

Appunti del corso:  
Algebra IV  
Prof. Claudia Menini

Stefano Maggiolo

2005/2006

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Funtori aggiunti</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Categorie abeliane</b>	<b>19</b>
3.1	Kernel . . . . .	19
3.2	Prodotti . . . . .	25
3.3	Limiti . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Funtori derivati</b>	<b>35</b>
4.1	Complessi . . . . .	35
4.2	Omotopie . . . . .	41
4.3	Risoluzioni proiettive . . . . .	43
4.4	Funtori derivati . . . . .	46
4.5	Funtori derivati destri . . . . .	53

# 1 Introduzione

**Definizione 1.0.1.** Una *categoria*  $\mathcal{C}$  consiste in una classe di oggetti  $\text{Ob}\{\mathcal{C}\}$  dotata, per ogni coppia  $(C_1, C_2)$  di oggetti, di un insieme  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\}$  dei morfismi di  $C_1$  in  $C_2$  e per ogni tripla  $(C_1, C_2, C_3)$  di un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \circ: & \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_2, C_3\} & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_3\} \\ & (f, g) & \longmapsto gf \end{array};$$

inoltre questi enti devono soddisfare i seguenti assiomi:

- se  $(C_1, C_2) \neq (C_3, C_4)$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_3, C_4\}$ ;
- se  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_3, C_4\}$ ,  $h(gf) = (hf)g$ ;
- per ogni  $C \in \mathcal{C}$ , esiste  $1_C \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C, C\}$  tale che per ogni  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C, C'\}$ ,  $h1_C = h = 1_{C'}f$ .

Se  $C \in \text{Ob}\{\mathcal{C}\}$ , si scriverà  $C \in \mathcal{C}$ ; si dirà che un morfismo  $C_1 \xrightarrow{f} C_2$  è un isomorfismo se esiste un morfismo  $C_2 \xrightarrow{g} C_1$  tale che  $fg = 1_{C_2}$  e  $gf = 1_{C_1}$ .

*Esempio 1.0.2.* Gli insiemi con le funzioni come morfismi formano la categoria *Ins* degli insiemi; si può formare una categoria per ogni struttura algebrica, ponendo come oggetti tutti gli insiemi dotati di quella struttura algebrica e come morfismi i morfismi della struttura: si ottengono in questo modo la categoria dei gruppi, degli anelli, dei  $R$ -moduli destri e sinistri e così via.

**Definizione 1.0.3.** Una categoria si dice *piccola* se gli oggetti formano un insieme; *discreta* se per  $C_1 = C_2$  si ha  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} = \{1\}_{C_1}$ , altrimenti  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} = \emptyset$ ; data una categoria  $\mathcal{C}$ , la categoria *opposta* è  $\mathcal{C}^\circ$  dove  $\text{Ob}\{\mathcal{C}^\circ\} = \text{Ob}\{\mathcal{C}\}$  e  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}\{C_1, C_2\} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_2, C_1\}$ .

**Definizione 1.0.4.** Una *sottocategoria*  $\mathcal{D}$  di una categoria  $\mathcal{C}$  è una categoria tale che  $\text{Ob}\{\mathcal{D}\} \subseteq \text{Ob}\{\mathcal{C}\}$  e per ogni  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}\{D_1, D_2\} \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{D_1, D_2\}$ . Se in quest'ultima relazione vale l'uguaglianza,  $\mathcal{D}$  è detta *sottocategoria piena* di  $\mathcal{C}$ .

**Definizione 1.0.5.** Date due categorie  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , un *funttore covariante* tra le due è  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e consiste nell'assegnare a ogni oggetto  $C \in \mathcal{C}$  un oggetto  $F\{C\} \in \mathcal{D}$  e a ogni morfismo  $C_1 \xrightarrow{f} C_2$  un morfismo  $F\{C_1\} \xrightarrow{F\{f\}} F\{C_2\}$ , in modo che  $F\{1_C\} = 1_{F\{C\}}$  e  $F\{gf\} = F\{g\}F\{f\}$ ;  $F$  è un *funttore controvariante* se invece  $F\{f\} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}\{F\{C_2\}, F\{C_1\}\}$  e  $F\{gf\} = F\{f\}F\{g\}$ .

*Osservazione 1.0.6.* Dati due funtori  $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  e  $G: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_3$ , si definisce ed è funttore  $GF: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_3$  tale che  $GF\{C\} = G\{F\{C\}\}$  e  $GF\{f\} = G\{F\{f\}\}$ .

**Definizione 1.0.7.** Si consideri l'applicazione

$$F_{C_1}^{C_2}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}\{F\{C_1\}, F\{C_2\}\}$$

che associa a  $f$  il morfismo  $F\{f\}$ ;  $F$  si dice *fedele* se ogni  $F_{C_1}^{C_2}$  è iniettiva;  $F$  è *pieno* se ogni  $F_{C_1}^{C_2}$  è suriettiva.

*Esempio 1.0.8.* Sia  $\mathcal{C}$  una categoria e  $A \in \mathcal{C}$ ; si definisce il funttore  $h^A = \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, \bullet\}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ins}$  che associa all'oggetto  $C$  l'insieme  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, C\}$  e al morfismo  $C_1 \xrightarrow{f} C_2$  la funzione

$$h^A\{f\} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, f\}: \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, C_1\} & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, C_2\} \\ \left(A \xrightarrow{\xi} C_1\right) & \longmapsto & \left(A \xrightarrow{\xi} C_1 \xrightarrow{f} C_2\right) \end{array}.$$

Così definito,  $h^A$  è un funttore covariante:

- $h^A\{1_C\}\{\xi\} = 1_C\xi = \xi$ , quindi  $h^A\{1_C\} = 1_{h^A\{C\}}$ ;
- $h^A\{gf\}\{\xi\} = gf\xi = h^A\{g\}\{f\xi\} = (h^A\{g\}h^A\{f\})\{\xi\}$ , quindi  $h^A\{gf\} = h^A\{g\}h^A\{f\}$ .

Se il funttore è fedele, significa che per ogni coppia  $C_1 \xrightarrow{f,g} C_2$  con  $f \neq g$  esiste  $A \xrightarrow{\xi} C_1$  tale che  $f\xi \neq g\xi$ ; in questo caso  $A$  è detto *generatore* di  $\mathcal{C}$ .

Si può ripetere il procedimento costruendo il funttore controvariante  $h_A: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ins}$  che associa a  $C$  l'insieme  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C, A\}$  e con  $h_A\{f\}\{\xi\} = \xi f$ . Se  $h_A$  è fedele,  $A$  si dice *cogeneratore* di  $\mathcal{C}$ .

**Definizione 1.0.9.** Dati due funtori  $\mathcal{C} \xrightarrow{F,G} \mathcal{D}$ , un loro morfismo functoriale è  $\varphi: F \rightarrow G$  e consiste nell'assegnare per ogni  $C \in \mathcal{C}$  un morfismo  $F\{C\} \xrightarrow{\varphi_C} G\{C\}$  in modo che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F\{C_1\} & \xrightarrow{\varphi_{C_1}} & G\{C_1\} \\ F\{f\} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G\{f\} \\ F\{C_2\} & \xrightarrow{\varphi_{C_2}} & G\{C_2\} \end{array}$$

commuti per ogni  $C_1 \xrightarrow{f} C_2$ . I funtori sono isomorfi se per ogni  $C \in \mathcal{C}$ ,  $\varphi_C$  è un isomorfismo, cioè ha un'inversa bilatera; in questo caso, si scrive  $F \cong G$ .

**Definizione 1.0.10.** Due categorie  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  sono *equivalenti* se esiste una coppia di funtori  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tali che  $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$  e  $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$ , dove  $1_{\mathcal{C}}$  è il funtore identità di  $\mathcal{C}$ . Se inoltre  $FG = 1_{\mathcal{D}}$  e  $GF = 1_{\mathcal{C}}$ , le due categorie si dicono isomorfe.

**Lemma 1.0.11.** *Sia  $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtore covariante pieno e fedele, allora  $C_1 \xrightarrow{f} C_2$  è isomorfismo se e solo se  $T\{f\}$  è isomorfismo.*

*Dimostrazione.* Se  $f$  è un isomorfismo, esiste  $f^{-1}$  e  $T\{f\}T\{f^{-1}\} = T\{ff^{-1}\} = T\{1_{C_2}\} = 1_{T\{C_2\}}$ . Componendo dall'altro lato, si ottiene che  $T\{f^{-1}\} = T\{f\}^{-1}$ . Se  $T\{f\}$  è un isomorfismo, esiste  $h = T\{f\}^{-1}$ , ma  $h = T\{g\}$  per qualche  $g$ , quindi  $T\{1_{C_1}\} = 1_{T\{C_1\}} = hT\{f\} = T\{g\}T\{f\} = T\{gf\}$ . Per la fedeltà di  $T$ ,  $1_{C_1} = gf$ ; procedendo allo stesso modo, risulta  $g = f^{-1}$ .  $\square$

**Teorema 1.0.12.** *Sia  $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtore covariante, allora  $T$  è un'equivalenza se e solo se  $T$  è fedele, pieno e per ogni  $D \in \mathcal{D}$ , esistono  $C \in \mathcal{C}$  e  $T\{C\} \xrightarrow{\xi_D} D$  isomorfismo.*

*Dimostrazione.* Se  $T$  è un'equivalenza, esistono il funtore  $\mathcal{D} \xrightarrow{S} \mathcal{C}$  e gli isomorfismi functoriali  $ST \xrightarrow{\alpha} 1_{\mathcal{C}}$  e  $TS \xrightarrow{\beta} 1_{\mathcal{D}}$ .

$T$  è fedele. Siano  $f, f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\}$  con  $T\{f\} = T\{f'\}$ ; allora  $ST\{f\} = ST\{f'\}$ . Poiché  $\alpha$  è un isomorfismo si ha  $f = \alpha_{C_2}ST\{f\}\alpha_{C_1}^{-1} =$

$$\alpha_{C_2} ST \{f'\} \alpha_{C_1}^{-1} = f:$$

$$\begin{array}{ccc} ST \{C_1\} & \xrightarrow{\alpha_{C_1}} & C_1 \\ ST\{f\}=ST\{f'\} \downarrow & \circlearrowleft & f' \downarrow f \\ ST \{C_2\} & \xrightarrow{\alpha_{C_2}} & C_2. \end{array}$$

$T$  è pieno. Sia  $T \{C_1\} \xrightarrow{h} T \{C_2\}$ ; si ponga  $g = \alpha_{C_2} S \{h\} \alpha_{C_1}^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}} \{C_1, C_2\}$ . Poiché  $\alpha$  è isomorfismo, si ha  $ST \{g\} = \alpha_{C_2}^{-1} g \alpha_{C_1}$ , a sua volta uguale a  $S \{h\}$  per la definizione di  $g$ ; ma  $S$  è, come  $T$ , un'equivalenza, quindi per il punto precedente è fedele, da cui  $h = T \{g\}$ :

$$\begin{array}{ccc} ST \{C_1\} & \xrightarrow{\alpha_{C_1}} & C_1 \\ S\{h\}=ST\{g\} \downarrow & \circlearrowleft & g \downarrow \\ ST \{C_2\} & \xrightarrow{\alpha_{C_2}} & C_2. \end{array}$$

Per ogni  $D \in \mathcal{D}$ , se si pone  $C = T \{D\}$ , l'isomorfismo  $ST \{D\} \xrightarrow{\beta_D} D$  è quello cercato.

Costruzione di  $S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ . Per l'implicazione inversa, si deve costruire  $S$ . Preso  $D \in \mathcal{D}$ , si ponga  $S \{D\} = C$ , dove  $C \in \mathcal{C}$  è l'oggetto per cui esiste  $C \xrightarrow{\xi_D} D$ . Preso un morfismo  $D_1 \xrightarrow{f} D_2$ , esiste  $T \{C_1\} \xrightarrow{f'=\xi_{D_2}^{-1} f \xi_{D_1}} T \{C_2\}$ , ma poiché  $T$  è pieno e fedele, esiste un unico  $C_1 \xrightarrow{f''} C_2$  tale che  $T \{f''\} = f'$ ; sia  $S \{f\} = f''$ .

$S$  è un funtore. Grazie alla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccccc} D_1 & \xrightarrow{f} & D_2 & \xrightarrow{g} & D_3 \\ \xi_{D_1} \downarrow & \circlearrowleft & \xi_{D_2} \downarrow & \circlearrowleft & \xi_{D_3} \downarrow \\ T \{C_1\} & \xrightarrow{TS\{f\}} & T \{C_2\} & \xrightarrow{TS\{g\}} & T \{C_3\}, \end{array}$$

prese  $D_1 \xrightarrow{f} D_2$  e  $D_2 \xrightarrow{g} D_3$ , si ha  $T \{S \{g\} S \{f\}\} = TS \{g\} TS \{f\} = (\xi_{D_3}^{-1} g \xi_{D_2}) (\xi_{D_2}^{-1} f \xi_{D_1}) = \xi_{D_3}^{-1} g f \xi_{D_1} = TS \{gf\}$ . Per la fedeltà di  $T$ ,  $S \{g\} S \{f\} = S \{gf\}$ . Inoltre,  $TS \{1_D\} = \xi_D^{-1} 1_D \xi_D = 1_{T\{C\}} = T \{1_C\}$ ,

da cui  $S\{1_D\} = 1_C$ .

Per costruzione, si ha  $S\{D\} = C$  e  $TS\{D\} = T\{C\} = D$ , perciò  $TS = 1_D$ .

Costruzione di  $\alpha: ST \rightarrow 1_C$ . Si deve costruire per ogni  $C \in \mathcal{C}$  un isomorfismo  $ST\{C\} \xrightarrow{\alpha_C} C$ . In generale esiste  $TS\{D\} \xrightarrow{\xi_D} D$ ; se  $D = T\{C\}$ ,  $TST\{C\} \xrightarrow{\xi_{T\{C\}}} T\{C\}$ . Per le proprietà di  $T$ , esiste un unico morfismo  $ST\{C\} \xrightarrow{\alpha_C} C$  tale che  $T\{\alpha_C\} = \xi_{T\{C\}}$ ; si deve dimostrare che  $\alpha$  definito dagli  $\alpha_C$  è un isomorfismo functoriale.

$\alpha$  è un morfismo functoriale. Si deve dimostrare la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} ST\{C_1\} & \xrightarrow{\alpha_{C_1}} & C_1 \\ ST\{f\} \downarrow & ? & \downarrow f \\ ST\{C_2\} & \xrightarrow{\alpha_{C_2}} & C_2. \end{array}$$

Applicando  $T$ ,

$$\begin{array}{ccc} T\{f\alpha_{C_1}\} = & & T\{\alpha_{C_2}ST\{f\}\} = \\ = T\{f\}T\{\alpha_{C_1}\} & & = T\{\alpha_{C_2}\}TST\{f\} \\ = T\{f\}\xi_{T\{C_1\}} & & = \xi_{T\{C_2\}}TST\{f\}. \end{array}$$

Ma posto  $D = T\{C_1\}$ , si ha che  $TST\{f\} = \xi_{T\{C_2\}}^{-1}T\{f\}\xi_{T\{C_1\}}$ , da cui  $T\{f\alpha_{C_1}\} = T\{\alpha_{C_2}ST\{f\}\}$  e per la fedeltà di  $T$  la tesi. Applicando il lemma con  $f = \xi_{T\{C\}}$ , si ottiene che  $\alpha_C = T\{\xi_{T\{C\}}\}$  è un isomorfismo.  $\square$

**Teorema 1.0.13** (Lemma di Yoneda). *Siano  $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ins}$  un funtore controvariante,  $A \in \mathcal{C}$  e  $\text{Hom}\{h_A, F\}$  l'insieme dei morfismi functoriali da  $h_A$  in  $F$ . Posto*

$$\begin{array}{ccc} \alpha_A^F: \text{Hom}\{h_A, F\} & \longrightarrow & F\{A\} \\ (h_A \xrightarrow{\xi} F) & \longmapsto & \xi_A\{1_A\}, \end{array}$$

$\alpha_A^F$  è una biiezione, naturale in  $A$  e  $F$ .

Dimostrazione. Costruzione di  $\beta = (\alpha_A^F)^{-1}$ . Si dimostra che  $\alpha_A^F$  è invertibile, costruendo  $F\{A\} \xrightarrow{\beta} \text{Hom}\{h_A, F\}$ : se  $x \in F\{A\}$ ,  $\beta\{x\}$  deve essere un

morfismo functoriale definito dalle  $h_A \{C\} \xrightarrow{\beta\{x\}_C} F \{C\}$ ; presa  $f \in h_A \{C\} = \text{Hom}_C \{C, A\}$ , sia  $\beta \{x\}_C \{f\} = F \{f\} \{x\}$ .

$\beta \{x\}$  è un morfismo functoriale. Si deve dimostrare che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} h_A \{C_2\} & \xrightarrow{\beta\{x\}_{C_2}} & F \{C_2\} \\ h_A \{g\} \downarrow & ? & \downarrow F\{g\} \\ h_A \{C_1\} & \xrightarrow{\beta\{x\}_{C_1}} & F \{C_1\} \end{array}$$

commuta: preso  $f \in \text{Hom}_C \{C_2, A\}$ , procedendo dalle due parti:

$$\begin{aligned} F \{g\} \{ \beta \{x\}_{C_2} \{f\} \} &= & \beta \{x\}_{C_1} \{ h_A \{g\} \{f\} \} &= \\ &= F \{g\} \{ F \{f\} \{x\} \} & &= \beta \{x\}_{C_1} \{ fg \} \\ &= F \{fg\} \{x\} & &= F \{fg\} \{x\}. \end{aligned}$$

$\beta = (\alpha_A^F)^{-1}$ . Preso un morfismo functoriale  $h_A \xrightarrow{\xi} F$ , per ogni  $C \in \mathcal{C}$ ,  $\beta \{ \alpha_A^F \{ \xi \} \}_C = \beta \{ \xi_A \{ 1_A \} \}_C$ . Questa applicazione manda  $f \in \text{Hom}_C \{C, A\}$  in  $\beta \{ \xi_A \{ 1_A \} \}_C \{f\} = F \{f\} \{ \xi_A \{ 1_A \} \}$ , ma  $\xi$  è un morfismo, quindi  $F \{f\} \xi_A = \xi_C h_A \{f\}$ , così l'immagine di  $f$  risulta  $\xi_C \{ h_A \{f\} \{ 1_A \} \} = \xi_C \{f\}$ . Viceversa, se  $x \in F \{A\}$ ,  $\alpha_A^F \{ \beta \{x\} \} = \beta \{x\}_A \{ 1_A \} = F \{ 1_A \} \{x\} = 1_{F\{A\}} \{x\} = x$ .

