogni V irriducibile, si deve dimostrare che $\varphi = 0$, cioè che l'ortogonale è il vettore nullo. Se V è irriducibile, per il lemma di Schur $f_{\varphi,V} = {}^{\operatorname{Tr} f_{\varphi,V}}/_{\dim V} \operatorname{Id}_V$; si ha

$$\operatorname{Tr} f_{\varphi,V} = \sum_{g\in G} \varphi(g) \operatorname{Tr} g = \sum_{g\in G} \varphi(g)\chi_V(g) = \sum_{g\in G} \varphi(g)\overline{\chi_{V^\star}(g)} = |G| \langle \varphi, \chi_{V^\star} \rangle .$$

Ma $V^\star$ è ancora irriducibile, perché si mostra facilmente che V e $V^\star$ hanno la stessa norma quadra, quindi $\operatorname{Tr} f_{\varphi,V} = 0$ e $f_{\varphi,V} = 0$.

Siano ora V, W due G-moduli irriducibili;

$$\begin{aligned} f_{\varphi,V\oplus W}(v, w) &= \sum_{g\in G} \varphi(g)g(v, w) = \sum_{g\in G} \varphi(g)(gv, gw) = \\ &= (f_{\varphi,V}(g), f_{\varphi,W}(g)) = (0, 0). \end{aligned}$$

Allora $f_{\varphi,V} = 0$ per qualsiasi G-modulo V (non soltanto per gli irriducibili) e in particolare è vero per $V = \mathrm{P}$: si ha $0 = f_{\varphi,\mathrm{P}}(e_e) = \sum_{g\in G} \varphi(g)e_g$, da cui $\varphi(g) = 0$ per ogni $g \in G$. $\square$

Osservazione 2.23. La rappresentazione regolare si scompone come $\mathrm{P} = \bigoplus_{V \text{ irriducibili}} V^{\dim V}$. Infatti P è una rappresentazione di permutazione, quindi $\chi_\mathrm{P}(g) = |\operatorname{Fix}(g)| = \delta_{g,e} |G|$, cioè $\chi_\mathrm{P} = |G| \delta_e$. Allora

$$\mu_\mathrm{P}(V) = \langle \chi_\mathrm{P}, \chi_V \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |G| \delta_e(g)\overline{\chi_V(g)} = \overline{\chi_V(e)} = \overline{\operatorname{Tr} \operatorname{Id}_V} = \dim V.$$

Corollario 2.24. *Si ha* $\sum_{V \textit{ irriducibile}} \dim V \chi_V(g) = |G| \delta_{e,g}$, $\dim \mathrm{P} = |G| = \sum_{V \textit{ irriducibile}} (\dim V)^2$, *e se* V *è irriducibile,* $\dim V \leq \sqrt{|G|}$.

Esempio 2.25. Si costruirà la tavola dei caratteri di S_3, cioè una matrice $n \times n$ con n il numero di classi di coniugio o, equivalentemente, di rappresentazioni irriducibili. Per S_3, queste sono la rappresentazione banale, quella alterna e quella di riflessione, mentre le classi di coniugio sono di rappresentanti e, (12), (123) e hanno rispettivamente cardinalità 1, 3, 2.

$$\begin{array}{c} \\ \scriptstyle B \\ \scriptstyle A \\ \scriptstyle R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overset{\scriptstyle 1}{\scriptstyle e} & \overset{\scriptstyle 3}{\scriptstyle (12)} & \overset{\scriptstyle 2}{\scriptstyle (123)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Infatti, le prime due righe sono banali; per calcolare la terza si può usare la formula $\sum_{V \text{ irriducibile}} \dim V \chi_V(g) = |G| \delta_{e,g}$, oppure si può notare che la rappresentazione di permutazione T, per cui vale $\chi_T(g) = |\operatorname{Fix}(g)|$, si decompone in $B \oplus R$, quindi $\chi_R(g) = \chi_T(g) - \chi_B(g)$. Il fatto che risultino tutti numeri interi non è una regola generale, ma è vero in particolare per le tavole dei caratteri di S_n. Per la proposizione precedente, $\mathrm{P} \cong B \oplus A \oplus R^2$.

Proposizione 2.26. *Sia $(\chi_{V_i}(g_j))_{i,j}$ con $g_j \in C_j$ (la j-esima classe di coniugio di G) la tavola dei caratteri di un gruppo G e sia $a_{i,j} = \sqrt{|C_j|/|G|}\chi_{V_i}(g_j) = 1/\sqrt{|Z(g_j)|}\chi_{V_i}(g_j)$; allora le righe della matrice A sono ortonormali. In particolare, le colonne della tavola dei caratteri sono ortogonali.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
\delta_{h,k} = \langle \chi_{V_h}, \chi_{V_k} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_h}(g)\overline{\chi_{V_k}(g)} = \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{s} |C_j|\, \chi_{V_h}(g_j)\overline{\chi_{V_k}(g_j)} = \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}}\chi_{V_h}(g_j) \overline{\sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}}\chi_{V_k}(g_j)} = \sum_{j=1}^{s} a_{h,j}\overline{a_{j,k}},
\end{aligned}$$

quindi le righe di A sono ortonormali, ma questo implica che lo sono anche le colonne. $\square$

Esempio 2.27. Si costruirà la tavola dei caratteri di S_4: si cercano cinque rappresentazioni irriducibili, ma già si conoscono completamente la rappresentazione banale, l'alterna e quella di riflessione; per la quarta, si osserva che data una rappresentazione irriducibile V di S_n, anche $A \otimes V$ è irriducibile:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{A\otimes V}, \chi_{A\otimes V} \rangle &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_A(\sigma)\chi_V(\sigma)\overline{\chi_A(\sigma)\chi_V(\sigma)} = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma(-1)^\sigma \chi_V(\sigma)\overline{\chi_V(\sigma)} = \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1,
\end{aligned}$$

che è condizione sufficiente e necessaria perché $A \otimes V$ sia irriducibile. L'ultima rappresentazione si ottiene grazie alla condizione di ortogonalità delle colonne.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \overset{1}{e} & \overset{6}{(12)} & \overset{3}{(12)(34)} & \overset{8}{(123)} & \overset{6}{(1234)} \end{array} \\
\begin{array}{c} B \\ A \\ R \\ A\otimes R \\ V \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 2 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

24.10.2006

Esempio 2.28. Per S_5, si hanno quattro rappresentazioni note, B, A, R, $A \otimes R$; ne mancano tre. La prima si ottiene con l'algebra alternante di secondo ordine su R, $\Lambda^2 R$, e il suo carattere dalla formula $\chi_{\Lambda^2 R}(g) = 1/2(\chi_R^2(g) - \chi_R(g^2))$; il residuo delle dimensioni al quadrato è $50 = 120 - 1^2 - 1^2 - 4^2 - 4^2 - 6^2$, quindi possono mancare rappresentazioni di grado 1 e 7 o due di grado 5; si mostra che non esistono altre rappresentazioni di grado 1.

Sia $\rho\colon S_5 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\star$ una rappresentazione; $\ker\rho$ è un sottogruppo normale di S_5, perciò deve essere $\ker\rho \in \{\{1\}, A_n, S_n\}$. Il nucleo non può essere $\{1\}$, perché ρ sarebbe un morfismo iniettivo da un gruppo non abeliano a uno abeliano. Se $\ker\rho = S_n$, chiaramente ρ è la rappresentazione banale; infine, se $\ker\rho = A_n$, $S_n/\ker\rho \cong \mathbb{Z}_2$ e l'immagine di $1 + 2\mathbb{Z}$ ha ordine 2, quindi può andare solo in $-1 \in \mathbb{C}^\star$ e ρ è la rappresentazione alterna.

Di conseguenza le rappresentazioni rimanenti W_1 e W_2 hanno entrambe grado 5; si può ipotizzare che $W_2 = A \otimes W_1$. Se così non fosse, $\chi_{W_i}(\sigma) = 0$ per ogni σ di ordine dispari, in quanto dovrebbe essere $A \otimes W_i \cong W_i$ (W_1 e W_2 sono le uniche rappresentazioni di grado 5). D'altra parte, si conosce la norma quadra delle colonne della tavola dei caratteri: è $|G|/|C_j|$ e in particolare per la classe di coniugio di (12) si ha $120/10 = 1^1 + (-1)^2 + 2^2 + (-2)^2 + 0^2 + \chi_{W_1}((12))^2 + \chi_{W_2}((12))^2$, assurdo perché i caratteri rimanenti non possono essere nulli come era stato trovato. Quindi $\chi_{W_1}((12)) = -\chi_{W_2}((12))$ e la somma dei loro quadrati è 2: sono 1 e -1, in un qualche ordine. Per la terza colonna, la somma dei quadrati deve risultare $120/15 = 8$ e si trova che i caratteri di W_1 e W_2 devono essere entrambi 1 o entrambi -1; per decidere il segno, si sfrutta l'ortogonalità con la seconda colonna. Procedendo in questo modo si completa la tabella.

Al contrario di $\Lambda^2 R$, $S^2 R$ è riducibile: calcolando il suo carattere, si mostra che è lo stesso della rappresentazione $B \oplus R \oplus W$. Questo può servire per scoprire nei dettagli W, localizzando dentro $S^2 R$ la rappresentazione banale e quella di riflessione e prendendo l'ortogonale a queste due.

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ B \\ A \\ R \\ A\otimes R \\ \Lambda^2 R \\ W_1 \\ W_2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
1 & 10 & 15 & 20 & 20 & 30 & 24 \\
e & (12) & (12)(34) & (123) & (123)(45) & (1234) & (12345)
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
4 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
4 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
5 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
5 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

27.10.2006

Esempio 2.29. Trovare la tavola dei caratteri di A_4.

Soluzione. Innanzitutto bisogna trovare le classi di coniugio di A_4: la classe di S_4 con rappresentante $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$ si decompone in due classi di A_4 se i σ_i sono tutti distinti e dispari, altrimenti è anche una classe di A_4; quindi le classi sono quattro e hanno come rappresentanti e, (12)(34), (123) e (132). Si cercano quindi quattro rappresentazioni irriducibili. Si osserva che posto K il sottogruppo normale generato dai 2-cicli, $A_4/K \cong \mathbb{Z}_3$ e da $\mathbb{Z}_3$ si hanno tre rappresentazioni irriducibili di grado 1. Riportandole a rappresentazioni di A_4, saranno rappresentazioni di grado 1 che mandano i 2-cicli nell'identità, mentre le due classi di coniugio dei 3-cicli verranno mandate in altre radici terze dell'unità.

Rimane un'unica rappresentazione, che si mostra con le formule essere di grado 3, e avere lo stesso carattere della rappresentazione di riflessione di S_4 composta con l'iniezione di A_4 in S_4, quindi l'ultima rappresentazione è proprio quella di riflessione.

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_{-1} \\ R
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
1 & 3 & 4 & 4 \\
e & (12)(34) & (123) & (132)
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & \omega & \omega^{-1} \\
1 & 1 & \omega^{-1} & \omega \\
3 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad \square
$$

Esercizio 2.30. Per ogni tavola dei caratteri T vista come matrice $n \times n$, si ha $\det T \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ e $|\det T|^2 = \prod_{j=1}^{s} |Z(g_j)|$ con g_j rappresentante della classe di coniugio C_j.

Soluzione. Si ha che $\det T \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ è equivalente a $\overline{\det T} = \pm \det T$, ma $\overline{\det T} = \det \bar{T}$; inoltre $\bar{\chi_V} = \chi_{V^\star}$ e $V^\star$ è irriducibile se V è irriducibile. Quindi la tavola coniugata è uguale alla tavola le cui righe sono state permutate, perciò il determinante è uguale a meno del segno.

Infine, le colonne sono ortogonali, perciò $|\det T|^2 = \det(T^t \bar{T}) = \det^2(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s))$ con $\lambda_i = {}^{|G|}/_{|C_i|} = |Z(g_i)|$. □

3 $\mathbb{C}[G]$-moduli

Definizione 3.1. Dati un G-modulo V e un H-modulo W, si definisce $V \boxtimes W$ insiemisticamente come $V \otimes W$, ma con la struttura di $G \times H$-modulo data da $(g,h)v \boxtimes w \coloneqq gv \boxtimes hw$.