$\alpha_A^F$  è naturale in  $A$ . Presa  $A \xrightarrow{u} B$  e posto  $h_u: h_A \rightarrow h_B$ , si deve mostrare che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom} \{ h_B, F \} & \xrightarrow{\alpha_B^F} & F \{ B \} \\ \text{Hom} \{ h_u, F \} \downarrow & ? & \downarrow F\{u\} \\ \text{Hom} \{ h_A, F \} & \xrightarrow{\alpha_A^F} & F \{ A \} \end{array}$$

commuta. Preso  $\xi: h_B \rightarrow F$  morfismo functoriale:

$$\begin{aligned}
F\{u\} \{\alpha_B^F \{\xi\}\} &= & \alpha_A^F \{\text{Hom}\{h_u, F\} \{\xi\}\} &= \\
= F\{u\} \{\xi_B \{1_B\}\} & & = \alpha_A^F \{\xi h_u\} & \\
= \xi_A \{h_B \{u\} \{1_B\}\} & & = (\xi h_u)_A \{1_A\} & \\
= \xi_A \{1_B u\} & & = \xi_A \{h_{uA} \{1_A\}\} & \\
= \xi_A \{u\} & & = \xi_A \{u 1_A\} & \\
& & = \xi_A \{u\}. &
\end{aligned}$$

$\alpha_A^F$  è naturale in  $F$ . Preso un morfismo functoriale  $\psi: F \rightarrow G$ , si mostra la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}\{h_A, F\} & \xrightarrow{\alpha_A^F} & F\{A\} \\
\text{Hom}\{h_A, \psi\} \downarrow & ? & \downarrow \psi_A \\
\text{Hom}\{h_A, G\} & \xrightarrow{\alpha_A^G} & G\{A\}.
\end{array}$$

Preso  $\xi \in \text{Hom}\{h_A, F\}$ :

$$\begin{aligned}
\psi_A \{\alpha_A^F \{\xi\}\} &= & \alpha_A^G \{\text{Hom}\{h_A, \psi\} \{\xi\}\} &= \\
= \psi_A \{\xi_A \{1_A\}\} & & = \alpha_A^G \{\psi \xi\} & \\
& & = (\psi \xi)_A \{1_A\} & \\
& & = \psi_A \{\xi_A \{1_A\}\}, &
\end{aligned}$$

quindi il diagramma commuta e  $\alpha_A^F$  è naturale in  $F$ . □

*Osservazione 1.0.14.*  $\alpha_A^F$  naturale in  $A$  significa che  $\alpha_\bullet^F: \text{Hom}\{h_\bullet, F\} \rightarrow F\{\bullet\}$  è un morfismo functoriale tra funtori da  $\mathcal{C}$  a  $\text{Ins}$ . Allo stesso modo, la naturalità in  $F$  significa che  $\alpha_A^\bullet: \text{Hom}\{h_A, \bullet\} \rightarrow \bullet\{A\}$  è un morfismo functoriale tra funtori da  $\text{Hom}\{\mathcal{C}, \text{Ins}\}$  a  $\text{Ins}$ .

**Corollario 1.0.15.** *Siano  $A, B \in \mathcal{C}$ , allora  $A \cong B$  se e solo se  $h_A \cong h_B$ .*



*Dimostrazione.* Se  $A \cong B$ , esistono  $A \xrightarrow{u} B$  e  $B \xrightarrow{v} A$  tali che  $vu = 1_A$  e viceversa; allora preso  $C \xrightarrow{f} A$ ,  $h_v h_u \{f\} = v(uf) = (vu)f = f$  e viceversa.

Se invece  $h_A \cong h_B$ , si ha un morfismo functoriale  $\varphi: h_A \rightarrow h_B$  tale che ogni  $\varphi_C$  è un isomorfismo; siano  $u = \varphi_A \{1_A\}$  e  $v = \varphi_B^{-1} \{1_B\}$ , cioè si ottengono  $A \xrightarrow{u} B$  e  $B \xrightarrow{v} A$ . Si consideri il diagramma della naturalità in  $A$  di  $\alpha_A^F$  con  $F = h_B$ :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom} \{h_B, h_A\} & \xrightarrow{\alpha_B^{h_A}} & h_A \{B\} \\ \text{Hom} \{h_u, h_A\} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h_A \{u\} \\ \text{Hom} \{h_A, h_A\} & \xrightarrow{\alpha_A^{h_A}} & h_A \{A\}. \end{array}$$

Allora partendo da  $\varphi^{-1} \in \text{Hom} \{h_B, h_A\}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha_A^{h_A} \{ \text{Hom} \{h_u, h_A\} \{ \varphi^{-1} \} \} & & h_A \{u\} \{ \alpha_B^{h_A} \{ \varphi^{-1} \} \} \\ = \alpha_A^{h_A} \{ \varphi^{-1} h_u \} & & = h_A \{u\} \{ \varphi_B^{-1} \{1_B\} \} \\ = (\varphi^{-1} h_u)_A \{1_A\} & & = h_A \{u\} \{v\} \\ = \varphi_A^{-1} \{ h_{uA} \{1_A\} \} & & = vu \\ = \varphi_A^{-1} \{u\} & & \\ = \varphi_A^{-1} \{ \varphi_A \{1_A\} \} = 1_A. & & \end{aligned}$$

Procedendo analogamente si dimostra anche che  $1_B = uv$ , quindi  $u$  e  $v$  sono isomorfismi. □

## 2 Funtori aggiunti

Si considerano due funtori covarianti  $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  e  $H: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ; da questi si definiscono i funtori

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{\bullet\}, \blacktriangle\} &: \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \longrightarrow \text{Ins}, \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{\bullet, H \{\blacktriangle\}\} &: \mathcal{A} \times \mathcal{B}^\circ \longrightarrow \text{Ins}, \end{aligned}$$

che associano all'oggetto  $(A, B)$  rispettivamente gli oggetti  $\text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A\}, B\}$  e  $\text{Hom}_{\mathcal{A}} \{A, H \{B\}\}$ . Presi  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{A_1, A_2\}$  e  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{B_1, B_2\}$  si deve definire l'immagine del morfismo  $(f, g)$ . Prima si considerano le applicazioni

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{f\}, B\} &: \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A_2\}, B\} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A_1\}, B\} \\ &\quad \left( T \{A_2\} \xrightarrow{\eta} B \right) \longmapsto \left( T \{A_1\} \xrightarrow{T\{f\}} T \{A_2\} \xrightarrow{\eta} B \right), \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{A, H \{g\}\} &: \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{A, H \{B_1\}\} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{A, H \{B_2\}\} \\ &\quad \left( A \xrightarrow{\eta} H \{B_1\} \right) \longmapsto \left( A \xrightarrow{\eta} H \{B_1\} \xrightarrow{H\{g\}} H \{B_2\} \right); \end{aligned}$$

infine, l'immagine di  $(f, g)$  tramite i funtori iniziali sono i seguenti morfismi:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{f\}, g\} &: \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A_2\}, B_1\} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A_1\}, B_2\} \\ &\quad \left( T \{A_2\} \xrightarrow{\eta} B_1 \right) \longmapsto \left( T \{A_1\} \xrightarrow{T\{f\}} T \{A_2\} \xrightarrow{\eta} B_1 \xrightarrow{g} B_2 \right) \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{f, H \{g\}\} &: \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{A_2, H \{B_1\}\} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{A_1, H \{B_2\}\} \\ &\quad \left( A_2 \xrightarrow{\eta} H \{B_1\} \right) \longmapsto \left( A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{\eta} H \{B_1\} \xrightarrow{H\{g\}} H \{B_2\} \right). \end{aligned}$$

**Definizione 2.0.16.** La coppia di funtori  $(T, H)$  è un'aggiunzione se esistono degli isomorfismi  $\Lambda_B^A: \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A\}, B\} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{A, H \{B\}\}$  tali che per ogni  $A_1 \xrightarrow{f} A_2$  e  $B_1 \xrightarrow{g} B_2$  si verifichi

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A_2\}, B_1\} & \xrightarrow{\Lambda_{B_1}^{A_2}} & \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{A_2, H \{B_1\}\} \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{f\}, g\} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{f, H \{g\}\} \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A_1\}, B_2\} & \xrightarrow{\Lambda_{B_2}^{A_1}} & \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{A_1, H \{B_2\}\}, \end{array}$$

cioè per ogni  $T \{A_2\} \xrightarrow{\eta} B_1$  deve risultare  $\text{Hom}_{\mathcal{A}} \{f, H \{g\}\} \{\Lambda_{B_1}^{A_2} \{\eta\}\} = \Lambda_{B_1}^{A_2} \{\text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{f\}, g\} \{\eta\}\}$ , che si semplifica nella condizione

$$H \{g\} \Lambda_{B_1}^{A_2} \{\eta\} f = \Lambda_{B_2}^{A_1} \{g\eta(T \{f\})\}.$$

In altre parole,  $(T, H)$  sono funtori aggiunti se esiste un isomorfismo functoriale  $\Lambda: \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{\bullet\}, \blacktriangle\} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{\bullet, H \{\blacktriangle\}\}$ .

*Esempio 2.0.17.* Sia  ${}_R M_S$  un bimodulo,  $H = \text{Hom}_S \{{}_R M_S, \bullet\}: \text{Mod-}S \rightarrow \text{Mod-}S$  e  $T = \bullet \otimes_R M: \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}S$ . Si ponga

$$\Lambda_B^A: \text{Hom}_S \{A \otimes_R M, B\} \longrightarrow \text{Hom}_R \{A, \text{Hom}_S \{M, B\}\} \\ \left( A \otimes_R M \xrightarrow{\eta} B \right) \longmapsto \left( \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \text{Hom}_S \{M, B\} \\ a & \longmapsto & \left( \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & B \\ m & \longmapsto & \eta \{a \otimes m\} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

e quella che si dimostrerà essere la sua inversa:

$$\Gamma_B^A: \text{Hom}_R \{A, \text{Hom}_S \{M, B\}\} \longrightarrow \text{Hom}_S \{A \otimes_R M, B\} \\ \left( A \xrightarrow{\xi} \text{Hom}_S \{M, B\} \right) \longmapsto \left( \begin{array}{ccc} A \otimes_R M & \longrightarrow & B \\ a \otimes m & \longmapsto & \xi \{a\} \{m\} \end{array} \right).$$

$\Lambda_B^A \{\eta\} \{a\}$  è morfismo di Mod- $S$ . Per semplicità si ponga  $\alpha = \Lambda_B^A \{\eta\} \{a\}$ ; allora si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha \{m_1 s_1 + m_2 s_2\} &= \eta \{a \otimes (m_1 s_1 + m_2 s_2)\} \\ &= \eta \{a \otimes (m_1 s_1) + a \otimes (m_2 s_2)\} \\ &= \eta \{(a \otimes m_1) s_1 + (a \otimes m_2) s_2\} \\ &= \eta \{a \otimes m_1\} s_1 + \eta \{a \otimes m_2\} s_2 \\ &= \alpha \{m_1\} s_1 + \alpha \{m_2\} s_2. \end{aligned}$$

$\Lambda_B^A \{\eta\}$  è morfismo di Mod- $R$ . Si deve dimostrare che

$$\Lambda_B^A \{\eta\} \{a_1 r_1 + a_2 r_2\} = \Lambda_B^A \{\eta\} \{a_1\} r_1 + \Lambda_B^A \{\eta\} \{a_2\} r_2:$$

$$\begin{aligned} \Lambda_B^A \{\eta\} \{a_1 r_1 + a_2 r_2\} \{m\} &= \eta \{(a_1 r_1 + a_2 r_2) \otimes m\} \\ &= \eta \{a_1 r_1 \otimes m + a_2 r_2 \otimes m\} \\ &= \eta \{a_1 r_1 \otimes m\} + \eta \{a_2 r_2 \otimes m\} \\ &= \Lambda_B^A \{\eta\} \{a_1 r_1\} + \Lambda_B^A \{\eta\} \{a_2 r_2\} \\ &= \Lambda_B^A \{\eta\} \{a_1\} r_1 + \Lambda_B^A \{\eta\} \{a_2\} r_2. \end{aligned}$$

$\Gamma_B^A \{\xi\}$  è ben definita. Si deve mostrare che l'applicazione che associa  $\xi \{a\} \{m\}$  alla coppia  $(a, m)$  è bilanciata; l'additività è banale, inoltre

$$\begin{aligned} \xi \{ar\} \{m\} &= (\xi \{a\} r) \{m\} && \text{perché } \xi \text{ è morfismo di Mod-}R \\ &= \xi \{a\} \{rm\}. && \text{per definizione di } \cdot \text{ in } (\text{Hom}_S \{M, B\})_R \end{aligned}$$

$\Gamma_B^A \{\xi\}$  è morfismo di Mod- $S$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \Gamma_B^A \{\xi\} \{(a_1 \otimes m_1) s_1 + (a_2 \otimes m_2) s_2\} &= \\ &= \Gamma_B^A \{\xi\} \{a_1 \otimes m_1 s_1 + a_2 \otimes m_2 s_2\} \\ &= \Gamma_B^A \{\xi\} \{a_1 \otimes m_1 s_1\} + \Gamma_B^A \{\xi\} \{a_2 \otimes m_2 s_2\} \\ &= \xi \{a_1\} \{m_1 s_1\} + \xi \{a_2\} \{m_2 s_2\} \\ &= \xi \{a_1\} \{m_1\} s_1 + \xi \{a_2\} \{m_2\} s_2 \\ &= \Gamma_B^A \{\xi\} \{a_1 \otimes m_1\} s_1 + \Gamma_B^A \{\xi\} \{a_2 \otimes m_2\} s_2. \end{aligned}$$

$\Gamma_B^A = (\Lambda_B^A)^{-1}$ . Presa  $A \otimes_R M \xrightarrow{\eta} B$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_B^A \{\Lambda_B^A \{\eta\}\} \{\bar{a} \otimes \bar{m}\} &= \Gamma_B^A \{a \mapsto (m \mapsto \eta \{a \otimes m\})\} \{\bar{a} \otimes \bar{m}\} \\ &= (a \otimes m \mapsto \eta \{a \otimes m\}) \{\bar{a} \otimes \bar{m}\} \\ &= \eta \{\bar{a} \otimes \bar{m}\}. \end{aligned}$$

Preso invece  $A \xrightarrow{\xi} \text{Hom}_S \{M, B\}$ :

$$\begin{aligned}
\Lambda_B^A \{ \Gamma_B^A \{ \xi \} \} \{ \bar{a} \} \{ \bar{m} \} &= \Lambda_B^A \{ a \otimes m \mapsto \xi \{ a \} \{ m \} \} \{ \bar{a} \} \{ \bar{m} \} \\
&= (a \mapsto (m \mapsto \xi \{ a \} \{ m \} )) \{ \bar{a} \} \{ \bar{m} \} \\
&= (m \mapsto \xi \{ \bar{a} \} \{ m \} ) \{ \bar{m} \} \\
&= \xi \{ \bar{a} \} \{ \bar{m} \}
\end{aligned}$$

$(T, H)$  sono un'aggiunzione. Si deve verificare che commuti il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_S \{ A_2 \otimes_R M, B_1 \} & \xrightarrow{\Lambda_{B_1}^{A_2}} & \text{Hom}_R \{ A_2, \text{Hom}_S \{ M, B_1 \} \} \\
\text{Hom}_S \{ f \otimes_R M, g \} \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_R \{ f, \text{Hom}_S \{ M, g \} \} \\
\text{Hom}_S \{ A_1 \otimes_R M, B_2 \} & \xrightarrow{\Lambda_{B_2}^{A_1}} & \text{Hom}_R \{ A_1, \text{Hom}_S \{ M, B_2 \} \} .
\end{array}$$

Percorrendo il diagramma a partire da  $A_2 \otimes_R M \xrightarrow{\eta} B$ :

$$\begin{aligned}
&\text{Hom}_R \{ f, \text{Hom}_S \{ M, g \} \} \{ \Lambda_{B_1}^{A_2} \{ \eta \} \} = \\
&= \text{Hom}_R \{ f, \text{Hom}_S \{ M, g \} \} \{ a_2 \mapsto (m \mapsto \eta \{ a_2 \otimes m \}) \} \\
&= \text{Hom}_S \{ M, g \} (a_2 \mapsto (m \mapsto \eta \{ a_2 \otimes m \})) f \\
&= \text{Hom}_S \{ M, g \} (a_1 \mapsto (m \mapsto \eta \{ f \{ a_1 \} \otimes m \})) \\
&= a_1 \mapsto (m \mapsto g \eta \{ f \{ a_1 \} \otimes m \}) \\
&\Lambda_{B_2}^{A_1} \{ \text{Hom}_S \{ f \otimes_R M, g \} \{ \eta \} \} = \\
&= \Lambda_{B_2}^{A_1} \{ g \eta (f \otimes_R M) \} \\
&= \Lambda_{B_2}^{A_1} \{ a_1 \otimes m \mapsto g \eta \{ f \{ a_1 \} \otimes m \} \} \\
&= a_1 \mapsto (m \mapsto g \eta \{ f \{ a_1 \} \otimes m \})
\end{aligned}$$

**Teorema 2.0.18.** *Se  $(T, H)$  e  $(T', H)$  sono aggiunzioni, allora  $T \cong T'$ .*

*Dimostrazione.* Costruzione dell'isomorfismo. Per ogni  $A \in \mathcal{A}$  e  $B \in \mathcal{B}$ , si

hanno i due isomorfismi  $\Lambda_B^A$  e  $\Lambda'_B{}^A$ ; si ponga  $\lambda_B^A$  in modo che

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A\}, B\} & \xrightarrow{\lambda_B^A} & \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T' \{A\}, B\} \\ & \searrow \Lambda_B^A & \swarrow \Lambda'_B{}^A \\ & \text{Hom}_{\mathcal{A}} \{A, H \{B\}\} & \end{array} \quad \circlearrowleft$$

cioè  $\lambda_B^A = \left(\Lambda'_B{}^A\right)^{-1} \Lambda_B^A$ . Si definisce quindi  $T' \{A\} \xrightarrow{\chi_A} T \{A\}$  con  $\chi_A = \lambda_{T\{A\}}^A \{1_{T\{A\}}\}$ .

$\lambda_{\blacktriangle}^{\bullet}$ :  $\text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{\bullet\}, \blacktriangle\} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T' \{\bullet\}, \blacktriangle\}$  è un bifunore. Date  $A_1 \xrightarrow{f} A_2, B_1 \xrightarrow{g} B_2$  e  $T \{A_2\} \xrightarrow{\xi} B_1$ , si deve verificare

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A_2\}, B_1\} & \xrightarrow{\lambda_{B_1}^{A_2}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T' \{A_2\}, B_1\} \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{f\}, g\} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T' \{f\}, g\} \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A_1\}, B_2\} & \xrightarrow{\lambda_{B_2}^{A_1}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{A_1\}, B_2\} : \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T' \{f\}, g\} \{ \lambda_{B_1}^{A_2} \{ \xi \} \} &= \lambda_{B_2}^{A_1} \{ \text{Hom}_{\mathcal{B}} \{T \{f\}, g\} \{ \xi \} \} = \\ &= g \lambda_{B_1}^{A_2} \{ \xi \} T' \{f\} &= \lambda_{B_2}^{A_1} \{ g \xi T \{f\} \} \\ &= g \left( \Lambda'_{B_1}{}^{A_2} \right)^{-1} \{ \Lambda_{B_1}^{A_2} \{ \xi \} \} T' \{f\} &= \left( \Lambda'_{B_2}{}^{A_1} \right)^{-1} \{ \Lambda_{B_2}^{A_1} \{ g \xi T \{f\} \} \} \\ &= \left( \Lambda'_{B_2}{}^{A_1} \right)^{-1} \{ H \{g\} \Lambda_{B_1}^{A_2} \{ \xi \} f \} &= \left( \Lambda'_{B_2}{}^{A_1} \right)^{-1} \{ H \{g\} \Lambda_{B_1}^{A_2} \{ \xi \} f \}. \end{aligned}$$

$\chi: T' \rightarrow T$  è morfismo di funtori. Deve risultare:

$$\begin{array}{ccc} T' \{A_1\} & \xrightarrow{\chi_{A_1}} & T \{A_1\} \\ T' \{f\} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow T \{f\} \\ T' \{A_2\} & \xrightarrow{\chi_{A_2}} & T \{A_2\} : \end{array}$$

$$\begin{aligned}
T\{f\}\chi_{A_1} &= & \chi_{A_2}T'\{f\} &= \\
&= T\{f\}\lambda_{T\{A_1\}}^{A_1}\{1_{T\{A_1\}}\} & &= \lambda_{T\{A_2\}}^{A_2}\{1_{T\{A_2\}}\}T'\{f\} \\
&= \lambda_{T\{A_2\}}^{A_1}\{T\{f\}1_{T\{A_1\}}\} & &= \lambda_{T\{A_2\}}^{A_1}\{1_{T\{A_2\}}T'\{f\}\} \\
&= \lambda_{T\{A_2\}}^{A_1}\{T\{f\}\} & &= \lambda_{T\{A_2\}}^{A_1}\{T\{f\}\}
\end{aligned}$$

$\chi$  è isomorfismo functoriale. Si costruisce l'inversa di  $\chi$  ripetendo il procedimento al contrario, quindi sia  $\mu_B^A = (\Lambda_B^A)^{-1}\Lambda_B^A$  e  $\zeta_A = \mu_{T'\{A\}}^A\{1_{T'\{A\}}\}$ ; allora

$$\begin{aligned}
\zeta_A\chi_A &= & \chi_A\zeta_A &= \\
&= \zeta_A\lambda_{T\{A\}}^A\{1_{T\{A\}}\} & &= \chi_A\mu_{T'\{A\}}^A\{1_{T'\{A\}}\} \\
&= \lambda_{T'\{A\}}^A\{\zeta_A 1_{T\{A\}}\} & &= \mu_{T'\{A\}}^A\{\chi_A 1_{T'\{A\}}\} \\
&= \lambda_{T'\{A\}}^A\{\zeta_A\} & &= \mu_{T'\{A\}}^A\{\chi_A\} \\
&= \lambda_{T'\{A\}}^A\mu_{T'\{A\}}^A\{1_{T'\{A\}}\} & &= \mu_{T'\{A\}}^A\chi_{T'\{A\}}^A\{1_{T\{A\}}\} \\
&= 1_{T'\{A\}} & &= 1_{T\{A\}}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Proposizione 2.0.19.** *Sia  $\sigma_A = \Lambda_{T\{A\}}^A\{1_{T\{A\}}\} : A \rightarrow HT\{A\}$ , allora  $\sigma : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow HT$  è un morfismo functoriale (detto unità dell'aggiunzione).*

*Dimostrazione.* Si deve verificare che

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{\sigma_{A_1}} & HT\{A_1\} \\
f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow HT\{f\} \\
A_2 & \xrightarrow{\sigma_{A_2}} & HT\{A_2\} :
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
HT\{f\}\sigma_{A_1} &= & \sigma_{A_2}f &= \\
&= HT\{f\}\Lambda_{T\{A_1\}}^{A_1}\{1_{T\{A_1\}}\} & &= \Lambda_{T\{A_2\}}^{A_2}\{1_{T\{A_2\}}\}f \\
&= \Lambda_{T\{A_2\}}^{A_1}\{T\{f\}1_{T\{A_1\}}\} & &= \Lambda_{T\{A_2\}}^{A_1}\{1_{T\{A_2\}}T\{f\}\} \\
&= \Lambda_{T\{A_2\}}^{A_1}\{T\{f\}\} & &= \Lambda_{T\{A_2\}}^{A_1}\{T\{f\}\}. \quad \square
\end{aligned}$$

*Osservazione 2.0.20.* Si definisce dualmente la *counità* dell'aggiunzione come il morfismo functoriale  $\rho: TH \rightarrow 1_B$  con  $\rho_B = \left(\Lambda_B^{H\{B\}}\right)^{-1} \{1_{H\{B\}}\}$ . In generale  $\sigma$  e  $\rho$  non sono isomorfismi, cioè l'aggiunzione non dà delle equivalenze tra categorie.

Grazie all'aggiunzione si hanno queste identità:

$$\begin{aligned}\Lambda_B^A \{f\} &= H \{f\} \sigma_A \\ (\Lambda_B^A)^{-1} \{g\} &= \rho_B T \{g\} \\ \rho_{T\{A\}} T \{\sigma_A\} &= 1_{T\{A\}} \\ H \{\rho_B\} \sigma_{H\{B\}} &= 1_{H\{B\}}.\end{aligned}$$

**Teorema 2.0.21.** *Siano  $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  e  $H: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  funtori covarianti,  $\sigma: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow HT$  e  $\rho: TH \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$  morfismi functoriali tali che  $\rho_{T\{A\}} T \{\sigma_A\} = 1_{T\{A\}}$  e  $H \{\rho_B\} \sigma_{H\{B\}} = 1_{H\{B\}}$ , allora  $(T, H)$  è una aggiunzione con unità  $\sigma$  e counità  $\rho$ .*

*Dimostrazione.*  $\Gamma_B^A = \left(\Lambda_B^A\right)^{-1}$ . Siano  $\Lambda_B^A \{f\} = H \{f\} \sigma_A$  e  $\Gamma_B^A \{g\} = \rho_B T \{g\}$ , allora presi  $T \{A\} \xrightarrow{f} B$  e  $A \xrightarrow{g} H \{B\}$ , grazie al fatto che  $\rho$  e  $\sigma$  sono funtori, si ha:

$$\begin{aligned}\Gamma_B^A \{\Lambda_B^A \{f\}\} &= \Lambda_B^A \{\Gamma_B^A \{f\}\} \\ &= \Gamma_B^A \{H \{f\} \sigma_A\} &= \Lambda_B^A \{\rho_B T \{g\}\} \\ &= \rho_B (T \{H \{f\} \sigma_A\}) &= (H \{\rho_B T \{g\}\}) \sigma_A \\ &= \rho_B (TH \{f\}) (T \{\sigma_A\}) &= (H \{\rho_B\}) (HT \{g\}) \sigma_A \\ &= f \rho_{T\{A\}} T \{\sigma_A\} &= H \{\rho_B\} \sigma_{H\{B\}} g \\ &= f &= g\end{aligned}$$

$\Lambda$  realizza una aggiunzione. Presi  $A_1 \xrightarrow{f} A_2$ ,  $B_1 \xrightarrow{g} B_2$  e  $T \{A_2\} \xrightarrow{\xi} B_1$ , si



ha:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{B_2}^{A_1} \{g\xi T \{f\}\} &= & H \{g\} \Lambda_{B_1}^{A_2} \{\xi\} f &= \\
= H \{g\xi T \{f\}\} \sigma_{A_1} & & = H \{g\} H \{\xi\} \sigma_{A_2} f & \\
= H \{g\} H \{\xi\} HT \{f\} \sigma_{A_1} & & = H \{g\} H \{\xi\} HT \{f\} \sigma_{A_1} &
\end{aligned}$$

$\sigma$  e  $\rho$  sono unit  e counit . L'unit  dell'aggiunzione  $(T, H)$     $\Lambda_{T\{A\}}^A \{1_{T\{A\}}\} = H \{1_{T\{A\}}\} \sigma_A = \sigma_A$ , mentre la counit     $\left(\Lambda_B^{H\{B\}}\right)^{-1} \{1_{H\{B\}}\} = \Gamma_B^{H\{B\}} \{1_{H\{B\}}\} = \rho_B T \{1_{H\{B\}}\} = \rho_B$ .  $\square$

**Proposizione 2.0.22.** *Siano  $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  e  $H: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  due funtori che determinano un'equivalenza tra  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , cio  tali che esistono i due isomorfismi functoriali  $\eta: 1_{\mathcal{A}} \rightarrow HT$  e  $\varepsilon: 1_{\mathcal{B}} \rightarrow TH$ , allora  $(T, H)$  sono un'aggiunzione di unit   $\eta$  e counit   $\rho$  con  $\rho_B = \varepsilon_B^{-1} T \left\{ \eta_{H\{B\}}^{-1} \right\} \varepsilon_{TH\{B\}}$ .*

*Dimostrazione.* Si dimostreranno le ipotesi del teorema precedente; per farlo innanzitutto si verifica che  $\eta_{HT\{A\}} = HT \{\eta_A\}$  e  $\varepsilon_{TH\{B\}} = TH \{\varepsilon_B\}$ : questo   vero perch  dal fatto che  $\eta$  e  $\varepsilon$  sono funtori si ottiene  $\eta_{HT\{A\}}\eta_A = HT \{\eta_A\} \eta_A$  e  $\varepsilon_{TH\{B\}}\varepsilon_B = TH \{\varepsilon_B\} \varepsilon_B$ , ma  $\eta$  e  $\varepsilon$  sono isomorfismi functoriali, quindi  $\eta_A$  e  $\varepsilon_B$  si possono elidere. Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
\rho_{T\{A\}} T \{\eta_A\} &= \\
= \varepsilon_{T\{A\}}^{-1} T \left\{ \eta_{HT\{A\}}^{-1} \right\} \varepsilon_{THT\{A\}} T \{\eta_A\} & \\
= \varepsilon_{T\{A\}}^{-1} T \left\{ \eta_{HT\{A\}}^{-1} \right\} THT \{\eta_A\} \varepsilon_{T\{A\}} & \\
= \varepsilon_{T\{A\}}^{-1} T \left\{ \eta_{HT\{A\}}^{-1} \right\} T \left\{ \eta_{HT\{A\}} \right\} \varepsilon_{T\{A\}} & \\
= 1_{T\{A\}} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H \{ \rho_B \} \eta_{H\{B\}} &= \\
&= H \left\{ \varepsilon_B^{-1} T \left\{ \eta_{H\{B\}}^{-1} \right\} \varepsilon_{TH\{B\}} \right\} \eta_{H\{B\}} \\
&= H \left\{ \varepsilon_B^{-1} \right\} HT \left\{ \eta_{H\{B\}}^{-1} \right\} H \left\{ \varepsilon_{TH\{B\}} \right\} \eta_{H\{B\}} \\
&= H \left\{ \varepsilon_B^{-1} \right\} HT \left\{ \eta_{H\{B\}}^{-1} \right\} HTH \left\{ \varepsilon_B \right\} \eta_{H\{B\}} \\
&= H \left\{ \varepsilon_B^{-1} \right\} HT \left\{ \eta_{H\{B\}}^{-1} \right\} \eta_{HTH\{B\}} H \left\{ \varepsilon_B \right\} \\
&= H \left\{ \varepsilon_B^{-1} \right\} HT \left\{ \eta_{H\{B\}}^{-1} \right\} HT \left\{ \eta_{H\{B\}} \right\} H \left\{ \varepsilon_B \right\} \\
&= 1_{H\{B\}}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Proposizione 2.0.23.** *Sia  $(T, H)$  un'aggiunzione di unità  $\sigma$  e counità  $\rho$ , e siano  $\eta: 1_A \rightarrow HT$ ,  $\varepsilon: 1_B \rightarrow TH$  isomorfismi funtoriali, allora anche  $\sigma$  e  $\rho$  sono isomorfismi funtoriali.*

*Dimostrazione.* Per l'unicità di unità e counità e la proposizione precedente,  $\eta = \sigma$ , mentre  $\rho_B = \varepsilon_B^{-1} T \left\{ \eta_{H\{B\}}^{-1} \right\} \varepsilon_{TH\{B\}}$ , quindi  $\rho$  è un isomorfismo perché composizione di isomorfismi.  $\square$

*Esempio 2.0.24.* Siano ancora  $T = \bullet \otimes_R M$  e  $H = \text{Hom} \{M, \bullet\}$ ; l'unità di questa aggiunzione è definita da  $\sigma_A = \Lambda_{A \otimes_R M}^A \{1_A\}$ , cioè

$$\begin{aligned}
\sigma_A: \quad A &\longrightarrow \text{Hom}_S \{M, A \otimes_R M\} \\
a &\longmapsto \left( \begin{array}{l} M \longrightarrow A \otimes_R M \\ m \longmapsto a \otimes m \end{array} \right);
\end{aligned}$$

quindi  $\sigma_A \{a\} = a \otimes \bullet$ . Viceversa, la counità è definita da  $\rho_B = \Gamma_B^{\text{Hom}_S \{M, B\}} \{1_{\text{Hom}_S \{M, B\}}\}$ , cioè

$$\begin{aligned}
\rho_B: \quad \text{Hom}_S \{M, B\} \otimes_R M &\longrightarrow B \\
f \otimes y &\longmapsto f \{y\}.
\end{aligned}$$

### 3 Categorie abeliane

#### 3.1 Kernel

**Definizione 3.1.1.** Siano  $A, B \in \mathcal{C}$  e  $A \xrightarrow{f} B$ , allora  $f$  è un *monomorfismo* se per ogni  $C \xrightarrow{g_1, g_2} A$  con  $fg_1 = fg_2$  si ha  $g_1 = g_2$ ;  $f$  è *epimorfismo* se per ogni  $B \xrightarrow{g_1, g_2} C$  con  $g_1f = g_2f$  si ha  $g_1 = g_2$ .

*Osservazione 3.1.2.* Un isomorfismo è sia monomorfismo che epimorfismo, poiché si può comporre con l'inversa; al contrario, un monomorfismo ed epimorfismo può non essere isomorfismo, come ad esempio l'inclusione  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  nella categoria degli anelli.

**Lemma 3.1.3.** Siano  $A \xrightarrow{f} B$  e  $B \xrightarrow{g} A$  tali che  $gf = 1_A$ , allora  $f$  è monomorfismo e  $g$  è epimorfismo.

*Dimostrazione.* Siano  $C$  un oggetto,  $C \xrightarrow{\lambda_1, \lambda_2} A$  e  $A \xrightarrow{\xi_1, \xi_2} C$ ; se  $f\lambda_1 = f\lambda_2$  si ha  $\lambda_1 = 1_A \lambda_1 = gf\lambda_1 = gf\lambda_2 = \lambda_2$ ; se invece  $\xi_1 g = \xi_2 g$ , si ha  $\xi_1 = \xi_1 1_A = \xi_1 g f = \xi_2 g f = \xi_2$ .  $\square$

**Definizione 3.1.4.** Due morfismi  $A \xrightarrow{f} B$  e  $A' \xrightarrow{f'} B$  sono *equivalenti* se esiste un isomorfismo  $A \xrightarrow{g} A'$  tale che valga

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & & B \end{array}$$

*Osservazione 3.1.5.* L'equivalenza è chiaramente una relazione di equivalenza; inoltre se  $f$  è equivalente a un monomorfismo o a un epimorfismo, è esso stesso un monomorfismo o un epimorfismo.

**Definizione 3.1.6.** Un *sottooggetto* di  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$  è una classe di equivalenza di monomorfismi con immagine  $C$ .

**Definizione 3.1.7.** Data una categoria  $\mathcal{C}$ ,  $A \in \mathcal{C}$  è un *oggetto iniziale* se  $|\text{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, B\}| = 1$  per ogni  $B \in \mathcal{C}$ , è *oggetto finale* se  $|\text{Hom}_{\mathcal{C}}\{B, A\}| = 1$  per ogni  $B \in \mathcal{C}$ . Se  $A$  è iniziale e finale, è detto *zero* di  $\mathcal{C}$ .

*Osservazione 3.1.8.* Due oggetti iniziali  $A, B \in \mathcal{C}$  sono naturalmente isomorfi: esistono uniche  $A \xrightarrow{f} B$  e  $B \xrightarrow{g} A$ , e  $gf \in \text{Hom}_{\mathcal{C}} \{A, A\}$  deve essere l'identità e viceversa; allo stesso modo due oggetti finali sono naturalmente isomorfi.

**Definizione 3.1.9.** Una *categoria preadditiva* è una categoria  $\mathcal{C}$  tale che per ogni  $A, B \in \mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}} \{A, B\}$  è un gruppo abeliano con elemento neutro notato  $0_B^A$  e la composizione di funzioni è un morfismo di gruppi.

*Osservazione 3.1.10.* Se  $\mathcal{C}$  è preadditiva e  $A$  è un suo zero, allora  $\text{Hom}_{\mathcal{C}} \{A, B\}$  è costituito dal solo elemento neutro del gruppo e viceversa; in questo caso si scrive  $A = 0_{\mathcal{C}}$ .