27.11.2006

Osservazione 3.2. Se V è un G-modulo irriducibile e W è un H-modulo irriducibile, allora $V \boxtimes W$ è un $G \times H$-modulo irriducibile; viceversa, ogni $G \times H$-modulo irriducibile è prodotto di un G-modulo irriducibile e un H-modulo irriducibile.

Infatti si ha $\chi_{V \boxtimes W}(g,h) = \operatorname{Tr} \rho_g \otimes \sigma_h = \operatorname{Tr} \rho_g \operatorname{Tr} \sigma_h = \chi_V(g)\chi_W(h)$ e come conseguenza immediata $\|\chi_{V \boxtimes W}\|^2 = \|\chi_V\|^2 \|\chi_W\|^2$.

Se $V \boxtimes W \cong_{G \times H} V' \boxtimes W'$ sono due rappresentazioni irriducibili con V, V', W, W' irriducibili, allora $V \cong_G V'$ e $W \cong_H W'$. Infatti, $\chi_{V \boxtimes W} = \chi_{V' \boxtimes W'}$, che calcolato in (g,e) dà $\dim W \chi_V(g) = \dim W' \chi_{V'}(g)$, ma se $V \ncong_G V'$ i due caratteri sarebbero ortogonali, quindi le due rappresentazioni devono essere isomorfe e allo stesso modo W e W'.

Si sono trovate quindi tante rappresentazioni irriducibili per $G \times H$ quante il prodotto tra il numero delle classi di coniugio di G e il numero delle classi di coniugio di H, cioè tante quante le classi di coniugio di $G \times H$; questo significa che non ci sono altre rappresentazioni irriducibili.

Definizione 3.3. Si definisce l'algebra $\mathbb{C}[G] \coloneqq \langle\, g \mid g \in G \,\rangle_{\mathbb{C}}$, con $g \cdot h \coloneqq gh$; un $\mathbb{C}[G]$-*modulo* è (V, ρ) con $\rho\colon \mathbb{C}[G] \to \operatorname{End}(V)$[1].

Osservazione 3.4. Dato un G-modulo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, si ha un $\mathbb{C}[G]$-modulo con $\hat{\rho}\colon \mathbb{C}[G] \to \operatorname{End}(V)$ definito da $\hat{\rho}(\sum_{g \in G} a_g g) \coloneqq \sum_{g \in G} a_g \rho_g$. L'applicazione così definita è non solo lineare, ma anche un morfismo di algebre, in quanto $\hat{\rho}(g \cdot h) = \hat{\rho}(g)\hat{\rho}(h)$ e $\hat{\rho}(e) = \mathrm{Id}_V$.

Viceversa, dato $\varphi\colon \mathbb{C}[G] \to \operatorname{End}(V)$, si ha che $\varphi_{|G}$ è un G-modulo e ovviamente $\widehat{\varphi_{|G}} = \varphi$ e $\hat{\rho}_{|G} = \rho$. Da questa corrispondenza biunivoca si deducono le seguenti:

- ρ è un G-modulo irriducibile se e solo se $\hat{\rho}$ è un $\mathbb{C}[G]$-modulo irriducibile, in quanto un sottospazio invariante per ρ ne induce uno per $\hat{\rho}$ e viceversa;

- $\mathbb{C}[G]$ è un $\mathbb{C}[G]$-modulo con la moltiplicazione a sinistra, quindi per restrizione è un G-modulo: la rappresentazione regolare; i $\mathbb{C}[G]$-sottomoduli sono gli ideali sinistri (cioè gli insiemi stabili per la moltiplicazione a sinistra) e quelli irriducibili sono gli ideali minimali (cioè quelli che non contengono propriamente altri ideali non nulli);

[1] Poiché gli elementi di $\mathbb{C}[G]$ non sono tutti invertibili, il codominio non può essere solo $\mathrm{GL}(V)$.

- se $\mathbb{C}[G]$ è completamente riducibile, quindi per ogni suo ideale I esiste un ideale J tale che $\mathbb{C}[G] \cong_{\mathbb{C}[G]} I \oplus J$; in questo caso si dice che $\mathbb{C}[G]$ è *semisemplice.*

Proposizione 3.5. *Siano $Z_1, \dots, Z_s$ le rappresentazioni irriducibili di G, con dimensioni $n_1, \dots, n_s$, allora esiste un isomorfismo di algebre $\mathbb{C}[G] \to E := \bigoplus_{i=1}^s \operatorname{End}(Z_i) \cong_{\mathbb{C}[G]} \bigoplus_{i=1}^s \mathscr{M}(n_i \times n_i, \mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Siano $\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}(Z_i)$ e $\hat\rho = \hat\rho_1 \oplus \dots \oplus \hat\rho_s$; per come è definito, ρ è un morfismo di algebre. Inoltre, $\dim \mathbb{C}[G] = |G| = \sum_{i=1}^s n_i^2 = \sum_{i=1}^s \dim \operatorname{End}(Z_i) = \dim E$, perciò basta dimostrare che ρ è suriettiva. Sia $H := \operatorname{Im} \rho \leq E$; se $H \neq E$, esiste $f \colon E \to \mathbb{C}$ tale che $f(H) = \{0\}$ ma $f \not\equiv 0$; si prendono delle basi ortonormali di Z_i tali che le matrici siano unitarie, allora le funzioni $\rho^i_{j,k}$ sono ortogonali. Si ha $\rho(g) = (\rho_1(g), \dots, \rho_s(g)) = \sum_{i,j,k} \rho^i_{j,k}(g) e^i_{j,k}$, dove $e^i_{j,k}$ è l'elemento con tutti 0 tranne nell'entrata (j,k) dell'i-esima matrice. Siano $a^i_{j,k} := f(e^i_{j,k})$; si ha $0 = f\rho(g) = \sum_{i,j,k} a^i_{j,k} \rho^i_{j,k}(g)$, con gli $a^i_{j,k}$ non tutti nulli, ma questo è assurdo perché $\rho^i_{j,k}$ sono ortogonali e in particolare indipendenti. □

7.11.2006

Esercizio 3.6. Dato $\mathbb{C}[G]$, il centro $Z(\mathbb{C}[G])$ si scrive come $Z[G]$. Si ha $Z[G] = \langle e_{C_1}, \dots, e_{C_s} \rangle$ con C_i le classi di coniugio di G e $e_{C_i} = \sum_{g \in C_i} g$.

Soluzione. Sia $x = \sum_{g \in G} a_g g \in Z[G]$, allora per ogni $h \in G$,

$$\sum_{g \in G} a_g gh = \sum_{g \in G} a_g hg = \sum_{g \in G} a_{h^{-1}gh} gh,$$

cambiando la variabile della sommatoria, da cui $a_{h^{-1}gh} = a_g$: a è funzione di classe, perciò $x \in \langle e_{C_1}, \dots, e_{C_s} \rangle$. Viceversa, allo stesso modo, $he_{C_i} = \sum_{g \in C_i} hg = \sum_{g \in C_i} gh$, cioè $e_{C_i} \in Z[G]$. □

Osservazione 3.7. Una rappresentazione irriducibile $\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}(Z_i)$ di G di dimensione n_i si può estendere a $\hat\rho_i \colon \mathbb{C}[G] \to \operatorname{End}(Z_i)$; inoltre:

- $\hat\rho_i(Z) \subseteq \mathbb{C} \operatorname{Id}_{Z_i}$, con $Z := Z[G]$;
- se $\omega_i \colon Z \to \mathbb{C}$ tale che $\hat\rho_{i|Z}(x) = \omega_i(x) \operatorname{Id}_{Z_i}$, allora se $x = \sum a_g g$, $\omega_i(x) = {}^1\!/_{n_i} \sum a_g \chi_i(g)$.

Infatti se $gx = xg$ per ogni $g \in G$, $\hat\rho_i(g)\hat\rho_i(x) = \hat\rho_i(x)\hat\rho_i(g)$, quindi $\rho_i(g)\hat\rho_i(x) = \hat\rho_i(x)\rho_i(g)$. Allora $\hat\rho_i(x)$ è un morfismo di moduli da Z_i in Z_i, ma Z_i è irriducibile, allora per il lemma di Schur è un multiplo dell'identità. Ora,

$$\hat\rho_i(x) = \frac{\operatorname{Tr}(\hat\rho_i(x))}{n_i} \operatorname{Id}_{Z_i} = \frac{\operatorname{Tr}\left(\sum_{g \in G} a_g \rho_i(g)\right)}{n_i} \operatorname{Id}_{Z_i} = \frac{\sum_{g \in G} a_g \operatorname{Tr}(\rho_i(g))}{n_i} \operatorname{Id}_{Z_i}.$$

Proposizione 3.8. *La mappa $\omega \colon Z \to \mathbb{C}^s$ che associa a x la s-upla $(\omega_1(x), \dots, \omega_s(x))$ è isomorfismo di algebre.*

Dimostrazione. Si è dimostrato che la mappa $\hat\rho \colon \mathbb{C}[G] \to \bigoplus_{i=1}^s \operatorname{End}(Z_i)$ è isomorfismo di algebre, e il centro viene mandato in $\bigoplus_{i=1}^s Z(\operatorname{End}(Z_i)) \cong \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{C}$ (il centro di un'algebra su $\mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$) e la composizione è ω. □

Definizione 3.9. Un elemento $x \in R$ è *intero* su $\mathbb{Z}$ se esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tali che $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Se $R = \mathbb{C}$, x si dice intero algebrico.

Si dimostra che gli interi su $\mathbb{Q}$ sono gli elementi di $\mathbb{Z}$ e che le radici dell'unità sono interi algebrici.

Proposizione 3.10. *Sono equivalenti:*

- *$x \in R$ è intero su $\mathbb{Z}$;*
- *$\mathbb{Z}[x]$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo finitamente generato;*
- *esiste uno $\mathbb{Z}$-sottomodulo M di R che contiene $\mathbb{Z}[x]$ ed è finitamente generato.*

Corollario 3.11. *Se R è finitamente generato come $\mathbb{Z}$-modulo, ogni $x \in R$ è intero (si può prendere R stesso come M).*

Gli elementi interi di R sono un sottoanello.

Proposizione 3.12. *Sia V un G-modulo, allora $\chi_V(g)$ è intero algebrico.*

Dimostrazione. Sia ρ_g la matrice dell'azione di g su V; poiché G ha ordine finito, si può trovare una base in cui $\rho_g = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_r)$ e $x_i^n = 1$ se $n = |G|$. Quindi gli autovalori sono interi algebrici, ma allora la traccia che è somma degli autovalori, è un intero algebrico perché somma di interi algebrici. $\square$

Proposizione 3.13. *Sia $x = \sum_{g \in G} a_g g \in Z$ con a_g intero algebrico per ogni $g \in G$, allora x è intero (il centro è un anello commutativo).*

Dimostrazione. Siano $C_1, \dots, C_s$ le classi coniugate, $e_i = \sum_{g \in C_i} g$; si è visto che $\langle e_1, \dots, e_s \rangle = Z$ e siano $g_i \in C_i$. Poiché $x \in Z$, $x = \sum_{i=1}^{s} a_{g_i} e_i$ (perché gli a_g non variano all'interno della stessa classe di coniugio). Se gli e_i sono interi, si ha la tesi perché x è combinazione di elementi interi.

Si considera $e_i e_j = \sum_{k=1}^{s} a_{i,j}^k e_k$, perché $e_i e_j \in Z$. Ora, $e_i e_j \in \langle\, g \mid g \in G \,\rangle_{\mathbb{Z}}$, ma appartiene anche a $\langle e_1, \dots, e_s \rangle_{\mathbb{C}}$; l'intersezione di questi fa $A := \langle e_1, \dots, e_s \rangle_{\mathbb{Z}}$, quindi $a_{i,j}^k$ sono interi. Di conseguenze, lo $\mathbb{Z}$-modulo A è anche un sottoanello di R, quindi tutti i suoi elementi sono interi e in particolare lo sono gli e_i. $\square$

Corollario 3.14. *Sia ρ una rappresentazione irriducibile di grado n e χ il suo carattere. Se $x = \sum_{g \in G} a_g g \in Z$ è tale che a_g è intero per ogni $g \in G$, allora $1/n \sum_{g \in G} a_g \chi(g)$ è intero algebrico.*

Dimostrazione. Il numero $1/n \sum_{g \in G} a_g \chi(g)$ è $\omega(x)$; poiché x è intero, anche la sua immagine mediante ω lo è. $\square$

Corollario 3.15. *Sia V un G-modulo irriducibile, allora $n = \dim V \mid |G|$.*

Dimostrazione. Sia $x = \sum_{g \in G} \chi_V(g^{-1}) g \in \mathbb{C}[G]$; $x \in Z$ perché χ_V è un'applicazione di classe, allora $1/n \sum_{g \in G} \chi_V(g^{-1}) \chi_V(g)$ è un intero algebrico, il che significa che $1/n \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_V(g) = 1/n\, |G| \, \|\chi_V\|^2 = |G|/n$, che essendo intero algebrico e appartenente a $\mathbb{Q}$, deve essere intero, quindi $n \mid |G|$. $\square$

10.11.2006

Esercizio 3.16. Sia V un G-modulo irriducibile, allora $\dim V \mid |G|/|Z(G)|$.