*Osservazione 3.1.11.* Se la categoria è preadditiva,  $f$  è monomorfismo se e solo se per ogni  $fg = 0$  si ha  $g = 0$  ed è epimorfismo se e solo se per ogni  $gf = 0$  si ha  $g = 0$ , dove  $0$  è l'elemento neutro di un gruppo di morfismi.

**Definizione 3.1.12.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria preadditiva con  $0_{\mathcal{C}}$  e  $A \xrightarrow{f} B$ , allora il *kernel* di  $f$ , se esiste, è una classe di equivalenza di un morfismo  $K \xrightarrow{k} A$  tale che  $fk = 0_B^K$  e caratterizzata dalla proprietà universale: per ogni altro morfismo  $X \xrightarrow{\lambda} A$  con le stesse proprietà, esiste anche un unico morfismo  $X \xrightarrow{\gamma} K$  tale che

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \swarrow \gamma & \circlearrowleft & \nearrow \lambda & \\ & & X & & \end{array}$$

**Proposizione 3.1.13.** *La definizione è ben posta, cioè: se  $k$  soddisfa la proprietà universale del kernel di  $A \xrightarrow{f} B$  ed è equivalente a  $k'$  allora anche  $k'$  soddisfa la proprietà universale; viceversa, se  $k$  e  $k'$  soddisfano la proprietà universale allora sono equivalenti. Inoltre se  $k$  è un kernel, allora è monomorfismo.*

*Dimostrazione.* Se  $k$  soddisfa la proprietà universale ed è equivalente a  $k'$  allora esiste un isomorfismo  $\alpha$  tale che  $k' = k\alpha$ ; quindi  $fk' = fk\alpha = 0_B^{K'}$ , inoltre se esistono  $X$  e  $X \xrightarrow{\lambda} A$  tali che  $f\lambda = 0_B^X$ , esistono anche  $\gamma$  e  $\gamma' = \alpha^{-1}\gamma$

come in

$$\begin{array}{ccccc}
 K' & \xrightarrow{k'} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \searrow \alpha & \nearrow k & & \\
 & & K & & \\
 & \nearrow \gamma' & \downarrow \gamma & \nearrow \lambda & \\
 & & X & & 
 \end{array}$$

il morfismo  $\gamma'$  è unico perché lo è  $\gamma$ .

Viceversa, se  $k'$  soddisfa la proprietà universale, allora esistono  $\gamma$  e  $\gamma'$  tali che  $k\gamma = k'$  e  $k'\gamma' = k$ , cioè  $k\gamma\gamma' = k$  e  $k'\gamma'\gamma = k'$ ; per l'unicità richiesta dalla proprietà universale,  $\gamma\gamma' = 1_{K'}$  e  $\gamma'\gamma = 1_K$ , cioè  $k$  è equivalente a  $k'$ .

Sia  $X \xrightarrow{\xi} K$  un morfismo tale che  $k\xi = 0_A^X$ , allora  $fk\xi = 0_B^X$ , quindi esiste unico  $X \xrightarrow{\gamma} K$  tale che  $k\gamma = k\xi$ ; inoltre  $k\xi = 0_A^X = k0_K^X$ , quindi  $\gamma = \xi = 0_K^X$ .  $\square$

**Definizione 3.1.14.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria preadditiva con  $0_{\mathcal{C}}$  e  $A \xrightarrow{f} B$ , allora il *cokernel* di  $f$ , se esiste, è una classe di equivalenza di un morfismo  $B \xrightarrow{\chi} Q$  tale che  $\chi f = 0_Q^A$  e caratterizzata dalla proprietà universale: per ogni altro morfismo  $B \xrightarrow{\eta} Y$  con le stesse proprietà, esiste anche un unico morfismo  $Q \xrightarrow{\xi} Y$  tale che

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\chi} & Q \\
 & & \searrow \eta & \circlearrowleft & \nearrow \xi \\
 & & & & Y
 \end{array}$$

*Osservazione 3.1.15.* In modo analogo al kernel, si dimostra che la definizione del cokernel è ben posta e che un cokernel è sempre epimorfismo.

*Osservazione 3.1.16.* In generale si dirà che  $k$  è kernel di  $f$  per dire che il kernel di  $f$  è la classe di equivalenza di  $k$ , così per il cokernel, allo stesso modo in cui si scrive  $A = 0_{\mathcal{C}}$  per dire che  $A$  è uno zero di  $\mathcal{C}$ .

**Proposizione 3.1.17.** Sia  $A \xrightarrow{f} B$ ; se  $f$  è dotato di kernel, allora è monomorfismo se e solo se  $\ker f = 0_A^{0_{\mathcal{C}}}$ ; se  $f$  è dotato di cokernel, allora è epimorfismo se e solo se  $\text{coker } f = 0_{0_{\mathcal{C}}}^B$ .

*Dimostrazione.* Se  $f$  è monomorfismo, ovviamente  $f0_A^{0c} = 0_B^{0c}$ , inoltre se esiste  $X \xrightarrow{\lambda} A$  tale che  $f\lambda = 0_B^X$ , anche  $f0_A^X = 0_B^X$ , quindi  $\lambda = 0_A^X$  perché  $f$  è monomorfismo, e ponendo  $\gamma = 0_{0c}^X$  si ha che  $0_A^{0c}$  soddisfa la proprietà universale.

Viceversa, se  $0_A^{0c}$  è il kernel di  $f$  e  $f\lambda = 0_B^X$ , per la proprietà universale esiste un morfismo  $X \xrightarrow{\gamma} 0_c$  tale che  $0_A^{0c}\gamma = \lambda$ , cioè  $\lambda = 0_A^X$ , quindi  $f$  è monomorfismo.  $\square$

**Proposizione 3.1.18.** *Sia  $\mathcal{C}$  una categoria dotata di tutti i kernel e i cokernel, allora se  $k = \ker f$ ,  $k = \ker \text{coker } k$ , se  $\chi = \text{coker } f$ ,  $\chi = \text{coker } \ker \chi$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\chi = \text{coker } k$ , allora si deve dimostrare che  $k = \ker \chi$ . Sia quindi  $X \xrightarrow{\lambda} A$  un morfismo tale che  $\chi\lambda = 0_Q^X$ :

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \swarrow \gamma & \nearrow \lambda & \searrow \chi & \nearrow \eta \\ & & X & & Q \end{array}$$

poiché  $\chi = \text{coker } k$  e  $fk = 0_B^K$ , esiste un unico morfismo  $Q \xrightarrow{\eta} B$  tale che  $\eta\chi = f$ , quindi  $f\lambda = \eta\chi\lambda = 0_B^X$ . Essendo  $k = \ker f$  e  $f\lambda = 0_B^X$ , esiste un unico morfismo  $X \xrightarrow{\gamma} K$  tale che  $k\gamma = \lambda$ , cioè  $k$  soddisfa la proprietà universale per essere kernel di  $\chi$ .  $\square$

*Osservazione 3.1.19.* Sia  $A \xrightarrow{f} B$  un morfismo,  $k = \ker f$ ,  $\chi = \text{coker } f$ ,  $\sigma = \text{coker } k$  e  $\nu = \ker \chi$ :

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\chi} & Q \\ & & \sigma \downarrow & \searrow \rho & \nearrow \nu & & \\ & & Q' & \xrightarrow{\bar{f}} & K' & & \end{array}$$

Poiché  $\nu = \ker \chi$  e  $\chi f = 0_Q^A$ , esiste un unico morfismo  $A \xrightarrow{\rho} K'$  tale che  $\nu\rho = f$ ; inoltre  $0_B^K = fk = \nu\rho k$  implica  $\rho k = 0$  perché  $\nu$  è monomorfismo. Di conseguenza esiste un unico morfismo  $Q' \xrightarrow{\bar{f}} K'$  tale che  $\bar{f}\sigma = \rho$ , in quanto

$\sigma = \text{coker } k$ . Infine si ha  $\nu \bar{f} \sigma = f$ . In generale,  $\bar{f}$  non è un isomorfismo; una categoria in cui per ogni  $f$ ,  $\bar{f}$  così costruito è un isomorfismo si dice soddisfare la proprietà (ab).

**Definizione 3.1.20.** Una *categoria preabeliana*  $\mathcal{C}$  è una categoria preadditiva con  $0_{\mathcal{C}}$ , dotata di tutti i kernel e i cokernel e che verifica (ab).

**Lemma 3.1.21.** *Se  $g$  è un monomorfismo allora  $\ker f = \ker gf$ ; se  $f$  è un epimorfismo allora  $\text{coker } g = \text{coker } gf$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $k = \ker f$  e  $k' = \ker gf$ , allora  $fk = 0_B^K$  e  $gfk' = 0_C^{K'}$ , da cui si ha  $gfk = 0_C^K$  e  $fk' = 0_B^{K'}$  perché  $g$  è monomorfismo. Quindi esistono  $\gamma$  e  $\gamma'$  tali che  $k\gamma = k'$  e  $k'\gamma' = k$ , ma questo implica che  $k$  e  $k'$  sono equivalenti.  $\square$

**Teorema 3.1.22.** *Sia  $\mathcal{C}$  una categoria preadditiva con  $0_{\mathcal{C}}$  e dotata di tutti i kernel e i cokernel, allora  $\mathcal{C}$  è preabeliana se e solo se ogni morfismo  $f$  si può esprimere come  $k\chi$  dove  $k$  è un kernel e  $\chi$  è un cokernel.*

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{C}$  verifica (ab) allora  $f = \nu \bar{f} \sigma$  e  $\nu$  è un kernel mentre  $\bar{f} \sigma$  è un cokernel in quanto equivalente a  $\sigma$ .

Viceversa, se ogni  $f$  si può scrivere come  $\xi\eta$  con  $\xi$  monomorfismo e  $\eta$  epimorfismo, allora

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\chi} & Q \\
 & & \searrow \eta & & \nearrow \xi & & \\
 & & & X & & & \\
 & & \swarrow \alpha & & \searrow \beta & & \\
 & & Q' & \xrightarrow{\bar{f}} & K' & & \\
 & & \downarrow \sigma & & \uparrow \nu & & 
 \end{array}$$

Poiché  $\xi$  è un kernel, è un monomorfismo, quindi  $\ker \eta = \ker \eta\xi = \ker f = k$ ; inoltre  $\eta$  è un coker, quindi  $\eta = \text{coker } \ker \eta = \text{coker } k$ , cioè  $\eta$  e  $\sigma$  sono equivalenti, quindi esiste un isomorfismo  $\alpha$  tale che  $\alpha\sigma = \eta$ . Procedendo dall'altra parte, dal fatto che  $\eta$  è un cokernel si ha che è un epimorfismo,

quindi  $\text{coker } \xi = \text{coker } \eta\xi = \text{coker } f = \chi$ , inoltre  $\xi$  è un kernel, quindi  $\xi = \ker \text{coker } \xi = \ker \chi$ , cioè  $\xi$  e  $\nu$  sono equivalenti, perciò esiste un isomorfismo  $\beta$  tale che  $\nu\beta = \xi$ .

Quindi da un lato  $f = \nu\bar{f}\sigma$ , dall'altro  $f = \xi\eta = \nu\alpha\beta\sigma$ , ma  $\nu$  è monomorfismo e  $\sigma$  è epimorfismo, perciò  $\bar{f} = \alpha\beta$  e  $\bar{f}$  è isomorfismo.  $\square$

**Lemma 3.1.23.** *Si ha  $\ker 0_{0_c}^B = 1_B$  e  $\text{coker } 0_A^{0_c} = 1_A$ .*

*Dimostrazione.* Chiaramente  $0_{0_c}^B 1_B = 0_{0_c}^B$ ; inoltre, se  $X \xrightarrow{\lambda} B$  è un morfismo per cui  $0_{0_c}^B \lambda = 0_{0_c}^X$ , allora lo stesso morfismo  $\lambda$  è tale che  $1_B \lambda = \lambda$ .  $\square$

**Proposizione 3.1.24.** *Sia  $\mathcal{C}$  una categoria preabeliana e  $A \xrightarrow{f} B$ , allora:*

- $f$  è un isomorfismo se e solo se è monomorfismo ed epimorfismo;
- $f$  è monomorfismo se e solo se  $f = \ker \text{coker } f$ ;
- $f$  è epimorfismo se e solo se  $f = \text{coker } \ker f$ .

*Dimostrazione.* Un isomorfismo è sempre monomorfismo ed epimorfismo; viceversa, se  $f$  è monomorfismo ed epimorfismo, allora  $\ker f = 0_A^{0_c}$  e  $\text{coker } f = 0_{0_c}^B$ . Poiché  $\ker 0_{0_c}^B = 1_B$  e  $\text{coker } 0_A^{0_c} = 1_A$ ,  $\bar{f} = f$  e  $f$  è un isomorfismo.

Se  $f$  è un kernel allora è sempre monomorfismo; viceversa, se  $f$  è monomorfismo, si può scrivere come  $\xi\eta$  con  $\xi$  monomorfismo e  $\eta$  epimorfismo, allora  $\eta = \text{coker } \ker \eta = \text{coker } \ker f = \text{coker } 0_A^{0_c}$ , quindi  $\eta$  è coequivalente a  $1_A$  e in particolare è un isomorfismo. Ora,  $\xi = \ker \text{coker } \xi = \ker \text{coker } f$ , ma essendo  $f$  equivalente a  $\xi$  si ha anche  $f = \ker \text{coker } f$ .  $\square$

**Definizione 3.1.25.** *L'immagine di un morfismo  $f$  è  $\text{Im } f = \ker \text{coker } f$ .*

**Lemma 3.1.26.** *Sia  $A \xrightarrow{f} B$  un epimorfismo, allora  $\text{Im } f = 1_B$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\chi = \text{coker } f$ , allora  $\chi f = 0_Q^A$ , ma  $f$  è un epimorfismo, quindi  $\chi = 0_Q^B$ ; di conseguenza  $\ker \chi = 1_B$ .  $\square$



## 3.2 Prodotti

**Definizione 3.2.1.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria e  $(C_j)_{j \in I}$  una famiglia di oggetti di  $\mathcal{C}$ ; se esiste, il *prodotto* della famiglia è la classe di equivalenza a meno di isomorfismi di un oggetto  $\prod C_i$  dotato della famiglia di morfismi  $(\pi_j)_{j \in I}$  tali che  $\prod C_i \xrightarrow{\pi_j} C_j$  è caratterizzata dalla proprietà universale: per ogni famiglia di morfismi  $X \xrightarrow{\eta_j} C_j$ , esiste un unico morfismo  $X \xrightarrow{\eta} \prod C_j$  tale che:

$$\begin{array}{ccc} & \prod C_i & \\ \eta \nearrow & \circlearrowleft & \searrow \pi_j \\ X & \xrightarrow{\eta_j} & C_j. \end{array}$$

*Osservazione 3.2.2.* Chiaramente la definizione è ben posta: se due oggetti soddisfano la proprietà universale allora sono isomorfi, se un oggetto soddisfa la proprietà universale, allora anche uno a lui isomorfo la soddisfa.

**Proposizione 3.2.3.** Se  $\prod C_i$  esiste, allora ogni  $\pi_j$  è un epimorfismo.

*Dimostrazione.* Siano  $C_j \xrightarrow{f,g} X$  tali che  $f\pi_j = g\pi_j$ ; allora esiste un morfismo  $C_j \xrightarrow{\eta} \prod C_i$  tale che  $\pi_k\eta$  è un qualsiasi morfismo<sup>1</sup> se  $j \neq k$ , mentre  $\pi_k\eta = 1_{C_j}$  se  $j = k$ . Quindi da  $f\pi_j = g\pi_j$  si ottiene  $f\pi_j\eta = g\pi_j\eta$ , ma  $\pi_j\eta = 1_{C_j}$  e si ha  $f = g$ .  $\square$

**Definizione 3.2.4.** Procedendo dualmente, dalla famiglia  $(C_j)_{j \in I}$  si definisce il *coprodotto* come la classe di equivalenza a meno di isomorfismi di un oggetto  $\coprod C_i$  dotato della famiglia di morfismi  $(\varepsilon_j)_{j \in I}$  tali che  $C_j \xrightarrow{\varepsilon_j} \coprod C_i$  è caratterizzata dalla proprietà universale: per ogni famiglia di morfismi  $C_j \xrightarrow{\xi_j} X$ , esiste un unico morfismo  $\coprod C_i \xrightarrow{\xi} X$  tale che:

$$\begin{array}{ccc} & \coprod C_i & \\ \varepsilon_j \nearrow & \circlearrowleft & \searrow \xi \\ C_j & \xrightarrow{\xi_j} & X. \end{array}$$

<sup>1</sup>Se  $\mathcal{C}$  è una categoria preadditiva si può evitare l'uso dell'assioma della scelta considerando  $0_{C_k}^{C_j}$ .

*Osservazione 3.2.5.* Ancora, la definizione è ben posta; inoltre le funzioni  $\varepsilon_j$  sono sempre monomorfismi.

**Definizione 3.2.6.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria preadditiva con  $0_{\mathcal{C}}$ ,  $I = \{0, \dots, n-1\}$  e  $(C_j)_{j \in I}$  una famiglia di oggetti di  $\mathcal{C}$ ; allora il *biprodotto* della famiglia è una classe di equivalenza a meno di isomorfismi di un oggetto  $\times C_i$  dotato di due famiglie di morfismi  $(\pi_j)_{j \in I}$  e  $(\varepsilon_j)_{j \in I}$  con  $\times C_i \xrightarrow{\pi_j} C_j$  e  $C_j \xrightarrow{\varepsilon_j} \times C_i$  tali che  $\pi_k \varepsilon_j = \delta_{jk}$  (cioè  $1_{\times C_i}$  se  $j = k$ ,  $0_{\times C_i}$  se  $j \neq k$ ) e  $\sum_{k \in I} \varepsilon_k \pi_j = 1_{\times C_i}$ .

**Teorema 3.2.7.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria preadditiva con  $0_{\mathcal{C}}$ ,  $I = \{0, \dots, n-1\}$  e  $(C_j)_{j \in I}$  una famiglia di oggetti di  $\mathcal{C}$ , allora sono equivalenti:

- esiste il prodotto della famiglia;
- esiste il biprodotto della famiglia;
- esiste il coprodotto della famiglia.

*Inoltre se si verificano queste condizioni, prodotto, coprodotto e biprodotto sono la stessa classe di equivalenza di oggetti di  $\mathcal{C}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\prod C_i$  il prodotto della famiglia di insiemi; per ogni  $j \in I$ , si considera la famiglia di funzioni  $C_j \xrightarrow{\delta_{jk}} C_k$  al variare di  $k \in I$ ; per la proprietà universale del prodotto, esiste  $C_j \xrightarrow{\eta_j} \prod C_i$ . Si ha  $\pi_k \eta_j = \delta_{jk}$  per costruzione. Si deve dimostrare che  $\sum_{j \in I} \eta_j \pi_j = 1_{\times C_i}$ , ma  $\pi_k \sum_{j \in I} \eta_j \pi_j = \sum_{j \in I} \pi_k \eta_j \pi_j = \sum_{j \in I} \delta_{kj} \pi_j = \pi_k = \pi_k 1_{\times C_i}$  ed essendo  $\pi_k$  epimorfismo, si ha l'uguaglianza.

Viceversa, se  $\times C_i$  è il biprodotto della famiglia, si deve dimostrare che è anche prodotto se dotato della famiglia di morfismi  $(\pi_j)_{j \in I}$ . Sia quindi  $X \xrightarrow{\eta_j} C_j$  una famiglia di morfismi, allora posto  $\eta = \sum_{j \in I} \varepsilon_j \eta_j$ , si ha  $\pi_k \eta = \pi_k \sum_{j \in I} \varepsilon_j \eta_j = \sum_{j \in I} \pi_k \varepsilon_j \eta_j = \sum_{j \in I} \delta_{kj} \eta_j = \eta_k$ ; se  $\eta'$  soddisfa la medesima proprietà allora  $\eta' = \eta' 1_{\times C_i} = \eta' \sum_{j \in I} \varepsilon_j \pi_j = \sum_{j \in I} \eta' \varepsilon_j \pi_j = \sum_{j \in I} \eta_j \pi_j = \sum_{j \in I} \eta \varepsilon_j \pi_j = \eta$ .  $\square$

**Definizione 3.2.8.** Una *categoria abeliana* è una categoria preabeliana in cui esistono tutti i prodotti delle famiglie finite di oggetti.

**Lemma 3.2.9.** Sia  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  una successione esatta in una categoria abeliana, allora  $gf = 0$ ; inoltre, se  $f$  è un monomorfismo allora  $f = \ker g$ .

*Dimostrazione.* L'esattezza della successione significa  $\ker g = \text{Im } f = \ker \text{coker } f$ . Sia  $B \xrightarrow{\chi} Q$  il coker di  $f$ , allora esiste un unico morfismo  $Q \xrightarrow{\xi} C$  tale che  $\xi\chi = g$ ; allora  $gf = \xi\chi f = \xi 0_Q^A = 0_C^A$  in quanto  $\chi f$  si annulla per le proprietà del cokernel. Se  $f$  è monomorfismo, si ha  $f = \ker \text{coker } f = \text{Im } f = \ker g$ .  $\square$

**Teorema 3.2.10.** Sia  $0_C \rightarrow C_1 \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C_2 \rightarrow 0_C$  una successione esatta in una categoria abeliana:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0_C & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & C_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \swarrow \varepsilon_1 & & \downarrow \alpha & & \nearrow \pi_2 \\
 & & & & C_1 \times C_2 & & 
 \end{array}$$

allora sono equivalenti:

- esiste  $C \xrightarrow{\lambda} C_1$  tale che  $\lambda f = 1_{C_1}$ ;
- esiste  $C_2 \xrightarrow{\gamma} C$  tale che  $g\gamma = 1_{C_2}$ ;
- esiste un isomorfismo  $C \xrightarrow{\alpha} C_1 \times C_2$  tale che  $\alpha f = \varepsilon_1$  e  $\pi_2 \alpha = g$ .

Se si verificano queste condizioni, la successione si dice *spezzante* e in particolare  $0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} C_1 \times C_2 \xrightarrow{\pi_2} C_2 \rightarrow 0$  è esatta.

*Dimostrazione.* Costruzione di  $\alpha$ . Se esiste  $C \xrightarrow{\lambda} C_1$  con  $\lambda f = 1_{C_1}$ , allora da  $C$  partono due morfismi verso  $C_1$  e  $C_2$ , rispettivamente  $\lambda$  e  $g$ ; poiché  $C_1 \times C_2$  è anche un prodotto, esiste un unico morfismo  $C \xrightarrow{\alpha} C_1 \times C_2$  tale che  $\pi_1 \alpha = \lambda$  e  $\pi_2 \alpha = g$ ; inoltre  $\alpha f = 1_{C_1 \times C_2} \alpha f = (\varepsilon_1 \pi_1 + \varepsilon_2 \pi_2) \alpha f = \varepsilon_1 \pi_1 \alpha f + \varepsilon_2 \pi_2 \alpha f = \varepsilon_1 \lambda f + \varepsilon_2 g f = \varepsilon_1 1_{C_1} + \varepsilon_2 0_C^A = \varepsilon_1$ .

$\alpha$  è epimorfismo. Sia  $C_1 \times C_2 \xrightarrow{\xi} X$  un morfismo tale che  $\xi\alpha = 0_X^C$  allora  $0 = \xi\alpha = \xi 1_{C_1 \times C_2} \alpha = \xi(\varepsilon_1\pi_1 + \varepsilon_2\pi_2)\alpha = \xi\varepsilon_1\pi_1\alpha + \xi\varepsilon_2\pi_2\alpha = \xi\alpha f\pi_1\alpha + \xi\varepsilon_2g = \xi\varepsilon_2g$  e poiché  $g$  è un epimorfismo  $\xi\varepsilon_2 = 0_X^{C_2}$ . Quindi  $\xi = \xi 1_{C_1 \times C_2} = \xi(\varepsilon_1\pi_1 + \varepsilon_2\pi_2) = \xi\varepsilon_1\pi_1 + \xi\varepsilon_2\pi_2 = \xi\alpha f\pi_1 + \xi\varepsilon_2\pi_2 = 0_X^{C_1 \times C_2}$ .

$\alpha$  è monomorfismo. Sia  $X \xrightarrow{\lambda} C$  un morfismo tale che  $\alpha\lambda = 0_{C_1 \times C_2}^X$ , allora  $0_{C_2}^X = \pi_2\alpha\lambda = g\lambda$ ; ma  $f$  è un monomorfismo e la successione è esatta, quindi  $f = \ker g$ . Per questo motivo esiste un unico morfismo  $X \xrightarrow{\gamma} C_1$  tale che  $f\gamma = \lambda$  e si ha  $0 = \alpha\lambda = \alpha f\gamma = \varepsilon_1\gamma$ , ma essendo  $\varepsilon_1$  monomorfismo,  $\gamma = 0$ .

Viceversa, se esiste l'isomorfismo  $\alpha$ , si può definire  $\lambda = \pi_1\alpha$ , allora  $\lambda f = \pi_1\alpha f = \pi_1\varepsilon_1 = 1_{C_1}$ .  $\square$

### 3.3 Limiti

**Definizione 3.3.1.** Una categoria si dice *piccola* se i suoi oggetti formano un insieme.

**Definizione 3.3.2.** Siano  $\mathcal{I}$  una categoria piccola e  $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtore covariante; un *cono* su  $F$  è un oggetto  $X \in \mathcal{C}$  munito di una famiglia di morfismi  $(\alpha_I)_{I \in \mathcal{I}}$  con  $X \xrightarrow{\alpha_I} F\{I\}$  tali che per ogni  $I \xrightarrow{\lambda} J$  si verifica

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha_I \swarrow & \circlearrowleft & \searrow \alpha_J \\ F\{I\} & \xrightarrow{F\{\lambda\}} & F\{J\} \end{array}$$

**Definizione 3.3.3.** Siano  $\mathcal{I}$  una categoria piccola e  $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtore covariante; un *limite* di  $F$  è una classe di equivalenza a meno di isomorfismi di un cono  $X$  dotato dei morfismi  $(\alpha_I)_{I \in \mathcal{I}}$  che soddisfa la proprietà universale: per ogni altro cono  $Y$  dotato dei morfismi  $(\xi_I)_{I \in \mathcal{I}}$ , esiste un unico morfismo  $Y \xrightarrow{\xi} X$  tale che per ogni  $I$  si abbia

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\xi} & X \\ \xi_I \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \alpha_I \\ & F\{I\} & \end{array}$$

*Osservazione 3.3.4.* La definizione è ben posta e il limite si indica con  $\varprojlim F$ .

*Esempio 3.3.5.* Sia  $\mathcal{I}$  una categoria piccola e discreta (in cui  $\text{Hom}\{I, I\} = \{1\}_I$  e  $\text{Hom}\{I, J\} = \emptyset$  se  $I \neq J$ ); allora  $X$  è un cono se  $\alpha_I = F\{1_I\}\alpha_I$ , cioè ogni oggetto è un cono; di conseguenza  $\varprojlim F = \prod_{I \in \mathcal{I}} F\{I\}$ , ove esista.

*Esempio 3.3.6.* Sia  $\mathcal{I} = \{I, J, K\}$  con i soli morfismi  $I \xrightarrow{u_K^I} K$  e  $J \xrightarrow{u_K^J} K$  oltre alle identità, allora  $X$  è un cono se  $\alpha_K = F\{u_K^I\}\alpha_I = F\{u_K^J\}\alpha_J$ , quindi il cono è completamente definito da  $\alpha_I$  e  $\alpha_J$ . In questo caso  $\varprojlim F$  è il *pullback* di  $F\{u_K^I\}$  e  $F\{u_K^J\}$ .

Se la categoria di destinazione è abeliana e  $u_K^I = 0_K^I$ , allora un cono è definito da una funzione  $X \xrightarrow{\alpha_J} F\{J\}$  tale che  $F\{u_K^J\}\alpha_J = 0_{F\{K\}}^X$ ; il limite di  $F$  in questo caso è il kernel di  $F\{u_K^J\}$ .

**Definizione 3.3.7.** Una categoria  $\mathcal{C}$  è *completa* se per ogni categoria piccola  $\mathcal{I}$  e ogni funtore covariante  $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ , esiste il limite  $\varprojlim F$ .

**Teorema 3.3.8.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria preadditiva con  $0_{\mathcal{C}}$ , allora  $\mathcal{C}$  è completa se e solo se ha tutti i prodotti e tutti i kernel.

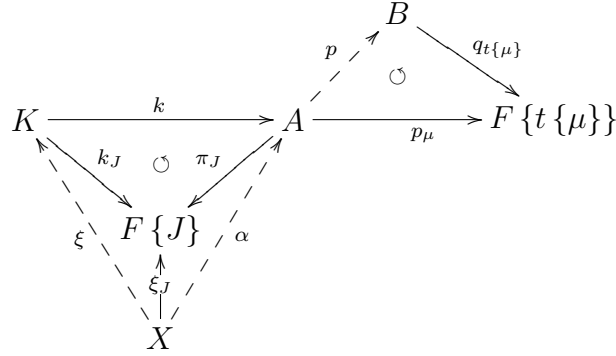
*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{C}$  è completa ha tutti i prodotti e i kernel in quanto sono particolari tipi di limite.

Costruzione di  $\varprojlim F$ . Si denota con  $\text{Hom}\{\mathcal{I}\}$  l'insieme di tutti i morfismi tra oggetti di  $\mathcal{I}$  e se  $\lambda \in \text{Hom}\{\mathcal{I}\}$ , il dominio di  $\lambda$  si scrive  $s\{\lambda\}$ , il codominio  $t\{\lambda\}$ . Si considerano  $A = \prod_{I \in \mathcal{I}} F\{I\}$ , dotato dei morfismi  $\pi_I$ , e  $B = \prod_{\lambda \in \text{Hom}\{\mathcal{I}\}} F\{t\{\lambda\}\}$ , dotato dei morfismi  $q\{t\{\lambda\}\}$ ; poiché

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_{s\{\lambda\}} \swarrow & & \searrow \pi_{t\{\lambda\}} \\ F\{s\{\lambda\}\} & \xrightarrow{F\{\lambda\}} & F\{t\{\lambda\}\} \end{array}$$

Non è commutativo, in generale si avrà  $p_\mu = F\{\mu\}\pi_{s\{\mu\}} - \pi_{t\{\mu\}}$  non nullo. Per la proprietà universale di  $B$ , esiste un morfismo  $A \xrightarrow{p} B$ ; siano  $k = \ker p$

e  $k_J = \pi_J k$ :



Costruzione di  $X \xrightarrow{\xi} K$ . Sia  $X$  un cono su  $F$  con la famiglia di morfismi  $\xi_J$ ; allora per la proprietà universale di  $A$ , esiste il morfismo  $X \xrightarrow{\alpha} A$ ; per fattorizzarlo tramite  $k$ , è necessario dimostrare che  $p\alpha = 0_B^X$  e questo è equivalente a mostrare che  $q_{t\{\mu\}}p\alpha = 0$  per ogni  $\mu \in \text{Hom}\{\mathcal{I}\}$ , perché se si verifica questa condizione, quei morfismi si sollevano in modo unico, quindi  $p\alpha = 0_B^X$ . Si ha  $q_{t\{\mu\}}p\alpha = (F\{\mu\}\pi_{s\{\mu\}} - \pi_{t\{\mu\}})\alpha = F\{\mu\}\pi_{s\{\mu\}}\alpha - \pi_{t\{\mu\}}\alpha = F\{\mu\}\xi_{s\{\mu\}} - \xi_{t\{\mu\}} = 0_{F\{t\{\mu\}\}}^X$ , in quanto  $X$  con i morfismi  $\xi_J$  è un cono su  $F$ . A questo punto, per la proprietà universale del kernel di  $p$ , esiste un unico morfismo  $X \xrightarrow{\xi} K$  tale che  $k\xi = \alpha$ .

$k_J\xi = \xi_J$  e  $\xi$  è unico. Si ha  $k_J\xi = \pi_J k\xi = \pi_J\alpha = \xi_J$ . Ora, se  $\xi'$  è un altro morfismo per cui  $k_J\xi' = \xi_J$ , allora  $k\xi' = \alpha$ : questo perché  $\pi_J k\xi' = k_J\xi' = \xi_J = \pi_J\alpha$ , per ogni  $J \in \mathcal{I}$ , quindi anche  $k\xi' = \alpha$ . Ma per la proprietà universale del kernel, esiste un unico  $\xi$  tale che  $k\xi = \alpha$ , quindi  $\xi' = \xi$ .  $\square$

**Definizione 3.3.9.** Sia  $\mathcal{I}$  una categoria che ha come oggetti gli elementi di un insieme parzialmente ordinato e in cui  $\text{Hom}_{\mathcal{I}}\{I, J\} = \{u_J^I\}$  se e solo se  $I \leq J$ ; un funtore  $F: \mathcal{I}^\circ \rightarrow \mathcal{C}$  è detto *sistema inverso* in  $\mathcal{C}$  se, posto  $\beta_I^J = F\{u_J^I\}$ , si ha  $\beta_I^J\beta_J^L = \beta_I^L$  per ogni  $I \leq J \leq L$ .

**Definizione 3.3.10.** Il limite di un sistema inverso  $F$  si dice *limite inverso*.

*Esempio 3.3.11.* Se  $\mathcal{I} = \mathbb{N}$  e  $\beta_n^{n+1} = F\{u_{n+1}^n\}$  allora  $F$  è un sistema inverso se  $\beta_n^{n+2} = \beta_n^{n+1}\beta_{n+1}^{n+2}$ ; sia inoltre  $X_n = F\{n\}$ . Al posto di considerare

$\prod_{n,k \in \mathbb{N}} X_t\{\beta_n^{n+k}\}$ , si può prendere solo  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_t\{\beta_n^{n+1}\} = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ , perché le mappe  $\beta_n^{n+k}$  con  $k \neq 1$  non modificano il kernel del morfismo  $p$ .

Siano ora  $A$  un anello,  $\mathfrak{I} \leq A$  un suo ideale,  $X_n = \frac{A}{\mathfrak{I}^n}$  e  $\beta_n^{n+1} \{a + \mathfrak{I}^{n+1}\} = a + \mathfrak{I}^n$ ;  $\beta_n^{n+1}$  è ben definita perché  $\mathfrak{I}^n \subseteq \mathfrak{I}^{n+1}$  e  $F$  è chiaramente un sistema inverso. In questo caso,

$$\begin{aligned} \varprojlim F &= \{ (a_n + \mathfrak{I}^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \beta_n^{n+1} \{a_{n+1} + \mathfrak{I}^{n+1}\} = a_n + \mathfrak{I}^n \} \\ &= \{ (a_n + \mathfrak{I}^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_{n+1} - a_n \in \mathfrak{I}^{n+1} \}, \end{aligned}$$

e in particolare se  $A = k[x]$  e  $\mathfrak{I} = (x)$ ,  $\varprojlim F = k[[x]]$ ; se  $A$  è un anello locale e  $\mathfrak{I}$  è il suo ideale massimale,  $\varprojlim F$  dà una descrizione del comportamento analitico della varietà intorno al punto in cui si è localizzato.

*Osservazione 3.3.12.* Se  $\varphi: F \rightarrow G$  è un morfismo functoriale tra funtori covarianti da  $\mathcal{I}$  a  $\mathcal{C}$  che ammettono limiti con morfismi di definizione rispettivamente  $\alpha_I$  e  $\beta_I$ , allora

$$\begin{array}{ccccc} & & F\{I\} & \xrightarrow{\varphi_I} & G\{I\} \\ & \nearrow \alpha_I & \downarrow F\{\lambda\} & \circlearrowleft & \downarrow G\{\lambda\} \\ \varprojlim F & \circlearrowleft & & \circlearrowright & \\ & \searrow \alpha_J & F\{J\} & \xrightarrow{\varphi_J} & G\{J\} \end{array};$$

cioè  $\varprojlim F$  è un cono su  $G$  grazie ai morfismi  $\varphi_I \alpha_I$ ; per questo motivo, esiste un unico morfismo  $\varprojlim F \xrightarrow{\varprojlim \varphi} \varprojlim G$  tale che

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim F & \xrightarrow{\varprojlim \varphi} & \varprojlim G \\ & \searrow \varphi_I \alpha_I & \swarrow \beta_I \\ & G\{I\} & \end{array}.$$

Se  $\mathcal{C}$  è completa, si può parlare del funtore  $\varprojlim$  dalla categoria  $\text{Hom}\{\mathcal{I}, \mathcal{C}\}$  a  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 3.3.13.** *Il funtore  $\varprojlim$  è esatto a sinistra.*

*Dimostrazione.* Bisogna dimostrare che se per ogni  $I \in \mathcal{I}$  sono esatte le successioni  $0_{\mathcal{C}} \rightarrow F\{I\} \xrightarrow{\varphi_I} G\{I\} \xrightarrow{\psi_I} H\{I\}$ , è esatta anche la successione

$$0_{\mathcal{C}} \rightarrow \varprojlim F \xrightarrow{\varprojlim \varphi} \varprojlim G \xrightarrow{\varprojlim \psi} \varprojlim H.$$

$\varprojlim \varphi$  è un monomorfismo. Sia  $X \xrightarrow{\xi} \varprojlim F$  un morfismo tale che  $\varprojlim \varphi \xi = 0_{\varprojlim \psi}^X$ ; allora per ogni  $I \in \mathcal{I}$ ,  $\beta_I \varprojlim \varphi \xi = 0_{G\{I\}}^X$ , ma  $\beta_I \varprojlim \varphi \xi = \varphi_I \alpha_I \xi$  ed essendo  $\varphi_I$  un monomorfismo,  $\alpha_I \xi = 0_{F\{I\}}^X$  per ogni  $I \in \mathcal{I}$  e da questo segue  $\xi = 0_{\varprojlim F}^X$ .