Soluzione. Da $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, si scrive la rappresentazione irriducibile $G^m \to \mathrm{GL}(V^{\boxtimes m})$ per un m qualsiasi. Si sa che un elemento del centro agisce su V come un multiplo dell'identità. Si può considerare un sottogruppo H del centro di G^m (quindi normale), cioè $H = \{ (z_1, \dots, z_m) \in Z(G)^m \mid z_1 \cdots z_m = e \}$. La rappresentazione $\rho^{\boxtimes m}$ passa al quoziente ad una rappresentazione $\bar\rho$. Si è in questa situazione:

$$\begin{tikzcd} G^m \arrow[rr, "\rho^{\boxtimes m}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{GL}(V^{\boxtimes m}) \\ & \frac{G^m}{H}, \arrow[ur, "\bar\rho"'] & \end{tikzcd}$$

e le norme sono in relazione:

$$\begin{aligned} \|\chi_{\bar\rho}\|^2 &= \frac{|H|}{|G^m|} \sum_{(g_1,\dots,g_m)\in\frac{G^m}{H}} \chi_{\bar\rho}(g_1,\dots,g_m)\overline{\chi_{\bar\rho}(g_1,\dots,g_m)} = \\ &= \frac{1}{|G|^m} \sum_{(g_1,\dots,g_m)\in G^m} \chi_{\bar\rho}((g_1,\dots,g_m)H)\overline{\chi_{\bar\rho}((g_1,\dots,g_m)H)} = \\ &= \frac{1}{|G|^m} \sum_{g_1,\dots,g_m\in G} \prod_{i=1}^m \chi_\rho(g_i)\overline{\chi_\rho(g_i)} = \\ &= \frac{1}{|G|^m} \left(\sum_{g\in G} \chi_\rho(g)\overline{\chi_\rho(g)} \right)^m = \|\chi_\rho\|^{2m}. \end{aligned}$$

Quindi anche $\bar\rho$ è irriducibile. Ora,

$$H = \left\{ (z_1, \dots, z_{m-1}, (z_1 \cdots z_{m-1})^{-1}) \mid (z_1, \dots, z_{m-1}) \in Z(G)^{m-1} \right\},$$

quindi $|H| = |Z(G)|^{m-1}$ e questo è vero per ogni m. Si ha la relazione sulla dimensione di V: $n^m \coloneqq \dim V^{\boxtimes m} | {}^{t^m}\!/_{c^{m-1}}$, dove $t \coloneqq |G|$ e $c \coloneqq |Z(G)|$. Quindi $\frac{t^m}{c^{m-1}n^m} \in \mathbb{Z}$, allora $({}^t\!/_{cn})^m \in {}^1\!/_c\mathbb{Z}$ per ogni m e $\mathbb{Z}[{}^t\!/_{cn}] \subseteq {}^1\!/_c\mathbb{Z}$, quindi $\mathbb{Z}[{}^t\!/_{cn}]$ è contenuto in uno $\mathbb{Z}$-modulo finitamente generato, perciò è intero. □

4 Rappresentazioni indotte

Sia H un sottogruppo di G; si prende un sistema di rappresentanti R, cioè un insieme tale che se $g \in G$, esiste un unico $r \in R$ e $t \in H$ tale che $g = rt$.

Data una rappresentazione $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, anche H agisce su V con la rappresentazione $\rho_{|H}$ (generalmente si chiamerà questa restrizione ϑ). Dato un H-sottomodulo W di V, si indicherà con ϑ anche la mappa $\rho_{|H}^{|\mathrm{GL}(W)}$.

Preso $\sigma \in {}^G\!/_H$, si può definire $W_\sigma \coloneqq \rho_s W \leq V$ dove $s \in \sigma$. Questa definizione è ben posta perché W_σ non dipende da s: se $s' \in \sigma$, esiste $t \in H$ tale che $s' = st$, allora $\rho_{s'}W = \rho_{st}W = \rho_s\rho_t W = \rho_s W$.

Si considera ora $\{ W_\sigma \mid \sigma \in {}^G\!/_H \}$; G agisce su questo insieme come una permutazione: se $s \in \sigma$, $g \in G$, $\rho_g W_\sigma = \rho_g\rho_s W = \rho_{gs}W = W_\tau$ con $\tau = gsH$.

Definizione 4.1. Sia V un G-modulo, $H \leq G$, W sottospazio di V H-invariante; si dice che V è *indotto* da H se $V = \bigoplus_{\sigma\in G/H} W_\sigma$ o equivalentemente se ogni $v \in V$ si può scrivere in maniera unica come $\sum_{\sigma\in G/H} v_\sigma$ con $v_\sigma \in W_\sigma$.

Osservazione 4.2. Sia ha $\dim V = {}^{|G|}/_{|H|} \dim W$. Questo perché i traslati hanno la stessa dimensione di W.

Esempio 4.3. Si considera la rappresentazione regolare di G, $\mathrm{P} = \langle\, e_g \mid g \in G \,\rangle = V$ e si considera $W = \langle\, e_h \mid h \in H \,\rangle = \mathrm{P}_H$. Se $\sigma \in {}^{G}/_{H}$,

$$W_\sigma = \rho_s W = \langle\, \rho_s e_h \mid h \in H \,\rangle = \langle\, e_{sh} \mid h \in H \,\rangle = \\ = \langle\, e_g \mid g \in sH \,\rangle = \langle\, e_g \mid g \in \sigma \,\rangle\,.$$

Si ha facilmente che $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$: la rappresentazione regolare di G è indotta dalla rappresentazione regolare di H.

Esempio 4.4. Sia $V = \langle\, e_\sigma \mid \sigma \in {}^{G}/_{H} \,\rangle$ e sia $\rho_g e_\sigma = e_{g\sigma}$ (si tratta della rappresentazione di permutazione associata all'azione di G su ${}^{G}/_{H}$). Se si pone $W = \langle e_H \rangle$, W è fissato dagli elementi di H e $W_\sigma = \rho_s W = \langle \rho_s e_H \rangle = \langle e_{sH} \rangle$: i traslati sono gli elementi associati alle altre classi laterali, allora $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$: la rappresentazione banale su H induce la rappresentazione di permutazione su V.

Esempio 4.5. Se V_1 è indotta da W_1 e V_2 è indotta da W_2, allora $V_1 \oplus V_2$ è indotta da $W_1 \oplus W_2$: si ha $V_i = \bigoplus_{r \in R} rW_i$, allora

$$V_1 \oplus V_2 = \left(\bigoplus_{r \in R} rW_1 \right) \oplus \left(\bigoplus_{r \in R} rW_2 \right) = \bigoplus_{r \in R} r(W_1 \oplus W_2).$$

Esempio 4.6. Se (V, ρ) è indotta da (W, ϑ), e W_1 è un sottospazio H-invariante di W, si definisce $V_1 \coloneqq \sum_{r \in R} \rho_r W_1 \leq V$. Allora V_1 è G-invariante:

$$\rho_g V_1 = \sum_{r \in R} \rho_g \rho_r W_1 = \sum_{r \in R} \rho_{gr} W_1 = \sum_{r \in R} \rho_r W_1,$$

perché $\{\, gr \mid r \in R \,\}$ è un sistema di rappresentanti e si ha che V_1 è un G-sottomodulo. Inoltre V_1 è indotto da W_1, cioè la somma è in realtà una somma diretta. Si suppone che $\sum_{r \in R} v_r = 0$ con $v_r \in \rho_r W_1$; ma $\rho_r W_1 \subseteq \rho_r W$, cioè ogni v_r sta in un traslato di W diverso, allora $v_r = 0$ per ogni $r \in R$.

Esempio 4.7. Sia (V, ρ) indotto da (W, ϑ) e sia (Z, ρ') un G-modulo. Allora $V \otimes Z$ è indotto da $W \otimes \operatorname{Res}^G_H Z$ dove $\operatorname{Res}^G_H Z$ è la restrizione della rappresentazione a H. Si sa che $V = \bigoplus_{r \oplus R} \rho_r W$ e

$$V \otimes Z = \left(\bigoplus_{r \in R} \rho_r W \right) \otimes Z = \bigoplus_{r \in R} (\rho_r W \otimes Z) = \bigoplus_{r \in R} (\rho_r W \otimes \rho'_r Z)$$

perché $\rho'_r Z = Z$, quindi $V \otimes Z = \bigoplus_{r \in R} (\rho_r \otimes \rho'_r)(W \otimes Z)$ e Z si può vedere come $\operatorname{Res}^G_H Z$.

Teorema 4.8 (Proprietà universale dell'induzione)**.** *Sia (V, ρ) indotto da (W, ϑ), allora per ogni $\rho' \colon G \to \mathrm{GL}(V')$ e per ogni $f \colon W \to V'$ H-equivariante*[2] *esiste una unica $F \colon V \to V'$ G-equivariante tale che $F_{|W} = f$:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "F"] & & V' \\ & W. \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

[2]Cioè tale che $f(\vartheta_t w) = \rho_t f(w)$ per ogni $t \in H, w \in W$.

Dimostrazione. **Unicità.** Sia $F\colon V \to V'$ con questa proprietà e sia $x \in \rho_s W$ allora $\rho_s^{-1}x \in W$ e

$$F(x) = F(\rho_s\rho_s^{-1}x) = \rho'_s F(\rho_s^{-1}x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1}x).$$

Quindi F è completamente determinata in funzione dei dati iniziali.

Esistenza. Sia $F(x) \coloneqq \rho'_s f(\rho_s^{-1}x)$; se $s' = st$ con $t \in H$,

$$\begin{aligned}\rho'_{st} f(\rho_{st}^{-1}x) &= \rho'_s\rho'_t f(\rho_t^{-1}\rho_s^{-1}x) = \rho'_s\rho'_t f(\vartheta_t^{-1}\rho_s^{-1}x) = \\ &= \rho'_s\rho'_t{\rho'_t}^{-1} f(\rho_s^{-1}x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1}x).\end{aligned}$$

Definita per $x \in \rho_s W = W_\sigma$, si può estendere senza problemi per linearità alla somma diretta. Si deve dimostrare che F è G-equivariante: sia $x \in W_\sigma = \rho_s W$, $g \in G$, allora $\rho_g x \in \rho_g W_\sigma = \rho_{gs} W$ e

$$F(\rho_g x) = \rho'_{gs} f(\rho_{gs}^{-1}(\rho_g x)) = \rho'_g\rho'_s f(\rho_s^{-1}\rho_g^{-1}\rho_g x) = \rho'_g(\rho'_s f(\rho_s^{-1}x)) = \rho'_g F(x).$$

Poiché V è una somma diretta, questo rimane vero anche per le combinazioni lineari. □

Teorema 4.9. *Sia (W,ϑ) un H-modulo con $H \leq G$, allora esiste un unico G-modulo (a meno di isomorfismi) V indotto da W (si scrive $V = \operatorname{Ind}_H^G W$).*

Dimostrazione. **Esistenza.** Si può scrivere $W \cong \bigoplus_{i=1}^u W_i$ con W_i irriducibile e basta dimostrare che ogni irriducibile induce una rappresentazione, passando poi al caso generico grazie alla somma diretta. Sia quindi W irriducibile, allora $W \leq \mathrm{P}_H$, che induce la rappresentazione regolare di G. Quindi W è un sottospazio H-invariante di una rappresentazione che induce P_G e si è visto che $\sum_{r\in R}\rho_r W$ è un G-sottomodulo della rappresentazione regolare per G ed è indotta da W.