$\text{Im } \varprojlim \varphi = \ker \varprojlim \psi$ . Poiché  $\varprojlim \varphi$  è un monomorfismo, si ha  $\varprojlim \varphi = \ker \text{coker } \varprojlim \varphi = \text{Im } \varprojlim \varphi$ , quindi basta dimostrare che  $\varprojlim \varphi = \ker \varprojlim \psi$ . Sia quindi  $X \xrightarrow{\lambda} \varprojlim G$  un morfismo tale che  $\varprojlim \psi \lambda = 0_{\varprojlim H}^X$ , allora si annullano tutti i  $\gamma_I \varprojlim \psi \lambda = \psi_I \beta_I \lambda$ . Poiché  $\varphi_I$  è un monomorfismo, si ha  $\varphi_I = \ker \psi_I$ , quindi per ogni  $I \in \mathcal{I}$  esiste un unico morfismo  $X \xrightarrow{\eta_I} F\{I\}$  tale che  $\varphi_I \eta_I = \beta_I \lambda$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varprojlim F & \xrightarrow{\varprojlim \varphi} & \varprojlim G & \xrightarrow{\varprojlim \psi} & \varprojlim H \\ & & \downarrow \alpha_I & \nearrow \xi & \downarrow \beta_I & \circlearrowleft & \downarrow \gamma_I \\ & & & X & & & \\ & & \downarrow \eta_I & \nearrow \lambda & & & \\ 0 & \longrightarrow & F\{I\} & \xrightarrow{\varphi_I} & G\{I\} & \xrightarrow{\psi_I} & H\{I\}. \end{array}$$

Si ha quindi una famiglia di morfismi  $(\eta_I)_{I \in \mathcal{I}}$ , allora si può mostrare che  $X$  con questa famiglia è un cono su  $F$ : si deve mostrare che, preso un morfismo  $I \xrightarrow{\lambda} J$ ,  $\eta_J = F\{\mu\} \eta_I$ , che è equivalente a dimostrare  $\varphi_J \eta_J = \varphi_J F\{\mu\} \eta_I$  in quanto  $\varphi_J$  è monomorfismo. Si ha  $\varphi_J \eta_J = \beta_J \lambda = G\{\mu\} \beta_I \lambda = G\{\mu\} \varphi_I \eta_I = \varphi_J F\{\mu\} \eta_I$ , perché  $\varprojlim G$  è un cono su  $G$ . Per la proprietà universale si  $\varprojlim F$ , esiste un unico morfismo  $X \xrightarrow{\xi} \varprojlim F$  tale che  $\alpha_I \xi = \eta_I$ . Rimane da dimostrare che  $\varprojlim \varphi \xi = \lambda$ , ma per ogni  $I \in \mathcal{I}$ ,  $\beta_I \varprojlim \varphi \xi = \varphi_I \alpha_I \xi = \varphi_I \eta_I = \beta_I \lambda$ , da cui  $\varprojlim \varphi \xi = \lambda$ .  $\square$

**Teorema 3.3.14.** *Sia  $(T, H)$  una coppia di funtori aggiunti,  $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$ ,*



allora  $\varprojlim HF = H \{ \varprojlim F \}$  e se  $\varprojlim F$  è definito dai morfismi  $\alpha_I$ , allora  $\varprojlim HF$  è definito dai morfismi  $H \{ \alpha_I \}$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $H$  è un funtore, subito si ha che  $H \{ \varprojlim F \}$  dotato dei morfismi  $H \{ \alpha_I \}$  è un cono su  $HF$ . Si prenda un cono  $X$  su  $HF$  con i morfismi  $X \xrightarrow{\xi_I} HF \{ I \}$ .

Esiste  $X \xrightarrow{\xi} H \{ \varprojlim F \}$ . Dal fatto che  $X$  è un cono si ha  $HF \{ \mu \} \xi_I = \xi_J$  e applicando  $T$  si ha  $THF \{ \mu \} T \{ \xi_I \} = T \{ \xi_J \}$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & THF \{ I \} & \xrightarrow{\rho_{F\{I\}}} & F \{ I \} & \\
 T \{ \xi_I \} \nearrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 T \{ X \} & THF \{ \mu \} & \circ & F \{ \mu \} & \\
 T \{ \xi_J \} \searrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & THF \{ J \} & \xrightarrow{\rho_{F\{J\}}} & F \{ J \} & ,
 \end{array}$$

dove  $\rho$  è la counità dell'aggiunzione. Quindi  $T \{ X \}$  è un cono su  $F$  con i morfismi  $\rho_{F\{I\}} T \{ \xi_I \}$  e perciò esiste un unico morfismo  $T \{ X \} \xrightarrow{\eta} \varprojlim F$  tale che  $\alpha_I \eta = \rho_{F\{I\}} T \{ \xi_I \}$ ; sia  $\xi = \Lambda_{\varprojlim F}^X \{ \eta \}$ ;  $\xi$  va da  $X$  a  $H \{ \varprojlim F \}$ . Perché  $\xi$  sia il morfismo cercato deve essere  $H \{ \alpha_I \} \xi = \xi_I$ , ma per le proprietà dell'aggiunzione

$$\begin{aligned}
 H \{ \alpha_I \} \xi &= H \{ \alpha_I \} \Lambda_{\varprojlim F}^X \{ \eta \} \\
 &= \Lambda_{F\{I\}}^X \{ \alpha_I \eta \} \\
 &= \Lambda_{F\{I\}}^X \{ \rho_{F\{I\}} T \{ \xi_I \} \} \\
 &= \Lambda_{F\{I\}}^{HF\{I\}} \{ \rho_{F\{I\}} \} \xi_I \\
 &= \Lambda_{F\{I\}}^{HF\{I\}} \left\{ \left( \Lambda_{F\{I\}}^{HF\{I\}} \right) \{ 1_{HF\{I\}} \} \right\} \xi_I \\
 &= \xi_I.
 \end{aligned}$$

$\xi$  è unico. Sia  $\xi'$  un altro morfismo tale che  $H \{ \alpha_I \} \xi' = \xi_I$ , per cui cioè si ha  $H \{ \alpha_I \} \xi' = H \{ \alpha_I \} \xi$ ;  $\Lambda_{\varprojlim F}^X$  è un isomorfismo, quindi esiste  $\eta'$  tale che  $\xi' = \Lambda_{\varprojlim F}^X \{ \eta' \}$ . Allora da un lato  $H \{ \alpha_I \} \xi' = H \{ \alpha_I \} \Lambda_{\varprojlim F}^X \{ \eta' \} = \Lambda_{F\{I\}}^X \{ \alpha_I \eta' \}$ ,

dall'altro procedendo allo stesso modo  $H \{\alpha_I\} \Lambda_{\varprojlim F}^X \{\eta\} = \Lambda_{F\{I\}}^X \{\alpha_I \eta\}$ ; allora, sempre perché  $\Lambda_{F\{I\}}^X$  è un isomorfismo, si ha  $\alpha_I \eta' = \alpha_I \eta$  per ogni  $I \in \mathcal{I}$ , quindi  $\eta = \eta'$  e  $\xi = \xi'$ .  $\square$

*Osservazione 3.3.15.* Si possono definire tutti i concetti duali, cioè quelli di *cocono*, *colimite* (notato  $\varinjlim F$ ), di categoria *cocompleta*, di *sistema diretto* e di *limite diretto*. Valgono quindi i risultati duali:

- una categoria è cocompleta se e solo se ha tutti i cokernel e i coprodotti;
- $\varinjlim$  è un funtore ed è esatto a destra;
- se  $(T, H)$  è una coppia di funtori aggiunti, allora  $\varinjlim TF = T \{\varinjlim F\}$ .

## 4 Funtori derivati

### 4.1 Complessi

**Definizione 4.1.1.** Un complesso di  $A$ -moduli destri è una successione  $C_\bullet = (C_n, \partial_n^{C_\bullet})_{n \in \mathbb{Z}}$  tale che  $C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^{C_\bullet}} C_n \xrightarrow{\partial_n^{C_\bullet}} C_{n-1}$  e  $\partial_n^{C_\bullet} \partial_{n+1}^{C_\bullet} = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .  $\partial_n^{C_\bullet}$  è detto operatore differenziale; l' $n$ -ciclo di  $C_\bullet$  è  $Z_n \{C_\bullet\} := \ker \partial_n^{C_\bullet}$ ; l' $n$ -bordo di è  $B_n \{C_\bullet\} := \text{Im } \partial_{n+1}^{C_\bullet}$ . Si ha  $B_n \subseteq Z_n$  e  $H_n \{C_\bullet\} := \frac{Z_n \{C_\bullet\}}{B_n \{C_\bullet\}}$  è detto  $n$ -esimo modulo di omologia di  $C_\bullet$ .

**Definizione 4.1.2.** Dati  $C_\bullet, D_\bullet$ , un morfismo di complessi tra i due è  $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet$  e consiste nel definire  $C_n \xrightarrow{\varphi_n} D_n$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  in modo che il diagramma seguente sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & D_{n+1} \\ \partial_{n+1}^{C_\bullet} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \partial_{n+1}^{D_\bullet} \\ C_n & \xrightarrow{\varphi_n} & D_n \end{array}$$

**Lemma 4.1.3.** Dato un complesso  $C_\bullet$  (omesso nelle notazioni), si possono indurre i morfismi  $\hat{\partial}_n: \text{coker } \partial_{n+1} \rightarrow \ker \partial_{n-1}$ ; questi morfismi sono tali che  $\ker \hat{\partial}_n = H_n$  e  $\text{coker } \hat{\partial}_n = H_{n-1}$ .

*Dimostrazione.* Si ha  $\text{coker } \partial_{n+1} = \frac{C_n}{\text{Im } \partial_{n+1}} = \frac{C_n}{B_n}$ , mentre  $\ker \partial_{n-1} = Z_{n-1}$ ; quindi si cerca un morfismo  $\hat{\partial}_n: \frac{C_n}{B_n} \rightarrow Z_{n-1}$ ; si ponga  $\hat{\partial}_n \{c_n + B_n\} = \partial_n \{c_n\}$ . Questo morfismo ha come codominio  $Z_{n-1}$  perché  $\partial_{n-1} \partial_n = 0$  ed è ben definito in quanto se  $c_n \in B_n$ , allora  $c_n \in \partial_{n+1} \{C_{n+1}\}$  e  $\partial_n \partial_{n+1} \{C_{n+1}\} = 0$ .

Risulta  $\ker \hat{\partial}_n = \frac{\ker \partial_n}{B_n} = H_n$ , mentre  $\text{coker } \hat{\partial}_n = \frac{Z_{n-1}}{\text{Im } \partial_n} = H_{n-1}$ .  $\square$

*Osservazione 4.1.4.* Da un morfismo di complessi  $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet$  si possono indurre anche i seguenti morfismi.

- Un morfismo tra i moduli di omologia:

$$\begin{aligned} H_n \{\varphi\} : \frac{Z_n \{C_\bullet\}}{B_n \{C_\bullet\}} = H_n \{C_\bullet\} &\longrightarrow H_n \{D_\bullet\} = \frac{Z_n \{D_\bullet\}}{B_n \{D_\bullet\}} \\ z_n + B_n \{C_\bullet\} &\longmapsto \varphi_n \{z_n\} + B_n \{D_\bullet\}. \end{aligned}$$

$H_n \{\varphi\}$  è ben definito perché se  $z_n \in B_n \{C_\bullet\}$ ,  $\varphi_n \{z_n\} \in B_n \{D_\bullet\}$ : infatti se  $z_n$  è immagine di  $\partial_{n+1}^{C_\bullet}$ , percorrendo il diagramma nel verso contrario risulta che  $\varphi_n \{z_n\}$  è immagine di  $\partial_{n+1}^{D_\bullet}$ , cioè  $\varphi_n \{z_n\} \in B_n \{D_\bullet\}$ .

- Un morfismo tra i cokernel degli operatori differenziali:

$$\Gamma_n \{\varphi\} : \frac{C_n}{B_n \{C_\bullet\}} = \text{coker } \partial_{n+1}^{C_\bullet} \longrightarrow \text{coker } \partial_{n+1}^{D_\bullet} = \frac{D_n}{B_n \{D_\bullet\}}$$

$$c_n + B_n \{C_\bullet\} \longmapsto \varphi_n \{c_n\} + B_n \{D_\bullet\}.$$

$\Gamma_n \{\varphi\}$  è ben definito per lo stesso motivo di  $H_n \{\varphi\}$ .

- Un morfismo tra i kernel degli operatori differenziali:

$$\Lambda_n \{\varphi\} : Z_{n-1} \{C_\bullet\} = \ker \partial_{n-1}^{C_\bullet} \longrightarrow \ker \partial_{n-1}^{D_\bullet} = Z_{n-1} \{D_\bullet\}$$

$$c_{n-1} \longmapsto \varphi_{n-1} \{c_{n-1}\}.$$

$\Lambda_n \{\varphi\}$  è ben definito perché se  $c_{n-1} \in Z_{n-1} \{C_\bullet\}$ , allora in particolare  $0 = \varphi_{n-2} \partial_{n-1}^{C_\bullet} \{c_{n-1}\} = \partial_{n-1}^{C_\bullet} \varphi_{n-1} \{c_{n-1}\}$ , cioè  $\varphi_{n-1} \{c_{n-1}\} \in Z_{n-1}$ .

*Osservazione 4.1.5.* Risulta commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \frac{C_n}{B_n \{C_\bullet\}} & \xrightarrow{\Gamma_n \{\varphi\}} & \frac{D_n}{B_n \{D_\bullet\}} \\ \hat{\partial}_n^{C_\bullet} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \hat{\partial}_n^{D_\bullet} \\ Z_{n-1} \{C_\bullet\} & \xrightarrow{\Lambda_n \{\varphi\}} & Z_{n-1} \{D_\bullet\}, \end{array}$$

in quanto

$$\begin{aligned} \Lambda_n \{\varphi\} \hat{\partial}_n^{C_\bullet} \{c_n + B_n \{C_\bullet\}\} &= \hat{\partial}_n^{D_\bullet} \Gamma_n \{\varphi\} \{c_n + B_n \{D_\bullet\}\} \\ &= \Lambda_n \{\varphi\} \partial_n^{C_\bullet} \{c_n\} &= \hat{\partial}_n^{D_\bullet} \{\varphi_n \{c_n\} + B_n \{D_\bullet\}\} \\ &= \varphi_{n-1} \partial_n^{C_\bullet} \{c_n\} &= \partial_n^{D_\bullet} \varphi_n \{c_n\}. \end{aligned}$$

Si può costruire anche il seguente diagramma completamente commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 C_n & \xrightarrow{\varphi_n} & D_n \\
 \partial_n^{C_\bullet} \downarrow & \searrow & \swarrow \partial_n^{D_\bullet} \\
 \text{coker } \partial_{n+1}^{C_\bullet} = \frac{C_n}{B_n\{C_\bullet\}} \xrightarrow{\Gamma_n\{\varphi\}} \frac{D_n}{B_n\{D_\bullet\}} = \text{coker } \partial_{n+1}^{D_\bullet} & \xrightarrow{\circ} & \\
 \hat{\partial}_n^{C_\bullet} \downarrow & & \downarrow \hat{\partial}_n^{D_\bullet} \\
 \text{ker } \partial_{n-1}^{C_\bullet} = Z_{n-1}\{C_\bullet\} \xrightarrow{\Lambda_n\{\varphi\}} Z_{n-1}\{D_\bullet\} = \text{ker } \partial_{n-1}^{D_\bullet} & & \\
 \downarrow & \swarrow & \searrow \downarrow \\
 C_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & D_{n-1}
 \end{array}$$

**Lemma 4.1.6.** Siano  $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet \xrightarrow{\psi} E_\bullet$  morfismi di complessi, allora  $\psi\varphi$  definito da  $(\psi\varphi)_n = \psi_n\varphi_n$  è ancora un morfismo e  $H_n\{\psi\varphi\} = H_n\{\psi\}H_n\{\varphi\}$ .

*Dimostrazione.* L'applicazione costruita è ovviamente un morfismo. Si ha  $H_n\{\psi\}\{H_n\{\varphi\}\{c_n + B_n\{C_\bullet\}\}\} = H_n\{\psi\}\{\varphi_n\{c_n\} + B_n\{D_\bullet\}\} = \psi_n\varphi_n\{c_n\} + B_n\{E_\bullet\} = H_n\{\psi\varphi\}\{c_n + B_n\{C_\bullet\}\}$ .  $\square$

**Lemma 4.1.7** (del serpente). Se il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & B & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \alpha & \circ & \downarrow \beta & \circ & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\varepsilon'} & B' & \xrightarrow{\pi'} & C'
 \end{array}$$

ha le righe esatte, allora per la commutatività esistono  $\varepsilon_\star, \pi_\star, \varepsilon'_\star, \pi'_\star$  come

nel diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \ker \alpha & \xrightarrow{\varepsilon_*} & \ker \beta & \xrightarrow{\pi_*} & \ker \gamma \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
 & & A & \xrightarrow{\varepsilon} & B & \xrightarrow{\pi} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & \circlearrowleft & \downarrow \beta & \circlearrowleft & \downarrow \gamma \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\varepsilon'} & B' & \xrightarrow{\pi'} & C' \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
 & & \operatorname{coker} \alpha & \xrightarrow{\varepsilon'_*} & \operatorname{coker} \beta & \xrightarrow{\pi'_*} & \operatorname{coker} \gamma \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Inoltre esiste  $\ker \gamma \xrightarrow{\omega} \operatorname{coker} \alpha$  tale che

$$\ker \alpha \rightarrow \ker \beta \rightarrow \ker \gamma \rightarrow \operatorname{coker} \alpha \rightarrow \operatorname{coker} \beta \rightarrow \operatorname{coker} \gamma$$

sia esatta. Inoltre, se  $\varepsilon$  è iniettiva lo è anche  $\varepsilon_*$  e se  $\pi'$  è suriettiva lo è anche  $\pi'_*$ .