Unicità. Se V e V' sono indotti da (W,ϑ), si hanno le inclusioni $i\colon W \to V$ e $i'\colon W \to V'$ e per la proprietà universale esiste $F\colon V \to V'$ G-equivariante. Per la formula delle dimensioni, V e V' hanno la stessa dimensione. Siano $W_\sigma = \rho_s W$ e $W'_\sigma = \rho'_s W$; si ha

$$FW_\sigma = F\rho_s W = \rho'_s FW = \rho'_s W = W'_\sigma. \qquad \square$$

14.11.2006

Se (V,ρ) è indotta da (W,ϑ), per calcolare il carattere di ρ a partire da quello di ϑ si può usare la formula

$$\chi_V(g) = \sum_{\substack{r\in R\\ r^{-1}gr\in H}} \chi_W(r^{-1}gr);$$

questo perché la matrice di ρ_g si può dividere in blocchi quadrati grazie al fatto che $V = \bigoplus_{r\in R}\rho_r W$; inoltre g agisce sulle traslazioni come una permutazione, quindi su ogni riga e colonna c'è un solo blocco non nullo che è sulla diagonale se e solo se $gr = r$ o equivalentemente se $r^{-1}gr \in H$. Per ognuno di questi blocchi, la traccia è la traccia di $\bar{\rho}_g\colon \rho_r W \to \rho_r W$, la restrizione di ρ_g, e il diagramma

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\vartheta_{r^{-1}gr}"] \arrow[d, "\rho_r"'] & W \arrow[d, "\rho_r"] \\ \rho_r W \arrow[r, "\bar{\rho}_g"'] & \rho_r W \end{tikzcd}$$

è commutativo: $\bar{\rho}_g \rho_r w = \rho_{gr} w$ e $\rho_r \vartheta_{r^{-1}gr} w = \rho_r \rho_{r^{-1}gr} w = \rho_{gr} w$, quindi $\operatorname{Tr} \bar{\rho}_g = \operatorname{Tr} \vartheta_{r^{-1}gr} = \chi_W(r^{-1}gr)$.

Si può scrivere la formula anche come

$$\chi_V(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}gs \in H}} \chi_W(s^{-1}gs) = \frac{|Z(g)|}{|H|} \sum_{u \in H \cap C_g} \chi_W(u).$$

La prima è vera perché se $s = rt \in G$ con $r \in R$ e $t \in H$, $s^{-1}gs \in H$ se e solo se $r^{-1}gr \in H$, inoltre $\chi_W(s^{-1}gs) = \chi_W(t^{-1}r^{-1}grt) = \chi_W(r^{-1}gr)$ perché χ_W è una funzione di classe di H. La seconda si ottiene con un cambiamento di variabile: $u = s^{-1}gs$ con ogni elemento che viene contato $|Z(g)|$ volte.

Osservazione 4.10. Con un altro linguaggio, se W è un H-modulo, allora $\mathbb{C}[G]$ è un H-modulo; allora la rappresentazione indotta soddisfa

$$\operatorname{Ind}_H^G W \cong \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W.$$

Se W è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, in $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$ si può moltiplicare per gli scalari di $\mathbb{C}$ e non solo di $\mathbb{R}$ (*estensione degli scalari*); l'induzione funziona esattamente allo stesso modo, cioè estende gli scalari da H a $\mathbb{C}[G]$.

Siano E un G-modulo, V indotto da W; la proprietà universale dice che se $f \colon W \to E$ è H-equivariante, allora esiste $F \colon V \to E$ tale che il diagramma commuta. Questo si può riformulare dicendo che se $f \colon W \to \operatorname{Res}_H^G E$ è una mappa H-equivariante, allora esiste unica $F \colon V \to E$ mappa G-equivariante, dove $E = \operatorname{Res}_H^G E$ come spazi. Si ha una mappa I che realizza $f \mapsto F$ da $\operatorname{Hom}_H(W, \operatorname{Res}_H^G E)$ a $\operatorname{Hom}_G(V, E)$; I è un'applicazione lineare (per l'unicità, $\lambda_1 I(f_1) + \lambda_2 I(f_2)$ fa commutare il diagramma, quindi è $I(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$), inoltre si ha l'inversa: $f = F_{|W}$. In particolare, $\dim \operatorname{Hom}_H(W, \operatorname{Res}_H^G E) = \dim \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G W, E)$.

Definizione 4.11. Data $f \in X_H$, si definisce $\operatorname{Ind} f$ con

$$(\operatorname{Ind} f)(s) \coloneqq \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}st \in H}} f(t^{-1}st) \in \mathbb{C}.$$

Proposizione 4.12. *Si ha* $\operatorname{Ind} \chi_W = \chi_{\operatorname{Ind} W}$*; inoltre se* $f \in X_H$*,* $\operatorname{Ind} f \in X_G$*.*

Dimostrazione. La prima proprietà segue dalla formula già ricavata per il carattere dell'applicazione indotta. Per dimostrare che $\operatorname{Ind} f$ è funzione di classe, basta dimostrare che $\operatorname{Ind} \chi_W$ è funzione di classe per ogni H-modulo irriducibile W, perché questi caratteri formano una base per X_H, ma si è dimostrato prima che $\operatorname{Ind} \chi_W = \chi_{\operatorname{Ind} W}$, che è una funzione di classe. □

Definizione 4.13. Dati V_1, V_2 G-moduli, si definisce $\langle V_1, V_2 \rangle_G \coloneqq \dim \operatorname{Hom}_G(V_1, V_2)$.

Proposizione 4.14. *Si ha* $\langle V_1, V_2 \rangle_G = \langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle_G$.

Dimostrazione. Si considera $V_1' \oplus V_1'' \to V_2$: la dimensione di queste applicazioni è la somma delle dimensioni delle applicazioni del tipo $V_1' \to V_2$ e $V_1'' \to V_2$. Ancora, la dimensione delle applicazioni del tipo $V_1 \to V_2' \oplus V_2''$ è la somma delle dimensioni di quelle del tipo $V_1 \to V_2'$ e di quelle del tipo $V_1 \to V_2''$. Per questo motivo, basta dimostrare la formula per V_1 e V_2 irriducibili, ma per il lemma di Schur, $\dim \operatorname{Hom}_G(V_1, V_2) = \delta_{V_1, V_2} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle_G$. □

Osservazione 4.15. Se $\varphi \in X_G$ e si considera $\operatorname{Res}_H^G \varphi := \varphi_{|H}$, questa è ancora una funzione di classe per H; inoltre, $\chi_{\operatorname{Res}_H^G V} = \operatorname{Res}_H^G \chi_V$.

Teorema 4.16 (reciprocità di Frobenius)**.** *Se $\psi \in X_H$ e $\varphi \in X_G$, allora $\left\langle \psi, \operatorname{Res}_H^G \varphi \right\rangle_H = \left\langle \operatorname{Ind}_H^G \psi, \varphi \right\rangle_G$; in qualche senso, restrizione e induzione sono una l'aggiunta dell'altra.*

Dimostrazione. Per linearità, si può supporre $\psi = \chi_W$ con W un H-modulo irriducibile e $\varphi = \chi_E$ con E un G-modulo irriducibile. Sia inoltre $V = \operatorname{Ind}_H^G W$. Allora:

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi, \operatorname{Res}_H^G \varphi \right\rangle_H &= \left\langle \chi_W, \operatorname{Res}_H^G \chi_E \right\rangle_H = \left\langle \chi_W, \chi_{\operatorname{Res}_H^G E} \right\rangle_H = \\
&= \left\langle W, \operatorname{Res}_H^G E \right\rangle_H = \dim \operatorname{Hom}_H(W, \operatorname{Res}_H^G E) = \\
&= \dim \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G W, E) = \left\langle \operatorname{Ind}_H^G W, E \right\rangle_G = \\
&= \left\langle \chi_{\operatorname{Ind}_H^G W}, \chi_E \right\rangle_G = \left\langle \operatorname{Ind}_H^G \psi, \varphi \right\rangle_G .
\end{aligned}$$

□

Corollario 4.17. *Siano W irriducibile per H e E irriducibile per G, allora $\mu_W(\operatorname{Res}_H^G E) = \mu_E(\operatorname{Ind}_H^G W)$.*

21.11.2006

Sia W un H-modulo realizzato da ρ, si vuole studiare $\operatorname{Res}_K^G \operatorname{Ind}_H^G W$ come K-modulo. Si considerano le classi di equivalenza doppie $\frac{G}{K,H}$ (dove le classi sono date per moltiplicazione a sinistra per elementi di K e a destra per elementi di H); si ha $G = \bigcup_{s \in S} KsH$, dove S è un sistema di rappresentanti per le classi doppie. Dato $s \in S$, si definisce $H_s := sHs^{-1} \cap K \leq K$ e si può pensare a W come ad un H_s-modulo grazie a $\rho_s \colon H_s \to \operatorname{GL}(W)$ con $\rho_s(x) = \rho(s^{-1}xs)$ (si scriverà W_s al posto di W per distinguerli).

Proposizione 4.18. *Vale* $\operatorname{Res}_K^G \operatorname{Ind}_H^G W = \bigoplus_{s \in S} \operatorname{Ind}_{H_s}^K (W_s)$ *(come K-modulo).*

Dimostrazione. Sia $V(s) := \langle xW \mid x \in KsH \rangle \leq V$; si dimostra per prima cosa $V := \operatorname{Ind}_H^G W \cong \bigoplus_{s \in S} V(s)$. Sia R un sistema di rappresentanti delle classi di ${}^{G}/_{H}$, allora $KsH = \bigcup_{r \in KsH \cap R} rH$, infatti essendo saturo per H a destra deve essere unione disgiunta di classi destre di H. Ora,

$$V(s) = \sum_{x \in KsH} xW = \sum_{\substack{x \in rH \\ r \in KsH \cap R}} xW = \sum_{r \in KsH \cap R} rW$$

perché $hW = W$ per ogni $h \in H$ e da $V = \bigoplus_{r \in R} rW$, si ha $V(s) = \bigoplus_{r \in KsH \cap R} rW$, in quanto è una somma parziale di una somma diretta (l'induzione). Allora

$$V = \bigoplus_{r \in R} rW = \bigoplus_{\substack{r \in KsH \\ s \in S}} rW = \bigoplus_{s \in S} V(s).$$

Ognuno dei $V(s)$ è un K-modulo, perché K-stabile: moltiplicando per $k \in K$ si cambia sistema di rappresentanti ma non si esce da $V(s)$. Perciò, $\operatorname{Res}_K^G V = \bigoplus_{s \in S} V(s)$ come K-moduli e rimane da dimostrare $V(s) \cong_K \operatorname{Ind}_{H_s}^K (W_s)$. Si farà in due passi: prima si mostrerà che $V(s) \cong_K \operatorname{Ind}_{H_s}^K(sW)$ e poi si mostrerà l'isomorfismo $sW \cong_{H_s} W_s$.

Sia $x \in K$, allora $x(sW) = sW$ se e solo se $s^{-1}xsW = W$ se e solo se $s^{-1}xs \in H$ se e solo se $x \in sHs^{-1} \bigcap K = H_s$. Si ha $V(s) = \sum_{k\in K} ksW = \sum_{\sigma\in K/H_s} k_\sigma(sW)$ (si è preso un elemento k_σ di K per ogni classe σ rispetto a H_s); in realtà è una somma diretta: $V(s) = \bigoplus_{\sigma\in K/H_s} k_\sigma(sW) = \operatorname{Ind}_{H_s}^K sW$ con la struttura di H_s-modulo su sW che proviene dal fatto che $H_s \leq G$.

Infine, $sW \cong W_s$ come H_s-modulo: sia $w \in W_s$; questo viene mandato da $f\colon W_s \to sW$ in $sw \in sW$: per prima cosa f è isomorfismo di spazi vettoriali (sW è definito in quel modo), ma è anche isomorfismo di H_s-moduli, cioè che $f(\rho_s(x)w) = xf(w)$ per ogni $w \in W_s$ e $x \in H_s$ (la struttura su W_s è quella di H_s-modulo, non quella di G); ma $x = shs^{-1}$ con $h \in H$, quindi

$$\begin{aligned} f(\rho_s(x)w) &= f(s^{-1}xsw) = f(s^{-1}shs^{-1}sw) = f(hw) = \\ &= shw = shs^{-1}sw = x(sw) = xf(w). \end{aligned}$$ □

Corollario 4.19 (criterio di Mackey). *Sia $K = H$, allora $H_s = sHs^{-1} \cap H \leq H$, $\rho\colon H \to \mathrm{GL}(W)$, $\rho_s\colon H_s \to \mathrm{GL}(W)$, $\rho_s(x) = \rho(s^{-1}xs)$, $W_s = W$ come H_s modulo. Allora se $V = \operatorname{Ind}_H^G W$, V è irriducibile come G-modulo se e solo se W è irriducibile come H-modulo e per ogni $s \notin H$, ρ_s e $\operatorname{Res}_{H_s}^H(\rho)$ sono* disgiunte *come rappresentazioni di H_s (cioè non c'è una rappresentazione irriducibile che compare in entrambe o equivalentemente sono ortogonali).*

Dimostrazione. La rappresentazione V è irriducibile se e solo se $\langle V, V\rangle_G = 1$, ma $\langle V, V\rangle_G = \left\langle W, \operatorname{Res}_H^G V\right\rangle_H$ per la reciprocità di Frobenius. Ancora, per la proposizione

$$\langle V, V\rangle_G = \sum_{s\in S} \left\langle W, \operatorname{Ind}_{H_s}^H(W_s)\right\rangle_H = \sum_{s\in S} \left\langle \operatorname{Res}_{H_s}^H(\rho), \rho_s\right\rangle_{H_s}$$

per Frobenius. Ora, tra le classi laterali doppie HH c'è anche H, quindi si può porre $s = e$: il suo contributo nella somma è $\langle \rho, \rho\rangle_H \geq 1$. La somma fa 1 e questo accade se e solo se ρ è irriducibile e ρ_s e $\operatorname{Res}_{H_s}^H(\rho)$ sono ortogonali per $s \notin H$ (in particolare basta per un sistema di rappresentanti delle classi doppie tranne l'identità). □

Esempio 4.20. Si considera $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ e H il sottogruppo di Borel: $H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mid d = a^{-1} \right\}$. Si fissa un morfismo di gruppi $\omega\colon \mathbb{F}_q^\star \to \mathbb{C}^\star$ e si prende una rappresentazione di grado 1 di H: $\chi_\omega\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \omega(a)$. Si mostrerà che la rappresentazione indotta di χ_ω è irriducibile se e solo se $\omega^2 \neq 1$.

24.11.2006

Esercizio 4.21. Siano $G = D_n = \langle \sigma, \tau\rangle$, $H = \langle \tau\rangle \cong \mathbb{Z}_n$, $\omega_h\colon H \to \mathbb{C}^\star$ con $\omega_h(\tau) = e^{2\pi i h/n}$ e $V_h = \operatorname{Ind}_H^{D_n} \omega_h$; si chiede quando V_h è irriducibile.

Soluzione. Come classi laterali doppie (che per come è fatto il gruppo coincidono con le classi laterali) si possono prendere quelle rappresentate da e e da σ. Siano $H_\sigma = \sigma H\sigma^{-1} \cap H$, $\operatorname{Res}_\sigma \omega_h\colon H_\sigma \to \mathbb{C}^\star$ e $\omega_{h,\sigma}\colon H_\sigma \to \mathbb{C}^\star$, allora V_h è irriducibile se e solo se $\operatorname{Res}_\sigma \omega_h$ e $\omega_{h,\sigma}$ sono disgiunte e in particolare se e solo se sono distinte (in quanto ω_h è irriducibile, perché di grado 1). Ora, $H_\sigma = \sigma H\sigma^{-1} \cap H = \sigma\sigma^{-1}H^{-1} \cap H = H$, quindi $\operatorname{Res}_\sigma \omega_h = \omega_h$; d'altra parte, $\omega_{h,\sigma}\colon H \to \mathbb{C}^\star\colon \tau^r \mapsto \omega_h(\sigma^{-1}\tau^r\sigma) = \omega_h\tau^{-r} = \omega_{-h}\tau^r$. Di conseguenza V_h è irriducibile se e solo se $\omega_h \neq \omega_{-h}$ se e solo se $e^{2\pi i h/n} \neq e^{-2\pi i h/n}$ se e solo se $e^{4\pi i h/n} \neq 1$ se e solo se h non è 0 o $n/2$, se n è pari. □

Osservazione 4.22. Queste rappresentazioni hanno grado 2, perché l'indice di H in G è 2 e il grado di ω_h è 1. Si calcola il carattere di V_h su τ^r con $r \notin \{0, n/2\}$, tenendo presente che le classi di coniugio di τ^r sono τ^r e τ^{-r}:

$$\chi_{V_h}(\tau^r) = \frac{|Z(\tau^r)|}{|H|} \sum_{g \in H \cap C_s} \chi_{\omega_h}(g) = \frac{|H|}{|H|}(\omega_h(\tau^r) + \omega_h(\tau^{-r})) =$$
$$= e^{\frac{2\pi i}{n} hr} + e^{-\frac{2\pi i}{n} hr} = 2\cos\frac{2\pi}{n} hr.$$

Nel caso che $h = n/2$, $\chi_{V_h}(\tau^r) = 2e^{2\pi i/n hn/2} = 2e^{\pi i h} = 2(-1)^h = 2\cos 2\pi/n hn/2$. Ora, V_h è la rappresentazione indotta, quindi $V_h = \mathbb{C} \oplus \sigma\mathbb{C}$; come sistema di rappresentanti si possono prendere e e $\sigma\tau^r$; l'identità lascia fisse le due parti, quindi $\sigma\tau^r$ non può lasciarle fisse (altrimenti V_h sarebbe decomponibile). Quindi la matrice di $\rho_{\sigma\tau^r}$ rispetto alla base data da quella decomposizione è del tipo $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e si ha $\chi_{V_h}(\sigma\tau^r) = 0$. Quindi le rappresentazioni irriducibili del tipo V_h sono quelle per $0 < h < n/2$.

Se n è dispari, rimangono due rappresentazioni di grado 1: si manda τ in 1 e σ in ± 1; se n è pari, rimangono quattro rappresentazioni di grado 1.

Esempio 4.23. Si vogliono indurre allo stesso modo le rappresentazioni di $G = \mathrm{SL}_2(k)$ con $K = \mathbb{F}_q$, $q = p^n$ a partire da quelle di $H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \mid a \in K^\star, b \in K \right\}$. Sia $\omega\colon K^\star \to \mathbb{C}^\star$ un morfismo di gruppi, allora $\omega\colon H \to \mathbb{C}^\star$ con $\omega\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)\right) = \omega(a)$; si vuole trovare $V = \mathrm{Ind}_H^G \omega$.

Il gruppo G è il nucleo dell'applicazione determinante da $\mathrm{GL}_2(k)$ a $K^\star$, quindi

$$|G| = \frac{|\mathrm{GL}_2(k)|}{|K^\star|} = \frac{(q^2-1)(q^2-q)}{q-1} = q(q^2-1);$$

invece, $|H| = q(q-1)$, quindi $|G/H| = q+1$; si mostrerà che $G/H \cong \mathbb{P}^1$.

Si indicheranno gli elementi di $\mathbb{P}^1$ con $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$ (assumento che $\infty = p_\infty = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $u = p_u \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ u \end{smallmatrix}\right]$ e $0 = p = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$); $\mathrm{SL}_2(k)$ agisce su $\mathbb{P}^1$ in modo transitivo (a partire da p, avendo $s \neq \infty$, si ottiene $X_s p = p_s$ e $X_\infty p = p_\infty$, con $X_s := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $X_\infty := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$).

Quindi $S := \left\{ X_s \mid s \in \mathbb{P}^1 \right\}$ è un sistema di rappresentanti di G/H. Si hanno $H_s := X_s H X_s^{-1} \cap H$, $\psi_s := \mathrm{Res}_{H_s}^H \omega = \omega_{|H_s}$ e $\varphi_s\colon H_s \to \mathbb{C}^\star$ che manda Y in $\omega(X_s^{-1} Y X_s)$; si deve verificare che queste due rappresentazioni sono distinte (in quanto ancora sono di grado 1).

Ora,

$$H_s = \left\{ \begin{pmatrix} a & \frac{a^{-1}-a}{s} \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in K^\star \right\}, \qquad H_\infty = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \mid a \in K^\star \right\}.$$

La mappa ψ_s è $\omega_{|H_s}$, quindi

$$\begin{array}{cccc} \psi_s\colon & H_s & \to & \mathbb{C}^\star \\ & \begin{pmatrix} a & \frac{a^{-1}-a}{s} \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} & \mapsto & \omega(a) \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} \psi_\infty\colon & H_\infty & \to & \mathbb{C}^\star \\ & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} & \mapsto & \omega(a) \end{array};$$

invece,

$$\begin{array}{cccc} \varphi_s\colon & H_s & \to & \mathbb{C}^\star \\ & Y := \begin{pmatrix} a & \frac{a^{-1}-a}{s} \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} & \mapsto & \omega(X_s^{-1} Y X_s) = \omega(a^{-1}) \end{array},$$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\infty\colon & H_\infty & \to & \mathbb{C}^\star \\ & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} & \mapsto & \omega(a^{-1}) \end{array}.$$

Si ha che $\varphi_s \neq \psi_s$ per ogni $s \in K^\star \cup \{\infty\}$ se e solo se $\omega^2 \neq 1$, come nell'esercizio precedente.

Esercizio 4.24. Sia $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione irriducibile, allora $|\chi_V(s)| \leq n = \dim V$, con l'uguaglianza se e solo se $\rho(s)$ è un'omotetia. Inoltre, $\rho_s = \mathrm{Id}_V$ se e solo se $\chi_V(s) = n$.

Soluzione. Si può prendere una base in cui $\rho_s = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$; ma x_i sono radici dell'unità, quindi $|\chi_V(s)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n$; l'uguaglianza vale se e solo se tutti gli autovalori hanno lo stesso valore, cioè se $\rho_s = \lambda \mathrm{Id}_V$.

Se $\chi_V(s) = n$, per il punto precedente, $\rho_s = \lambda \mathrm{Id}_V$ e quindi $\chi_V(s) = n\lambda = n$, cioè $\lambda = 1$. □

5 Rappresentazioni di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$

28.11.2006

Teorema 5.1. *Sia $2 \nmid q$; un sistema di rappresentanti delle classi coniugate di $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ è dato da:*

- $a_x = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$ *(matrici centrali, $q-1$ classi da un elemento);*
- $b_x = \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$ *(unipotenti, $q-1$ classi da q^2-1 elementi);*
- $c_{x,y} = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right)$ *(split, con $x \neq y$ entrambi non nulli, $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ classi da q^2+q elementi);*
- $d_{x,y} = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ \varepsilon y & x \end{smallmatrix}\right)$ *(non split semisemplici, con $x \neq y$, $\frac{q(q-1)}{2}$ classi da q^2-q elementi).*

Dimostrazione. Le quattro classi di matrici non possono essere coniugate tra loro perché hanno polinomi caratteristici distinti, e all'interno delle classi non sono coniugate perché hanno radici distinte.

Presa una matrice A, il polinomio caratteristico di A, $p_A \in \mathbb{F}_q[t]$; poiché è di grado 2, le sue radici stanno di sicuro in $\mathbb{F}_{q^2}$; il numero ε è un generatore del gruppo, quindi $\sqrt{\varepsilon} \notin \mathbb{F}^q$, altrimenti ogni elemento sarebbe un quadrato ($a \in \mathbb{F}_q^\star$ implica $a = (\sqrt{\varepsilon})^{2h}$), ma questo è impossibile perché i quadrati sono esattamente la metà degli elementi. Per ottenere $\mathbb{F}_{q^2}$ si estende quindi $\mathbb{F}_q$ con $\sqrt{\varepsilon}$: sia $\tau\colon \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2}\colon a + b\sqrt{\varepsilon} \mapsto a - b\sqrt{\varepsilon}$ un generatore del gruppo di Galois di $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$. Allora se $p_A(a + b\sqrt{\varepsilon}) = 0$, anche $p_A(\tau(a + b\sqrt{\varepsilon})) = 0$, quindi i possibili casi sono: p_A ha due radici distinte in $\mathbb{F}_q$, ne ha due coincidenti, ne ha zero.