*Dimostrazione.* Costruzione di  $\omega$ . Sia  $c \in \ker \gamma$ , allora esiste  $b \in B$  tale che  $c = \pi \{b\}$ , quindi  $0 = \gamma \pi \{b\} = \pi' \beta \{b\}$ , cioè  $\beta \{b\} \in \ker \pi' = \operatorname{Im} \varepsilon'$ ; quindi esiste un  $a' \in A'$  tale che  $\varepsilon' \{a'\} = \beta \{b\}$ . Si definisce  $\omega \{c\} = a' + \operatorname{Im} \alpha$ . Per mostrare che  $\omega$  è ben definita, si prenda  $\bar{b}$  con  $\pi \{\bar{b}\} = c$ ;  $\bar{b}$  definisce  $\omega \{c\} = \bar{a}'$ . Allora  $b - \bar{b} \in \ker \pi = \operatorname{Im} \varepsilon$ , quindi esiste  $a \in A$  tale che  $\varepsilon \{a\} = b - \bar{b}$  e  $\varepsilon' \{a' - \bar{a}'\} = \beta \{b - \bar{b}\} = \beta \varepsilon \{a\} = \varepsilon' \alpha \{a\}$ . Per l'iniettività di  $\varepsilon'$ , si conclude  $a' - \bar{a}' = \alpha \{a\}$ , cioè  $a'$  e  $\bar{a}'$  sono nella stessa classe di  $\operatorname{coker} \alpha$ .

La successione è esatta. Si dimostrano le seguenti:

- $\operatorname{Im} \pi_* \subseteq \ker \omega$ : preso  $c \in \operatorname{Im} \pi_*$ , esiste  $b \in \ker \beta$  tale che  $c = \pi_* \{b\} = \pi \{b\}$ ; per la costruzione esiste  $a' \in A'$  con  $\beta \{b\} = \varepsilon' \{a'\}$ , ma  $b \in \ker \beta$

implica  $0 = \beta \{b\} = \varepsilon' \{a'\}$ , cioè  $a' \in \ker \varepsilon'$ ; per l'iniettività di  $\varepsilon'$ ,  $a' = 0$ , quindi  $\omega \{c\} = a' = 0$  e  $c \in \ker \omega$ ;

- $\text{Im } \pi_* \supseteq \ker \omega$ : preso  $c \in \ker \omega$ ,  $\omega \{c\} = 0 + \text{Im } \alpha$ , e si ha che per ogni  $b \in B$  tale che  $\beta \{b\} = \varepsilon' \{0\} = 0$ ,  $\pi \{b\} = c$ ; ma  $\beta \{b\} = 0$  significa  $b \in \ker \beta$ , cioè  $c \in \text{Im } \pi_*$ ;
- $\text{Im } \omega \subseteq \ker \varepsilon'_*$ : preso  $a' \in \text{Im } \omega$ , esiste  $c \in \ker \gamma$  con  $\omega \{c\} = a'$ ; per costruzione, per ogni  $b \in B$  tale che  $\beta \{b\} = \varepsilon' \{a'\}$  si ha  $\pi \{b\} = c$  ed esiste almeno uno di tali  $b$ ; quindi esiste  $b \in B$  con  $\beta \{b\} = \varepsilon' \{a'\}$ , cioè  $\varepsilon' \{a'\} \in \text{Im } \beta$ , cioè  $a' \in \ker \varepsilon'_*$ ;
- $\text{Im } \omega \supseteq \ker \varepsilon'_*$ :  $a' \in \ker \varepsilon'_*$  significa  $\varepsilon' \{a'\} \in \text{Im } \beta$ , cioè esiste  $b \in B$  tale che  $\beta \{b\} = \varepsilon' \{a'\}$ ; ma per costruzione di  $\omega$ ,  $\omega \pi \{b\} = a'$ , cioè  $a' \in \text{Im } \omega$ .  $\square$

**Teorema 4.1.8.** *Sia  $0 \rightarrow C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet \xrightarrow{\psi} E_\bullet \rightarrow 0$  una successione esatta (cioè tale che lo sia per ogni  $n$ ), allora per ogni  $n$  esiste un morfismo  $H_n \{E_\bullet\} \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1} \{C_\bullet\}$  tale che la successione*

$$\dots \rightarrow H_{n+1} \{E_\bullet\} \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n \{C_\bullet\} \xrightarrow{H_n \{\varphi\}} H_n \{D_\bullet\} \xrightarrow{H_n \{\psi\}} H_n \{E_\bullet\} \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1} \{C_\bullet\} \rightarrow \dots$$

sia esatta.

*Dimostrazione.* Per le osservazioni su  $\Gamma_n$  e  $\Lambda_n$  si può costruire il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{C_n}{B_n \{C_\bullet\}} & \xrightarrow{\Gamma_n \{\varphi\}} & \frac{D_n}{B_n \{D_\bullet\}} & \xrightarrow{\Gamma_n \{\psi\}} & \frac{E_n}{B_n \{E_\bullet\}} & \longrightarrow & 0 \\ \hat{\partial}_n^{C_\bullet} \downarrow & \circlearrowleft & \hat{\partial}_n^{D_\bullet} \downarrow & \circlearrowleft & \hat{\partial}_n^{E_\bullet} \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & Z_{n-1} \{C_\bullet\} & \xrightarrow{\Lambda_n \{\varphi\}} & Z_{n-1} \{D_\bullet\} & \xrightarrow{\Lambda_n \{\psi\}} & Z_{n-1} \{E_\bullet\} & \end{array}$$

e dimostrare che le righe sono esatte:

- $\Gamma_n \{\psi\}$  è suriettiva poiché lo è  $\psi_n$ ;

- $\Lambda_n \{\varphi\}$  è iniettiva poiché lo è  $\varphi_n$ ;
- $\text{Im } \Gamma_n \{\varphi\} \supseteq \ker \Gamma_n \{\psi\}$ : si consideri  $d_n + B_n \{D_\bullet\} \in \ker \Gamma_n \{\psi\}$ , allora

$$0 = \Gamma_n \{\psi\} \{d_n + B_n \{D_\bullet\}\} = \psi_n \{d_n\} + B_n \{E_\bullet\},$$

cioè  $\psi_n \{d_n\} \in B_n \{E_\bullet\} = \text{Im } \partial_{n+1}^{E_\bullet}$ , quindi esiste  $e_{n+1} \in E_{n+1}$  tale che

$$\psi_n \{d_n\} = \partial_{n+1}^{E_\bullet} \{e_{n+1}\};$$

ma  $\psi_{n+1}$  è suriettiva, quindi esiste  $d_{n+1} \in D_{n+1}$  tale che  $\psi_{n+1} \{d_{n+1}\} = e_{n+1}$ ; componendo si ha

$$\psi_n \{d_n\} = \partial_{n+1}^{E_\bullet} \psi_{n+1} \{d_{n+1}\} = \psi_n \partial_{n+1}^{D_\bullet} \{d_{n+1}\},$$

cioè  $d_n - \partial_{n+1}^{D_\bullet} \{d_{n+1}\} \in \ker \psi_n \subseteq \text{Im } \varphi_n$ . Quindi esiste  $c_n \in C_n$  tale che  $\varphi_n \{c_n\} = d_n - \partial_{n+1}^{D_\bullet} \{d_{n+1}\}$ ; passando ai quozienti,

$$\varphi_n \{c_n\} + B_n \{D_\bullet\} = d_n - \partial_{n+1}^{D_\bullet} \{d_{n+1}\} + B_n \{D_\bullet\} = d_n + B_n \{D_\bullet\},$$

da cui  $\Gamma_n \{\varphi\} \{c_n\} = d_n + B_n \{D_\bullet\} \in \text{Im } \Gamma_n \{\varphi\}$ .

- $\text{Im } \Gamma_n \{\varphi\} \subseteq \ker \Gamma_n \{\psi\}$ : sia  $d_n + B_n \{D_\bullet\} \in \text{Im } \Gamma_n \{\varphi\}$ , allora esiste  $c_n \in C_n$  tale che

$$\varphi_n \{c_n\} + B_n \{D_\bullet\} = d_n + B_n \{D_\bullet\}.$$

Applicando  $\Gamma_n \{\psi\}$ ,  $\Gamma_n \{\psi\} \{\varphi_n \{c_n\} + B_n \{D_\bullet\}\} = \psi_n \varphi_n \{c_n\} + B_n \{E_\bullet\} = 0 + B_n \{E_\bullet\}$ , poiché  $\psi_n \varphi_n = 0$ .

- $\text{Im } \Lambda_n \{\varphi\} \supseteq \ker \Lambda_n \{\psi\}$ : sia  $d_{n-1} \in \ker \Lambda_n \{\psi\}$ , allora

$$0 = \Lambda_n \{\psi\} \{d_{n-1}\} = \psi_{n-1} \{d_{n-1}\},$$

cioè  $d_{n-1} \in \ker \psi_{n-1} = \text{Im } \varphi_{n-1}$ . Quindi esiste  $c_{n-1} \in C_{n-1}$  tale che



$d_{n-1} = \varphi_{n-1} \{c_{n-1}\} = \Lambda_n \{\varphi\} \{c_{n-1}\}$ ; rimane da dimostrare che  $c_{n-1} \in Z_{n-1} \{C_\bullet\}$ ; si ha

$$\varphi_n \partial_{n-1}^{C_\bullet} \{c_{n-1}\} = \partial_{n-1}^{D_\bullet} \varphi_{n-1} \{c_{n-1}\} = \partial_{n-1}^{D_\bullet} \{d_{n-1}\} = 0$$

poiché  $d_{n-1} \in Z_{n-1} \{D_\bullet\}$ . Per l'iniettività di  $\varphi_n$  si conclude che  $\partial_{n-1}^{C_\bullet} \{c_{n-1}\} = 0$ .

- $\text{Im } \Lambda_n \{\varphi\} \subseteq \ker \Lambda_n \{\psi\}$ : sia  $d_{n-1} \in \text{Im } \Lambda_n \{\varphi\}$ , allora esiste  $c_{n-1} \in Z_{n-1} \{C_\bullet\}$  tale che  $d_{n-1} = \varphi_{n-1} \{c_{n-1}\}$ ; quindi  $\Lambda_n \{\psi\} \{d_{n-1}\} = \psi_{n-1} \varphi_{n-1} \{c_{n-1}\} = 0$ .

Il diagramma soddisfa le condizioni del lemma 4.1.7; applicandolo risulta  $\omega$  tale che

$$\ker \hat{\partial}_n^{C_\bullet} \rightarrow \ker \hat{\partial}_n^{D_\bullet} \rightarrow \ker \hat{\partial}_n^{E_\bullet} \xrightarrow{\omega} \text{coker } \hat{\partial}_n^{C_\bullet} \rightarrow \text{coker } \hat{\partial}_n^{D_\bullet} \rightarrow \text{coker } \hat{\partial}_n^{E_\bullet};$$

sostituendo si ha la seguente successione esatta:

$$H_n \{C_\bullet\} \rightarrow H_n \{D_\bullet\} \rightarrow H_n \{E_\bullet\} \xrightarrow{\omega} H_{n-1} \{C_\bullet\} \rightarrow H_{n-1} \{D_\bullet\} \rightarrow H_{n-1} \{E_\bullet\}.$$

□

## 4.2 Omotopie

**Definizione 4.2.1.** Dati  $C_\bullet \xrightarrow{\varphi, \psi} D_\bullet$  morfismi di complessi, un'omotopia tra  $\varphi$  e  $\psi$  è  $\varphi \xrightarrow{\Sigma} \psi$  costituita da  $C_n \xrightarrow{\Sigma_n} D_{n+1}$  per ogni  $n$ , con  $\varphi_n - \psi_n = \partial_{n+1}^{D_\bullet} \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \partial_n^{C_\bullet}$ .

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\Sigma_n} & D_{n+1} \\ \partial_n^{C_\bullet} \downarrow & \searrow \varphi_n & \downarrow \partial_{n+1}^{D_\bullet} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{\Sigma_{n-1}} & D_n \end{array}$$

Se esiste un'omotopia tra  $\varphi$  e  $\psi$  si scrive  $\varphi \simeq \psi$ .

*Osservazione* 4.2.2. Se  $\Sigma$  è un'omotopia, si ottiene che  $H_n \{\varphi\} \{c_n + B_n \{C_\bullet\}\} = \varphi_n \{c_n\} + B_n \{D_\bullet\} =$

$\psi_n \{c_n\} + \partial_{n+1}^{D_\bullet} \Sigma_n \{c_n\} + \Sigma_{n-1} \partial_n^{C_\bullet} \{c_n\} + B_n \{D_\bullet\} = \psi_n \{c_n\} + B_n \{D_\bullet\}$ : infatti  $\partial_{n+1}^{D_\bullet} \Sigma_n \{c_n\} \in B_n \{D_\bullet\}$ , mentre  $c_n \in Z_n \{C_\bullet\}$  implica  $\Sigma_{n-1} \partial_n^{C_\bullet} \{c_n\} = 0$ . Quindi si ottiene  $H_n \{\varphi\} = H_n \{\psi\}$ , cioè l'omotopia conserva i morfismi tra i moduli di omologia.

**Proposizione 4.2.3.** *L'omotopia è una relazione di equivalenza.*

*Dimostrazione.* La relazione è chiaramente riflessiva (con  $\Sigma_n = 0$ ) e simmetrica (con  $\Sigma'_n = -\Sigma_n$ ). Per dimostrare la transitività, siano  $\varphi \xrightarrow{\Sigma} \psi \xrightarrow{\Theta} \chi$  due omotopie; risulta  $\chi_n - \varphi_n = (\chi_n - \psi_n) + (\psi_n - \varphi_n) = \partial_{n+1}^{D_\bullet} \{\Sigma_n + \Theta_n\} + (\Sigma_{n-1} + \Theta_{n-1}) \partial_n^{C_\bullet}$ . Quindi  $\Sigma + \Theta$  è un'omotopia tra  $\varphi$  e  $\chi$ .  $\square$

**Lemma 4.2.4.** *Siano  $C_\bullet \xrightarrow{\varphi, \psi} D_\bullet \xrightarrow{\varphi', \psi'} E_\bullet$ . Se  $\varphi \simeq \psi$  allora  $\varphi' \varphi \simeq \varphi' \psi$ , mentre se  $\varphi' \simeq \psi'$  allora  $\varphi' \psi \simeq \psi' \psi$ .*

*Inoltre, se  $\varphi \simeq \psi$  e  $\varphi' \simeq \psi'$  allora  $\varphi' \varphi \simeq \psi' \psi$ .*

*Dimostrazione.* Per il primo caso, si ha  $\varphi'_n \varphi_n - \varphi'_n \psi_n = \varphi'_n \partial_{n+1}^{D_\bullet} \Sigma_n + \varphi'_n \Sigma_{n-1} \partial_n^{C_\bullet} = \partial_{n+1}^{E_\bullet} \varphi'_{n+1} \Sigma_n + \varphi'_n \Sigma_{n-1} \partial_n^{C_\bullet}$ ; quindi  $\varphi' \Sigma$  realizza l'omotopia tra  $\varphi' \varphi$  e  $\varphi' \psi$ , dove  $(\varphi' \Sigma)_n = \varphi'_{n+1} \Sigma_n$ . Allo stesso modo si verifica che la seconda omotopia cercata è data da  $\Theta \psi$ , con  $(\Theta \psi)_n = \Theta_n \psi_n$ .

Se  $\varphi \simeq \psi$  e  $\varphi' \simeq \psi'$ , per le dimostrazioni precedenti si ha  $\varphi' \varphi \simeq \varphi' \psi$  e  $\varphi' \psi \simeq \psi' \psi$ ; poiché l'omotopia è una relazione di equivalenza,  $\varphi' \varphi \simeq \psi' \psi$ .  $\square$

**Lemma 4.2.5.** *Sia  $F$  un funtore additivo e  $\varphi \simeq \psi$ , allora  $F \{\varphi\} \simeq F \{\psi\}$ , cioè un funtore additivo preserva l'omotopia; in particolare  $H_n \{F \{\varphi\}\} = H_n \{F \{\psi\}\}$ .*

*Dimostrazione.* Applicando il funtore al complesso  $C_\bullet$  si ottiene un altro complesso  $F \{C_\bullet\}$  con  $\partial_n^{F \{C_\bullet\}} = F \{\partial_n^{C_\bullet}\}$ : infatti  $F \{\partial_{n-1}^{C_\bullet}\} F \{\partial_n^{C_\bullet}\} = F \{\partial_{n-1}^{C_\bullet} \partial_n^{C_\bullet}\} = F \{0\} = 0$ , e la commutatività del diagramma segue da quella del complesso  $C_\bullet$ . Applicando  $F$  alla relazione di omotopia si conserva l'uguaglianza, quindi  $F \{\varphi\} \simeq F \{\psi\}$  tramite l'omotopia  $F \{\Sigma\}$ .  $\square$

*Esempio 4.2.6.* L'uguaglianza tra gli  $H_n \{\varphi\}$  non implica l'omotopia tra i  $\varphi$ :

si considerino i due complessi  $C_\bullet$  e  $D_\bullet$  legati dal morfismo  $\varphi$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_1 = \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & C_0 = \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi_0 = 1_{\mathbb{Z}} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & D_1 = \mathbb{Z} & \longrightarrow & D_0 = 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Poiché tutte le composizioni  $\varphi_{n-1}\partial_n^{C_\bullet}$  e  $\partial_n^{D_\bullet}\varphi_n$  sono nulle,  $\varphi$  è un morfismo di complessi.