Se p_A ha due radici distinte x e y, allora $\det(A - xI) = 0$, perciò esiste $v \in \mathbb{F}_q^2 \setminus \{0\}$ tale che $Av = xv$; per lo stesso motivo, esiste w tale che $Aw = yw$; allora (v, w) è una base per $\mathbb{F}_q^2$ in cui $A = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right)$: A è split; l'ordine non è importante quindi ci sono $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ possibilità per scegliere x e y.

Se p_A ha una radice doppia, $p_A(t) = (t - x)^2$ con $x \neq 0$ (altrimenti A non sarebbe invertibile). In particolare, $\dim\ker(A - xI) \geq 1$. Se la dimensione è 2, $A = xI$ e A è centrale. Se la dimensione è 1, esiste $v \in \mathbb{F}_q^2 \setminus \{0\}$ tale che $Av = xv$; sia w un vettore che forma una base con v; secondo questa base, $A = \left(\begin{smallmatrix} x & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, ma dalla forma di p_A si sa che il determinante di A è x^2, perciò $b = x$; inoltre

$a \neq 0$ altrimenti la dimensione del kernel sarebbe 2. Si pone $w' = {}^{w}/_{a}$, così che $A = \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$: A è unipotente.

Se p_A non ha radici in $\mathbb{F}_q$, siano $x + y\sqrt{\varepsilon}$, $x - y\sqrt{\varepsilon}$ le radici di p_A, con $y \neq 0$. Si estendono gli scalari: sia $V = \mathbb{F}_q^2$; si pone $\bar{V} = \mathbb{F}_q(\sqrt{\varepsilon})^2$; un suo elemento è $z = \begin{pmatrix} \alpha+\beta\sqrt{\varepsilon} \\ \gamma+\delta\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \gamma \end{smallmatrix}\right) + \sqrt{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix} \beta \\ \delta \end{smallmatrix}\right) = u + \sqrt{\varepsilon}v$ con u e v univocamente determinati. Sia $\bar{A}\colon \bar{V} \to \bar{V}\colon u + \sqrt{\varepsilon}v \mapsto Au + \sqrt{\varepsilon}Av$; questa è un'applicazione $\mathbb{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$-lineare. I vettori $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ sono una base di V su $\mathbb{F}_q$ e anche una base per $\bar{V}$ su $\mathbb{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$; su questa base, la matrice di A e quella di $\bar{A}$ coincidono e in particolare $p_A = p_{\bar{A}}$. Allora $p_{\bar{A}}$ ha due radici distinte in $\mathbb{F}_q(\sqrt{\varepsilon})$; esiste $v_1 + \sqrt{\varepsilon}v_2 \in \mathbb{F}_q(\sqrt{\varepsilon})^2$, cioè $v_1, v_2 \in V$, autovettore di autovalore $x + \sqrt{\varepsilon}y$. Quindi $Av_1 + \sqrt{\varepsilon}Av_2 = \bar{A}(v_1 + \sqrt{\varepsilon}v_2) = (x + \sqrt{\varepsilon}y)(v_1 + \sqrt{\varepsilon}v_2) = xv_1 + \varepsilon yv_2 + \sqrt{\varepsilon}(yv_1 + xv_2)$, da cui $Av_1 = xv_1 + \varepsilon yv_2$ e $Av_2 = yv_1 + xv_2$ per l'unicità della decomposizione. Si deve mostrare che questi vettori sono linearmente indipendenti: se non lo fossero, $v_1 = av_2$ e $(ax + \varepsilon y)v_2 = xv_1 + \varepsilon yv_2 = Av_1 = Aav_2 = aAv_2 = ayv_1 + axv_2 = (a^2y + ax)v_2$, perciò $ax + \varepsilon y = a^2y + ax$ e $(\varepsilon - a^2)y = 0$, da cui $\varepsilon = a^2$ con $a \in \mathbb{F}_q$, assurdo. Quindi v_1 e v_2 formano una base in cui $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ \varepsilon y & x \end{smallmatrix}\right)$: A è non split semisemplice; se ne possono avere tante quante le possibili scelte di x e di y distinti ma y è determinato a meno del segno, quindi si hanno $\frac{q(q-1)}{2}$.

1.12.2006

In particolare il numero totale di classi di coniugio è q^2-1, quindi si dovranno trovare $q^2 - 1$ rappresentazioni irriducibili.

Per calcolare la cardinalità delle classi coniugate si calcola quella del centralizzatore per poi usare $|C(A)| = {}^{|G|}/_{|Z(A)|}$. Per le centrali, $Z(a_x) = G$, quindi $|C(a_x)| = 1$. Per le unipotenti, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) b_x = b_x \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ se e solo se $c = 0$, $a = d \neq 0$, quindi $|Z(b_x)| = q(q-1)$ e $|C(b_x)| = q^2 - 1$. Per le split, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) c_{x,y} = c_{x,y} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ se e solo se $bx = by$ e $cx = cy$ se e solo se $b = c = 0$, quindi $|Z(g)| = (q-1)^2$ e $|C(c_{x,y})| = q^2 + q$.

Per le nonsplit semisemplici si considera $K = \{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ \varepsilon y & x \end{smallmatrix}\right) \mid (x,y) \neq (0,0) \}$; questo è un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{F}_{q^2}^\star$ tramite l'isomorfismo $f(\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ \varepsilon y & x \end{smallmatrix}\right)) = x + \sqrt{\varepsilon}y$. Infatti, la condizione $(x,y) \neq (0,0)$ equivale a $\det\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ \varepsilon y & x \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ (se $x^2 - \varepsilon y^2 = 0$ e $y \neq 0$ allora $({}^{x}/_{y})^2 = \varepsilon$, assurdo) e si verifica che il prodotto di due matrici di K ha ancora la stessa forma; infine, essendo un gruppo finito non è necessario verificare che l'inverso appartenga ancora a K. Si ha che f è un morfismo di gruppi chiaramente suriettivo e la cardinalità è in entrambi $q^2 - 1$. Poiché $\mathbb{F}_{q^2}^\star$ è ciclico (è un sottogruppo finito della parte moltiplicativa di un campo), anche K è ciclico e $K = \langle D \rangle$. Ora, se $A \in Z(D)$, $AD = DA$, vale anche $AD^n = D^nA$, quindi $A \in Z(d_{x,y})$ per ogni $y \neq 0$; ma $K \leq Z(D) \leq Z(d_{x,y})$ per ogni $y \neq 0$, allora $|\varphi(d_{x,y})| \leq {}^{|G|}/_{|K|} = q^2 - q$. D'altra parte, $|G| = (q^2-1)(q^2-q) = \sum_C |C| \leq (q-1)1 + (q-1)(q^2-1) + {}^1/_2(q-1)(q-2)(q^2+q) + {}^1/_2 q(q-1)(q^2-q) = (q^2-1)(q^2-q)$. □

Si vogliono trovare ora le rappresentazioni irriducibili. Per quelle di grado 1 si può considerare $\det\colon G \to \mathbb{F}_q^\star$ e mandare $\mathbb{F}_q^\star$ in $\mathbb{C}^\star$. Siano U_α le composizioni $\alpha \circ \det$; il grado di U_α è irriducibile perché di dimensione 1 e sono tutte distinte perché il determinante è suriettivo; essendo di dimensione 1 sono anche non isomorfe. Inoltre, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ agisce anche su $\mathbb{P}^1\mathbb{F}_q$ e in modo doppiamente transitivo (si può mandare sempre una base di $\mathbb{F}_q^2$ in un'altra), quindi la rappresentazione associata alla permutazione delle rette di $\mathbb{P}^1\mathbb{F}_q$ ha dimensione $q+1$ (come le rette proiettive) e si scompone come $\bar{V} = B \oplus V$ con V irriducibile e di grado q.

Il carattere di V è il carattere di $\bar{V}$ meno uno, cioè il numero di punti fissi meno uno, che equivale al numero di autovettori meno uno: per le a_x sono tutte $(q+1)$, per le b_x sono 1, per le $c_{x,y}$ sono 2, per le $d_{x,y}$ nessuno. Si pone $V_\alpha = V \otimes U_\alpha$, ma si deve mostrare che queste sono irriducibili:

$$\|\chi_{V_\alpha}\|^2 = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{x\neq 0} q^2 \left|\alpha(x)^2\right|^2 + 0 + (q^2+q)\sum_{\substack{x\neq y\\ xy\neq 0}} |\alpha(x)\alpha(y)|^2 + \right.$$
$$\left. + (q^2-q)\sum_{x,y\neq 0}\left|\alpha(x^2-\varepsilon y^2)\right|^2\right),$$

ma spostando il fattore q dalla prima somma alla seconda risulta che è uguale a $\|\chi_{U_\alpha}\|^2 = 1$. Inoltre V_α e V_β sono distinte: calcolate su $c_{x,1}$ con $x \neq 1$, i caratteri sono rispettivamente $\alpha(x)$ e $\beta(x)$.

Sia $B = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & c\end{smallmatrix}\right) \mid ac \neq 0\} \leq G$ il sottogruppo di Borel; $|B| = q(q-1)$ e si può considerare l'applicazione $\varphi_{\alpha,\beta}$ data da:

$$\begin{array}{ccccccc} B & \longrightarrow & (\mathbb{F}_q^\star)^2 & \xrightarrow{(\alpha,\beta)} & (\mathbb{C}^\star)^2 & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & \mathbb{C}^\star \\ & & & & & & \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & c\end{smallmatrix}\right) & \longrightarrow & (a,c) & \longrightarrow & (\alpha(a),\beta(c)) & \longrightarrow & \alpha(a)-\beta(c)\end{array}$$

e sia $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ $\mathbb{C}$ come B-modulo dato da $\varphi_{\alpha,\beta}$; il suo grado è 1 e sia $W_{\alpha,\beta} := \operatorname{Ind}_B^G \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Il grado di $W_{\alpha,\beta}$ è $C_G(B) = q+1$.

Lemma 5.2. *La decomposizione in classi laterali doppie di G rispetto a B è $G = B \cup BXB$ con $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$.*

Dimostrazione. La tesi è vera se e solo se $BXB = G \setminus B$; $BXB = \left(\begin{smallmatrix} bd & be-af\\ cd & ce\end{smallmatrix}\right)$. Innanzitutto $BXB \subseteq G \setminus B$: se questo non fosse vero, $cd = 0$ e sia che $c = 0$ o che $d = 0$, è assurdo. Viceversa, sia $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in G \setminus B$ (equivale a dire $\gamma \neq 0$); siano $a = c = 1$, allora se per assurdo $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} bd & be-f\\ d & e\end{smallmatrix}\right)$, si avrebbe $d = \gamma$, $e = \delta$, $b = \alpha/\gamma$, $f = \beta - \delta - \alpha\delta/\gamma$ e si arriva ancora all'assurdo. ☐

Osservazione 5.3. Siano $\alpha \neq \beta$ e $\gamma \neq \delta$; allora $W_{\alpha,\beta}$ è irriducibile e $W_{\alpha,\beta} \cong W_{\gamma,\delta}$ se e solo se $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$. Infatti $\langle W_{\alpha,\beta}, W_{\gamma,\delta}\rangle = \left\langle \operatorname{Ind}_B^G \mathbb{C}_{\alpha,\beta}, W_{\alpha,\beta}\right\rangle = \left\langle \mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \operatorname{Res}_B^G \operatorname{Ind}_B^G \mathbb{C}_{\gamma,\delta}\right\rangle$. Per il lemma, $\operatorname{Res}_B^G \operatorname{Ind}_B^G \mathbb{C}_{\alpha,\beta} = \bigoplus s \in S \operatorname{Ind}_{B_s}^B \varphi_{\alpha,\beta}^s$: per $s = I$, $B_s = B$ e $\varphi_{\alpha,\beta}^s = \varphi_{\alpha,\beta}$, quindi $\operatorname{Res}_{B_s} \varphi_{\alpha,\beta} = \varphi_{\alpha,\beta}$; per $s = X$, $B_X = XBX^{-1} \cap B = \{\left(\begin{smallmatrix} c & 0\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right) \mid =\} D \cong (\mathbb{F}_q^\star)^2$. Si ha $\varphi_{\alpha,\beta}^X(\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & c\end{smallmatrix}\right)) = \varphi_{\alpha,\beta}\left(X\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & c\end{smallmatrix}\right)X^{-1}\right) = \varphi_{\alpha,\beta}(\left(\begin{smallmatrix} c & 0\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right))$. Di conseguenza $\operatorname{Res}_X \varphi_{\alpha,\beta}(\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & c\end{smallmatrix}\right)) = \alpha(a)\beta(c)$. Quindi $\langle W_{\alpha,\beta}, W_{\gamma,\delta}\rangle = \left\langle \mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \operatorname{Res}_B^G \operatorname{Ind}_B^G \mathbb{C}_{\gamma,\delta}\right\rangle_B = \left\langle \mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \mathbb{C}_{\gamma,\delta}^1\right\rangle_B + \left\langle \mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \operatorname{Ind}_D^B \mathbb{C}_{\gamma,\delta}^X\right\rangle_B = \delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\delta} + \left\langle \operatorname{Res}_D^B \mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \mathbb{C}_{\gamma,\delta}^X\right\rangle_D = \delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\delta} + \langle \mathbb{C}_{\alpha,\beta}, \mathbb{C}_{\delta,\gamma}\rangle_D = \delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\delta} + \delta_{\alpha,\delta}\partial_{\beta,\gamma}$. In definitiva si ha che $\|W_{\alpha,\beta}\|^2 = 1$ e $\langle W_{\alpha,\beta}, W_{\gamma,\delta}\rangle = 1$ se coincidono o 0 se sono distinte.

5.11.2006

Si deve calcolare il carattere di $W_{\alpha,\beta}$: $\chi_{W_{\alpha,\beta}}(A) = \sum_{\substack{X \in R \\ X^{-1}AX \in B}} \chi_{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}(X^{-1}AX)$.

- Per $A = a_x$, la seconda condizione della somma è sempre soddisfatta perché a_x è una matrice centrale e commuta con tutto; in particolare si ha $\chi_{W_{\alpha,\beta}}(a_x) = (q+1)\alpha(x)\beta(x)$, perché $X^{-1}a_xX = a_x$.

- Per b_x, $X_r^{-1}b_xX_r = \left(\begin{smallmatrix} x+r & 1 \\ -r^2 & x+r \end{smallmatrix}\right) \in B$ se e solo se $r = 0$; all'infinito $X_\infty^{-1}b_xX_\infty = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right) \notin B$; di conseguenza $\chi_{W_{\alpha,\beta}}(b_x) = \alpha(x)\beta(x)$.

- Per $c_{x,y}$, $X_r^{-1}c_{x,y}X_r = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ r(x-y) & y \end{smallmatrix}\right) \in B$ se e solo se $r = 0$ (perché $x \neq y$); all'infinito, $X_\infty^{-1}c_{x,y}X_\infty = \left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$, quindi $\chi_{W_{\alpha,\beta}}(c_{x,y}) = \alpha(x)\beta(y) + \alpha(y)\beta(x)$.

- Per $d_{x,y}$, $X_r^{-1}d_{x,y}X_r = \left(\begin{smallmatrix} x+\varepsilon y & y \\ y(\varepsilon-r^2) & x-\varepsilon y \end{smallmatrix}\right) \notin B$ perché ε non è un quadrato e $y \neq 0$. All'infinito $X_\infty^{-1}d_{x,y}X_\infty = \left(\begin{smallmatrix} x & -\varepsilon y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right) \notin B$; perciò $\chi_{W_{\alpha,\beta}}(d_{x,y}) = 0$.

Le rappresentazioni $W_{\alpha,\beta}$ irriducibili e distinte sono tante quante le coppie (α,β) con $\alpha \neq \beta$ non nulli e a meno dell'ordine; si era visto inoltre che $\|W_{\alpha,\alpha}\|^2 = 2$, quindi $W_{\alpha,\alpha}$ si scompone come due rappresentazioni irriducibili. Ma si osserva che $\chi_{W_{\alpha,\alpha}} = \chi_{V_\alpha} + \chi_{U_\alpha}$, quindi si ha la decomposizione $W_{\alpha,\alpha} \cong V_\alpha \oplus U_\alpha$. Inoltre si osserva che $W_{\alpha,\beta}$ è isomorfa a $W_{\beta,\alpha}$.

Finora si sono trovate $2(q-1) + {}^1\!/\!{}_2(q-1)(q-2) = {}^1\!/\!{}_2(q-1)(q+2)$. Ne rimangono da trocare ${}^1\!/\!{}_2q(q-1)$. Si riprende il sottogruppo ciclico $K \cong \mathbb{F}_{q^2}^\star$ con $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ \varepsilon y & x \end{smallmatrix}\right) \mapsto x+\sqrt{\varepsilon}y$. Si considera $K^+ := K \cup \{0\} \cong \mathbb{F}_{q^2}$. Sia φ una rappresentazione di grado 1 di $\mathbb{F}_{q^2}^\star$; allora $\operatorname{Ind}\varphi := \operatorname{Ind}_K^{\mathbb{F}_{q^2}^\star} \varphi$ ha dimensione $\frac{(q^2-1)(q^2-q)}{q^2-1} = q(q-1)$ e si ha $\chi_{\operatorname{Ind}\varphi}(a) = {}^1\!/\!{}_{|K|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}ax \in K}} \varphi(x^{-1}ax)$:

- Per a_x si ha $\chi_{\operatorname{Ind}\varphi}(a_x) = q(q-1)\varphi(a_x)$ perché a_x è centrale.

- Per b_x, per semplificare i conti si osserva che se $A \in K$, $\lambda A \in eK$, quindi si può assumere che il determinante di X sia 1; si ha
$$X^{-1}b_xX = \begin{pmatrix} cdx + cd - bcx & d^2 \\ -c^2 & -cdx - cd + adx \end{pmatrix} \in K$$
se e solo se $cd = 0$ e $-c^2 = \varepsilon d^2$ se e solo se $c = d = 0$, ma questo non avviene mai perché X non sarebbe invertibile, quindi $\chi_{\operatorname{Ind}\varphi}(b_x) = 0$.

- Per $c_{x,y}$,
$$X^{-1}c_{x,y}X = \begin{pmatrix} xcd - ybc & bd(x-y) \\ ac(y-x) & ycd - xbc \end{pmatrix} \in K$$
se e solo se $bc + ad = 0$ e $\varepsilon bd + ac = 0$, considerando che $x \neq y$. Moltiplicando la prima per a e la seconda per b si ottiene, eventualmente aggiungendo soluzioni, che $(\varepsilon b^2 - a^2)d = 0$; questo si verifica se e solo se $d = 0$, perché ε non è un quadrato. Ritornando al sistema precedente, o $b = 0$ o $c = 0$: in entrambi i casi X non sarebbe invertibile, perciò $\chi_{\operatorname{Ind}\varphi}(c_{x,y}) = 0$.

- Per $d_{x,y}$ non si usa il calcolo diretto perché troppo complicato; si considera K^+; questo è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_q$ di dimensione 2, quindi le matrici $(2,2)$ su $\mathbb{F}_q$, che sono uno spazio vettoriale di dimensione 4 su $\mathbb{F}_q$, hanno dimensione 2 su K^+. In particolare si dimostra direttamente con il calcolo che, per ogni $X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, esistono uniche $A, B \in K^+$ tali che $X = A + JB$, dove $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Se $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $XJ = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ c & -d \end{smallmatrix}\right)$, mentre $JX =$ *12.12.2006*
  $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -c & -d \end{smallmatrix}\right)$, quindi $XJ = J\bar{X}$, dove $\bar{X} = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right)$. Se X è invertibile, $X = A + JB$ e $\Delta = \det X$, si ha $\Delta X^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ e ripercorrendo il sistema si trova che $\Delta X^{-1} = \bar{A} - JB$. Se $X \in K^+$, per l'unicità di A e B, $B = 0$; ora, $D \coloneqq d_{x,y} \in K^+$, quindi

  $$\chi_{\operatorname{Ind}\varphi}(d_{x,y}) = \frac{1}{|K|} \sum_{\substack{X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \\ X^{-1}DX \in K}} \varphi(X^{-1}DX);$$

  $X^{-1}DX \in K$ se e solo se $(\bar{A} - JB)D(A + JB) \in K$; ma A, B, D commutano e J commuta con la regola vista, quindi

  $$\begin{aligned}(\bar{A} - JB)D(A + JB) &= \bar{A}DA - JBDA + \bar{A}DJB - JBDJB = \\ &= \bar{A}DA - \bar{D}\bar{B}B + J(-BDA + A\bar{D}B) = \\ &= \bar{A}DA - \bar{D}\bar{B}B + JAB(\bar{D} - D),\end{aligned}$$

  che appartiene a K se e solo se $AB(\bar{D} - D) = 0$. Ma questi sono elementi di un campo; $\bar{D} = D$ implica $y = 0$, che è impossibile; se $A = 0$, $X \in K$, mentre se $B = 0$, $X \in JK$. Di conseguenza

  $$\begin{aligned}\chi_{\operatorname{Ind}(\varphi)}(D) &= \frac{1}{|K|} \sum_{X \in K} (\varphi(X^{-1}DX) + \varphi(X^{-1}JDJX)) = \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{X \in K} (\varphi(D) + \varphi(\bar{D})) = \\ &= \varphi(x + \sqrt{\varepsilon}y) + \varphi(x - \sqrt{\varepsilon}y).\end{aligned}$$

  Ora, $(x + \sqrt{\varepsilon}y)^q = x^q + \sqrt{\varepsilon}^q y^q = x + \sqrt{\varepsilon}^q y$; $\left(\sqrt{\varepsilon}^q\right)^2 = \varepsilon$, quindi $\sqrt{\varepsilon}^q = \pm\sqrt{\varepsilon}$, ma non può essere col segno positivo perché altrimenti $\sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{F}_q$. Quindi $\chi_{\operatorname{Ind}(\varphi)}(\zeta) = (\varphi + \varphi^q)(\zeta)$.

Se si prende al posto di φ, φ^q, le rappresentazioni indotte sono isomorfe, infatti $\varphi^q(x) = \varphi(x^q) = \varphi(x)$ e $(\varphi^q + \varphi^{q^2})(x + \sqrt{\varepsilon}y) = (\varphi^q + \varphi)(x + \sqrt{\varepsilon}y)$. Viceversa, se $\operatorname{Ind}\varphi = \operatorname{Ind}\tau$, allora $\varphi(\gamma) = \omega \in \mathbb{C}^\star$ e $\tau(\gamma) = \eta \in \mathbb{C}^\star$, con γ un generatore di $\mathbb{F}_{q^2}^\star$, ω e η radici $(q^2 - 1)$-esime dell'unità. Allora se il carattere, facendo il sistema si ottiene $\varphi = \tau^q$, che è equivalente a $\tau = \varphi^q$.

Se $\varphi = \varphi^q$ e $\varphi(\gamma) = \omega$, allora $\omega = \omega^q$, cioè $\omega^{q-1} = q$, quindi ci sono $(q-1) + {}^1\!/_2(q^2 - 1 - (q-1)) = (q-1) + {}^1\!/_2 q(q-1)$, ma si vedrà che non sono irriducibili. *15.12.2006*

Definizione 5.4. Sia G un gruppo finito, V_i le sue rappresentazioni irriducibili, allora $\chi = \sum_i c_i \chi_{V_i}$ con $c_i \in \mathbb{Z}$ si dice *carattere virtuale.*

Esercizio 5.5. Se $\|\chi\| = 1$ e $\chi(e) > 0$, allora χ è il carattere di una rappresentazione irriducibile.

Soluzione. Se la norma è 1 allora i coefficienti sono tutti nulli tranne uno che può essere ± 1; se $\chi(e) > 0$ può essere solo 1. $\square$

Si definisce il carattere virtuale $\chi_\varphi = \chi_{V_1 \otimes W_{\alpha,1}} - \chi_{W_{\alpha,1}} - \chi_{\mathrm{Ind}\,\varphi}$ con $\alpha = \varphi_{|\mathbb{F}_q^\star}$. Si calcola il carattere e si ottiene

$$\|\chi_\varphi\| = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{x \in \mathbb{F}_q^\star} (q-1)^2 + \sum_{x \in \mathbb{F}_q^\star} (q^2-1) + \sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^\star \\ y \sim -y}} \left|\varphi(x + \sqrt{\varepsilon} y) + \varphi(x - \sqrt{\varepsilon} y)\right|^2 (q^2 - q)\right) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\left((q-1)^3 + (q-1)(q^2-1) + \frac{q^2-q}{2} \sum_{(x,y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^\star} \left|\varphi(x + \sqrt{\varepsilon} y) + \varphi(x - \sqrt{\varepsilon} y)\right|^2\right);$$

se l'ultima somma si indica con S, si ha

$$\begin{aligned} S = &\sum_{(x,y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^\star} \Big(\left|\varphi(x + \sqrt{\varepsilon} y)\right|^2 + \left|\varphi - \sqrt{\varepsilon} y\right|^2 + \varphi(x + \sqrt{\varepsilon} y)\overline{\varphi(x - \sqrt{\varepsilon} y)} + \\ &\quad + \varphi(x - \sqrt{\varepsilon} y)\overline{\varphi(x + \sqrt{\varepsilon} y)}\omega\Big) = \\ = &\sum_{(x,y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^\star} \Big(1 + 1 + \varphi(x + \sqrt{\varepsilon} y)\overline{\varphi(x - \sqrt{\varepsilon} y)}\Big) = \\ = &\ 2q(q-1) + \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}^\star \setminus \mathbb{F}_q^\star} \varphi(\alpha)\overline{\varphi(\alpha^q)} = \\ = &\ 2q(q-1) - 2\sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q^\star} |\varphi(\alpha)|^2 + 2\sum_{\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}^\star} \varphi(\alpha)\overline{\varphi(\alpha^q)}; \end{aligned}$$

ancora, l'ultima somma si denota con S_0 e vale

$$S_0 = \sum_{h=0}^{q^2-2} \varphi(\gamma^h)\overline{\varphi(\gamma^{q+h})} = \sum_{h=0}^{q^2-2} \omega^h \omega^{-q-h} = \sum_{h=0}^{q^2-2} \left(\omega^{1-q}\right)^h.$$

Si è già detto che se $\varphi \neq \varphi^q$, ω è una radice q^2-1-esima dell'unità e non è una radice $q-1$-esima. Quindi $S = 2q(q-1) - 2(q-1) = 2(q-1)^2$ e

$$\begin{aligned} |\chi_\varphi|^2 &= \frac{1}{|G|}\left((q-1)^2 + (q-1)^2(q+1) + \frac{q(q-1)}{2} 2(q-1)^2\right) = \\ &= \frac{(q-1)^2}{|G|}(q - 1 + q + 1 + q^2 - q) = \frac{(q-1)^2 q(q+1)}{|G|} = 1 \end{aligned}$$

Infine, non ci sono ripetizioni con le vecchie rappresentazioni perché è diverso il grado, inoltre non sono uguali tra loro perché in particolare se lo fossero, su $\mathbb{F}_q$ farebbero entrambe α, allora sarebbero uguali anche le indotte.

$$
\begin{array}{c}
\\
\scriptstyle (q-1)\times U_\alpha \\
\scriptstyle (q-1)\times V_\alpha \\
\scriptstyle \frac{(q-1)(q-2)}{2}\times W_{\alpha,\beta} \\
\scriptstyle \mathrm{Ind}\,\varphi \\
\scriptstyle V_\varphi
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\overset{\scriptstyle (q-1)\times 1}{\scriptstyle a_x} & \overset{\scriptstyle (q-1)\times(q^2-1)}{\scriptstyle b_x} & \overset{\scriptstyle \frac{(q-1)(q-2)}{2}\times(q^2+q)}{\scriptstyle c_{x,y}} & \overset{\scriptstyle \frac{q(q-1)}{2}\times(q^2-q)}{\scriptstyle d_{x,y}}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
\alpha(x)^2 & \alpha(x)^2 & \alpha(x)\alpha(y) & \alpha(x^2-\varepsilon y^2) \\
q\alpha(x)^2 & 0 & \alpha(x)\alpha(y) & -\alpha(x^2-\varepsilon y^2) \\
(q+1)\alpha(x)\beta(x) & \alpha(x)\beta(x) & \alpha(x)\beta(y)+\alpha(y)\beta(x) & 0 \\
q(q-1)\varphi(x) & 0 & 0 & (\varphi+\varphi^q)(x+\sqrt{\varepsilon}y) \\
(q-1)\alpha(x) & -\alpha(x) & 0 & -(\varphi(x+\sqrt{\varepsilon}y)+\varphi(x-\sqrt{\varepsilon}y))
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

6 Rappresentazioni di S_n mediante $\mathbb{C}[S_n]$

Si sa che $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{V \text{ irriducibile}} V^{\dim V}$ e che in $\mathbb{C}[G]$ le rappresentazioni irriducibili corrispondono agli ideali minimali sinistri.

Data una tabella di Young con n posti, un riempimento è scrivere in ogni casella un numero da 1 a n; se T è una tabella riempita, $R_T \leq S_n$ è il sottogruppo che mantiene le righe e si dice gruppo delle permutazioni orizzontali. Allo stesso modo, il gruppo delle permutazioni verticali è C_T. Si definisce ancora $s_T := \sum_{\sigma \in R_T} \sigma$ il simmetrizzatore delle righe e $a_T := \sum_{\sigma \in C_T} (-1)^\sigma \sigma$ l'antisimmetrizzatore delle colonne e infine il simmetrizzatore di Young $y_t := s_T a_T$. Sono tutti elementi dell'algebra gruppo $\mathbb{C}[S_n]$. Si definisce la rappresentazione V_λ come $\mathbb{C}[S_n] y_T$; si vedrà che se la tabella è la stessa, riempimenti diversi danno rappresentazioni isomorfe.

Ad esempio, per S_n, se la tabella è del tipo (n), $R_T = S_n$ e $C_T = \{e\}$, quindi $s_T = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$ e $a_T = 1$, da cui $y_T = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$. Questa è la rappresentazione banale: indatti se $\tau \in S_n$, $\tau y_T = \tau \sum_{\sigma \in S_n} \sigma = \sum_{\sigma \in S_n} \tau\sigma = \sum_{\eta \in S_n} \eta = y_T$; si ha perciò $V_{(4)} = \mathbb{C}[S_n] y_T = \mathbb{C} y_T$, rappresentazione di grado 1 che agisce come la rappresentazione banale. Per una tabella del tipo $(1, \dots, 1)$ procedendo allo stesso modo si ha la rappresentazione alterna.

Data un tipo di tabella, si ha una formula che dà il grado della rappresentazione associata: $\dim V_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in T} h(c)}$, dove c è una casella e h è la funzione "hook": il numero di caselle che si incontrano andando a destra o in basso.

Definizione 6.1. Dato un anello semisemplice con unità A, $u \in A$ è *idempotente* se $u^2 = u$.

Lemma 6.2. *Dato A anello semisemplice con unità, $I \leq A$ ideale sinistro, allora esiste $u \in A$ idempotente tale che $I = Au$.*

Dimostrazione. Da $I \leq A$ si sa che esiste $J \leq A$ ideale sinistro tale che $A = I \oplus J$, quindi esistono unici $u \in I$, $v \in J$ tali che $1 = u + v$. Chiaramente $Au \subseteq I$, d'altra parte se $a \in I$, $a = a1 = a(u + v) = au + av$, cioè $a - au = av \in J \cap I$, allora $a = au \in Au$. Ancora, $u = u1 = u^2 + uv$ e allo stesso modo si mostra che $u = u^2$; u si chiama *unità generatrice dell'ideale.* $\square$

Corollario 6.3. *Dato A anello semisemplice con unità, $A = I \oplus J$, allora $I = Au$, $J = Av$ con u e v idempotenti e $Iv = Ju = 0$.*

Proposizione 6.4. *Sia A un anello semisemplice con unità, $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k$ ideali sinistri allora esistono $u_1, \dots, u_k$ unità generatrici per $I_1, \dots, I_k$ tali che $I_i u_j = 0$ per $i \neq j$.*

Dimostrazione. Si scrive $A = I_1 \oplus J$ con $J = I_2 \oplus \cdots \oplus I_k$ e si usa il corollario; si vorrebbe fare la stessa cosa con J, ma non è detto che si possa; allora $J = I_2 \oplus L$ con $L = I_3 \oplus \cdots \oplus I_k$ e si ripete il procedimento usando u, l'unità generatrice di J, invece che I_1. □

19.12.2006

Definizione 6.5. Un idempotente u si dice *primitivo* se non esistono $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$ idempotenti tali che $u = u_1 + u_2$ e $u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0$.

Lemma 6.6. *Siano A semisemplice con unità, u idempotente, allora u è primitivo se e solo se Au è un ideale minimale.*

Proposizione 6.7. *Siano A una K-algebra semisemplice, u idempotente. Se $\dim_K uAu = 1$ allora u è primitivo.*

Dimostrazione. Per assurdo, se $u = u_1 + u_2$ e $u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0$ e $u_i^2 = u_i$, allora $uu_1u = (u_1 + u_2)u_1(u_1 + u_2) = u_1 = \lambda u$. Inoltre $u \neq 0$ implica che $uAu \neq 0$. Allora $\lambda^2 u^2 = \lambda^2 u = u_1^2 = \lambda u$, perciò $\lambda(\lambda - 1)u = 0$, allora se $\lambda = 0$, $u_1 = 0$, assurdo; se $\lambda = 1$, $u_1 = u$ e $u_2 = 0$, assurdo. □

Osservazione 6.8. Se $g \in S_n$, allora $R_{gT} = gR_Tg^{-1}$, $C_{gT} = gC_Tg^{-1}$, $s_{gT} = gs_Tg^{-1}$, $a_{gT} = ga_Tg^{-1}$, $y_{gT} = gy_Tg^{-1}$; inoltre $s_T = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma$, $a_T = \sum_{\sigma \in C_T} (-1)^\sigma \sigma$ e $y_T = s_T a_T$.

Lemma 6.9. *Siano $p \in R_T$ e $q \in C_T$; se i e j stanno sulla stessa riga di T, allora i e j non stanno sulla stessa colonna di pqT; viceversa, se $g \in S_n$ è tale che vale la proprietà precedente con gT, allora esistono $p \in R_T$ e $q \in C_T$ tali che $g = pq$.*

Lemma 6.10. *Si ha $py_T(-1)^q q = y_T$ per ogni $p \in R_T$ e $q \in C_T$, e y_T è l'unico che soddisfa questa proprietà a meno di scalari.*

Lemma 6.11. *Si ha $y_T A y_T \subseteq \mathbb{C} y_T$.*

Dimostrazione. Sia $a \in A$, $x = y_T a y_T$, allora $px(-1)^q q = py_T a y_T (-1)^q q = ps_T a_T a s_T a_T (-1)^q q = s_T a_T a s_T a_T = y_T a y_T = x$. □

Lemma 6.12. *Sia $f \colon \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n] \colon a \to ay_T$; allora $\operatorname{Tr} f = n!$.*

Dimostrazione. Si indica con V_T l'immagine di f, cioè $\mathbb{C}[S_n]y_T$. Si ha $f = \sum_{\substack{p \in R_T \\ q \in C_T}} (-1)^q \mu_{pq}$, dove μ è la moltiplicazione a destra; è sufficiente quindi calcolare μ_{pq}, ma questa è una traccia di una moltiplicazione a destra che è sempre nulla a meno che $pq = \mathrm{Id}$, cioè $p = q^{-1}$ e p di conseguenza stabilizzerebbe sia le righe che le colonne, cioè $p = q = \mathrm{Id}$ e $\operatorname{Tr} f = \operatorname{Tr} \mathrm{Id} = n!$. □

Ora, $y_T = \lambda_T y_T$ e $f_{|V_T} = \lambda_T \mathrm{Id}_{V_T}$, perciò $n! = \operatorname{Tr} f = \lambda_T \dim V_T$, da cui $\lambda_T \neq 0$. Sia $u_T \coloneqq \lambda_T^{-1} y_T$, e $u_T^2 = u_T$: è idempotente e $\dim u_T A u_T = 1$ quindi è primitivo, da cui si ha V_T rappresentazione irriducibile.