Si ha  $H_n\{D_\bullet\} = 0$  per ogni  $n \neq 1$  e  $H_1\{C_\bullet\} = 0$ , quindi  $H_n\{\varphi\} = 0$  per ogni  $n$ , cioè  $H_n\{\varphi\} = H_n\{0\}$ , ma  $\varphi \neq 0$ . Infatti se per assurdo fosse così, preso un qualsiasi funtore additivo  $F$ , si avrebbe  $F\{\varphi\} \simeq F\{0\} = 0$ . Sia  $F$  il funtore  $\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ; applicando  $F$  e considerando che  $\mathbb{Z} \otimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ , il diagramma diventa:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F\{C_1\} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & \xrightarrow{0} & F\{C_0\} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow F\{\varphi_0\} = 1_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F\{D_1\} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & \longrightarrow & F\{D_0\} = 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

In particolare  $H_1\{F\{C_\bullet\}\} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = H_1\{F\{D_\bullet\}\}$  e  $H_1\{F\{\varphi\}\} = 1_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}$ , da cui si deduce  $F\{\varphi\} \neq 0$  e quindi  $\varphi \neq 0$ .

### 4.3 Risoluzioni proiettive

**Definizione 4.3.1.** Un complesso  $C_\bullet$  è detto positivo se  $C_n = 0$  per ogni  $n < 0$ , positivo aciclico se inoltre  $H_n\{C_\bullet\} = 0$  per ogni  $n > 0$ . Il complesso è detto proiettivo se lo sono tutti i  $C_n$ .

*Osservazione 4.3.2.* Un complesso positivo aciclico è quindi un complesso del tipo

$$\cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2^{C_\bullet}} C_1 \xrightarrow{\partial_1^{C_\bullet}} C_0 \longrightarrow 0,$$

con  $Z_n\{C_\bullet\} = B_n\{C_\bullet\}$  per ogni  $n > 0$ . La successione non è esatta perché

$\partial_1^{C_\bullet}$  non è suriettivo, ma si può renderla esatta in questo modo:

$$\dots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2^{C_\bullet}} C_1 \xrightarrow{\partial_1^{C_\bullet}} C_0 \xrightarrow{\pi} \frac{C_0}{B_0\{C_\bullet\}} = H_0\{C_\bullet\} \longrightarrow 0.$$

**Definizione 4.3.3.** Sia  $M$  un  $A$ -modulo destro, e  $C_\bullet$  un complesso proiettivo positivo aciclico con  $\frac{C_0}{B_0\{C_\bullet\}} = M$ ; allora  $C_\bullet$  è detto risoluzione proiettiva di  $M$  e si ha:

$$\dots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2^{C_\bullet}} C_1 \xrightarrow{\partial_1^{C_\bullet}} C_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

**Lemma 4.3.4.** Ogni modulo è immagine epimorfa di un modulo proiettivo.

*Dimostrazione.*  $A$  è un modulo proiettivo in quanto basta considerare  $h\{a\} = xa$  dove  $x \in M$  è tale che  $f\{x\} = g\{1\}$ :

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow h & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{f} & N \longrightarrow 0; \end{array}$$

$x$  esiste perché  $f$  è un epimorfismo. Si può dimostrare inoltre che  $\{P_i \mid i \in I\}$  è una famiglia di moduli proiettivi se e solo se  $\bigoplus_{i \in I} P_i$  è proiettivo. Da questo fatto si deduce che  $A^{(M)}$  è proiettivo per un qualsiasi insieme  $M$  e in particolare se  $M$  è un modulo. Un elemento di  $A^{(M)}$  è una funzione  $M \xrightarrow{f} A$  con  $\text{Supp } f$  finito; sia quindi  $A^{(M)} \xrightarrow{\varphi} M$  l'applicazione che associa a  $f$  l'elemento  $\sum_{m \in M} mf\{m\}$ . Questa applicazione è ben definita per l'osservazione sul supporto ed è chiaramente un epimorfismo.  $\square$

**Proposizione 4.3.5.** Ogni  $A$ -modulo destro ammette una risoluzione proiettiva.

*Dimostrazione.* Sia  $M$  un modulo; per il lemma precedente, ogni modulo è immagine epimorfa di un modulo proiettivo, cioè esiste un epimorfismo  $P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M$  con  $P_0$  proiettivo. Si costruisce il complesso per ricorrenza: si supponga di conoscere  $P_0, \dots, P_{n-1}$  e  $\partial_1^{P_\bullet}, \dots, \partial_{n-1}^{P_\bullet}$ ; per il lemma precedente, esiste un modulo proiettivo  $P_n$  e un epimorfismo  $P_n \xrightarrow{\varphi_n} \ker \varphi_{n-1}$ ; sia  $\partial_n^{P_\bullet}$  la

composizione di  $\varphi_n$  con l'iniezione di  $\ker \partial_{n-1}^{P_\bullet}$  in  $P_{n-1}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\partial_2^{P_\bullet}} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1^{P_\bullet}} & P_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varphi_2 & \nearrow \circlearrowleft & \downarrow \varphi_1 & \nearrow \circlearrowleft & \downarrow \varphi_0 \\
 & & \ker \varphi_1 & & \ker \varphi_0 & & M \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

Si ottiene un complesso positivo, aciclico e proiettivo per costruzione; inoltre  $\frac{P_0}{B_0\{P_\bullet\}} = \frac{P_0}{\text{Im } \varphi_1} = \frac{P_0}{\ker \varphi_0} = M$ .  $\square$

**Teorema 4.3.6** (del sollevamento). *Siano  $P_\bullet$  un complesso proiettivo positivo,  $D_\bullet$  un complesso positivo aciclico e  $H_0\{P_\bullet\} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} H_0\{D_\bullet\}$  un morfismo, allora esiste un morfismo di complessi  $\varphi$  tale che  $H_0\{\varphi\} = \tilde{\varphi}$ . Inoltre se anche  $\psi$  soddisfa  $H_0\{\psi\} = \tilde{\varphi}$ , si ha  $\varphi \simeq \psi$  (in particolare,  $H_n\{\varphi\}$  dipende solo da  $\tilde{\varphi}$ ).*

*Dimostrazione.* Siamo nella seguente situazione:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\partial_2^{P_\bullet}} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1^{P_\bullet}} & P_0 \xrightarrow{\pi_P} H_0\{P_\bullet\} \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow \tilde{\varphi} \\
 \cdots & \longrightarrow & D_2 & \xrightarrow{\partial_2^{D_\bullet}} & D_1 & \xrightarrow{\partial_1^{D_\bullet}} & D_0 \xrightarrow{\pi_D} H_0\{D_\bullet\} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Esistenza di  $\varphi$ . Poiché  $P_0$  è proiettivo, esiste  $P_0 \xrightarrow{\varphi_0} D_0$  tale che  $\pi_D \varphi_0 = \tilde{\varphi} \pi_P$ . Componendo a destra con  $\partial_1^{P_\bullet}$  si ottiene  $0 = \pi_D \varphi_0 \partial_1^{P_\bullet} = \tilde{\varphi} \pi_P \partial_1^{P_\bullet}$ , dato che l'immagine di  $\partial_1^{P_\bullet}$  viene annullata da  $\pi_P$ . Quindi si ricava che  $\text{Im } \varphi_0 \partial_1^{P_\bullet} \subseteq \ker \pi_D = \text{Im } \partial_1^{D_\bullet} = B_0\{D_\bullet\}$  e si può scrivere:

$$\begin{array}{ccc}
 & P_1 & \\
 \swarrow \varphi_1 & \downarrow \varphi_0 \partial_1^{P_\bullet} & \\
 D_1 & \xrightarrow{\partial_1^{D_\bullet}} & B_0\{D_\bullet\} \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

con  $\varphi_0 \partial_1^{P_\bullet} = \partial_1^{D_\bullet} \varphi_1$ ; procedendo per ricorrenza si costruisce  $\varphi$  per l'aciclicità di  $D_\bullet$ , grazie alla quale si può iterare il procedimento.

Unicità a meno di omotopie. Se  $\psi$  è un altro sollevamento, si cerca un'omotopia  $\psi \xrightarrow{\Sigma} \varphi$ . Chiaramente  $\Sigma_n = 0$  per ogni  $n < 0$ , quindi  $\Sigma_0$  deve soddisfare  $\psi_0 - \varphi_0 = \partial_1^{D_\bullet} \Sigma_0$ , ma  $\pi_D \{\psi_0 - \varphi_0\} = \tilde{\varphi} \pi_P - \tilde{\varphi} \pi_P = 0$  cioè  $\text{Im} \{\psi_0 - \varphi_0\} \subseteq \ker \pi_D = \text{Im} \partial_1^{D_\bullet} = B_0 \{D_\bullet\}$  e per la proiettività si può scrivere

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ \Sigma_0 \swarrow & \downarrow \psi_0 - \varphi_0 & \\ D_1 \xrightarrow{\partial_1^{D_\bullet}} & B_0 \{D_\bullet\} & \longrightarrow 0, \end{array}$$

quindi  $\Sigma_0$  esiste. Per ricorrenza,  $\Sigma_n$  deve soddisfare  $\psi_n - \varphi_n = \partial_{n+1}^{D_\bullet} \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \partial_n^{P_\bullet}$ . Per usare la proiettività di  $P_n$ , deve essere  $\text{Im} \{\psi_n - \varphi_n - \Sigma_{n-1} \partial_n^{P_\bullet}\} \subseteq B_n \{D_\bullet\} = \ker \partial_n^{D_\bullet}$ , e questo si verifica grazie all'ipotesi di ricorrenza. Quindi per proiettività esiste  $\Sigma_n$  con  $\partial_{n+1}^{D_\bullet} \Sigma_n = \psi_n - \varphi_n - \Sigma_{n-1} \partial_n^{P_\bullet}$ .  $\square$

**Lemma 4.3.7.** *Tutte le risoluzioni proiettive di un modulo sono nella stessa classe di omotopia, cioè se  $P_\bullet$  e  $Q_\bullet$  sono risoluzioni esistono  $\varphi$  e  $\psi$  tali che  $\varphi\psi \simeq 1_{Q_\bullet}$  e  $\psi\varphi \simeq 1_{P_\bullet}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $P_\bullet$  e  $Q_\bullet$  sono entrambe risoluzioni proiettive di un modulo  $M$ , si può prendere  $\tilde{\varphi} = 1_M$  e si ottengono quindi due sollevamenti  $P_\bullet \xrightarrow{\varphi} Q_\bullet$  e  $Q_\bullet \xrightarrow{\psi} P_\bullet$  con  $\varphi\psi \simeq 1_{Q_\bullet}$  e  $\psi\varphi \simeq 1_{P_\bullet}$ , poiché l'identità e  $\psi\varphi$  sono sollevamenti di  $1_M$  da  $P_\bullet$  a se stesso.  $\square$

Inoltre l'omotopia dà l'uguaglianza nelle coomologie, cioè  $1_{H_n \{P_\bullet\}} = H_n \{1_{P_\bullet}\} = H_n \{\psi\varphi\} = H_n \{\psi\} H_n \{\varphi\}$  e viceversa. Si ha quindi che le coomologie di  $P_\bullet$  e  $Q_\bullet$  sono isomorfe tramite  $H_n \{\varphi\}$  e  $H_n \{\psi\}$ .

## 4.4 Funtori derivati

*Osservazione 4.4.1.* Si consideri un funtore covariante additivo  $T$  dalla categoria degli  $A$ -moduli destri a quella dei gruppi abeliani, ad esempio il

prodotto tensoriale  $\bullet \otimes_A X$ . Preso un modulo  $M$  e una sua risoluzione proiettiva  $P_\bullet \rightarrow M \rightarrow 0$ , applicando  $T$  si ottiene un complesso con  $\partial_n^{T\{P_\bullet\}} \partial_{n+1}^{T\{P_\bullet\}} = T\{\partial_n^{P_\bullet}\} T\{\partial_{n+1}^{P_\bullet}\} = 0$ , ma l'esattezza non è più garantita e in particolare  $H_n\{T\{P_\bullet\}\}$  non è necessariamente nullo per ogni  $n > 0$ .

**Proposizione 4.4.2.** *Si ponga  $L_n^{P_\bullet}\{T\{M\}\} := H_n\{T\{P_\bullet\}\}$  e si consideri la seguente situazione:*

$$\begin{array}{ccccccc} P_\bullet & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \varphi \downarrow & & \tilde{\varphi} \downarrow & & \\ P'_\bullet & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

con  $P_\bullet, P'_\bullet$  risoluzioni proiettive di  $M, M'$  e  $\varphi$  un sollevamento di  $\tilde{\varphi}$ . Posto  $L_n^{P_\bullet, P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\} = H_n\{T\{\varphi\}\}$ ,  $L_n^{P_\bullet} T$  è ben definito e si comporta come un funtore.

*Dimostrazione.* La definizione di  $L_n^{P_\bullet, P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\}$  è ben posta perché  $\varphi$  è unico a meno di omotopie al variare del sollevamento e per il lemma 4.2.5 questo è sufficiente perché  $H_n\{\varphi\}$  sia unico. Si ha:

$$H_n\{T\{P_\bullet\}\} = L_n^{P_\bullet} T\{M\} \xrightarrow{H_n\{T\{\varphi\}\} = L_n^{P_\bullet, P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\}} L_n^{P'_\bullet} T\{M'\} = H_n\{T\{P'_\bullet\}\}.$$

Inoltre sono soddisfatte le seguenti.

- Per ogni  $M \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M' \xrightarrow{\tilde{\varphi}'} M''$  si ha  $L_n^{P_\bullet, P''_\bullet} T\{\tilde{\varphi}'\tilde{\varphi}\} = L_n^{P'_\bullet, P''_\bullet} T\{\tilde{\varphi}'\} L_n^{P_\bullet, P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\}$ . Infatti Presi  $\varphi$  e  $\varphi'$  sollevamenti, si ha  $L_n^{P'_\bullet, P''_\bullet} T\{\tilde{\varphi}'\} L_n^{P_\bullet, P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\} = H_n\{T\{\varphi'\}\} H_n\{T\{\varphi\}\} = H_n\{T\{\varphi'\}T\{\varphi\}\} = H_n\{T\{\varphi'\varphi\}\} = L_n^{P_\bullet, P''_\bullet} T\{\tilde{\varphi}'\tilde{\varphi}\}$ .
- Preso  $M$ ,  $L_n^{P_\bullet, P_\bullet} T\{1_M\} = 1_{L_n^{P_\bullet} T\{M\}}$ . Infatti un sollevamento di  $1_M$  è omotopicamente equivalente a  $1_{P_\bullet}$  e  $H_n\{T\{1_{P_\bullet}\}\} = 1_{H_n\{T\{P_\bullet\}\}}$ .  $\square$

**Lemma 4.4.3.** *Prese  $P_\bullet$  e  $Q_\bullet$  risoluzioni proiettive di  $M$ ,  $L_n^{P_\bullet} T\{M\}$  e  $L_n^{Q_\bullet} T\{M\}$  sono legate da un isomorfismo canonico.*

*Dimostrazione.* Esistono i sollevamenti  $\alpha_{PQ}$  e  $\alpha_{QP}$  (unici a meno di omotopie) dell'identità. Per le osservazioni precedenti si ha  $\alpha_{QP}\alpha_{PQ} \simeq 1_{P_\bullet}$  e ciò

implica  $T\{\alpha_{QP}\}T\{\alpha_{PQ}\} = T\{\alpha_{QP}\alpha_{PQ}\} \simeq T\{1_{P_\bullet}\} = 1_{T\{P_\bullet\}}$  perché  $T$  è additivo.

Da questa omotopia si ricava che  $1_{H_n\{T\{P_\bullet\}\}} = H_n\{1_{T\{P_\bullet\}}\} = H_n\{T\{\alpha_{QP}\}T\{\alpha_{PQ}\}\} = H_n\{T\{\alpha_{QP}\}\}H_n\{T\{\alpha_{PQ}\}\}$ . Chiaramente vale anche il viceversa, così  $H_n\{T\{\alpha_{QP}\}\}$  e  $H_n\{T\{\alpha_{PQ}\}\}$  realizzano un isomorfismo tra  $H_n\{T\{P_\bullet\}\}$  e  $H_n\{T\{Q_\bullet\}\}$ .  $\square$

**Lemma 4.4.4.** *Prese  $P_\bullet$  e  $Q_\bullet$  risoluzioni proiettive di  $M$ ,  $P'_\bullet$  e  $Q'_\bullet$  di  $M'$  e  $M \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M'$ , allora  $L_n^{P_\bullet P'_\bullet}T\{M\}$  e  $L_n^{Q_\bullet Q'_\bullet}T\{M\}$  sono compatibili con l'isomorfismo del lemma precedente.*

*Dimostrazione.* Si deve verificare che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} L_n^{P_\bullet}T\{M\} & \xrightarrow{L_n^{P_\bullet P'_\bullet}T\{\tilde{\varphi}\}} & L_n^{P'_\bullet}T\{M'\} \\ \downarrow L_n^{P_\bullet Q_\bullet}T\{1_M\} & & \downarrow L_n^{P'_\bullet Q'_\bullet}T\{1_{M'}\} \\ L_n^{Q_\bullet}T\{M\} & \xrightarrow{L_n^{Q_\bullet Q'_\bullet}T\{\tilde{\varphi}\}} & L_n^{Q'_\bullet}T\{M'\} \end{array}$$

sia commutativo. Si ha  $L_n^{P_\bullet Q_\bullet}T\{1_M\} = H_n\{T\{\alpha_{PQ}\}\}$ ,  $L_n^{P'_\bullet Q'_\bullet}T\{1_{M'}\} = H_n\{T\{\alpha_{P'Q'}\}\}$  e se si considera il sollevamento  $\varphi$  di  $\tilde{\varphi}$  come nel diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & & Q_\bullet & & \\ & & \downarrow \alpha_{QP} & \searrow & \\ & & P_\bullet & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & P'_\bullet & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_{P'Q'} & \nearrow & \\ & & Q'_\bullet & & \end{array}$$

chiaramente anche  $\alpha_{P'Q'}\varphi\alpha_{QP}$  è un sollevamento di  $\tilde{\varphi}$  e nel diagramma precedente si ha  $L_n^{P_\bullet P'_\bullet}T\{\tilde{\varphi}\} = H_n\{T\{\varphi\}\}$  e  $L_n^{Q_\bullet Q'_\bullet}T\{\tilde{\varphi}\} = H_n\{T\{\alpha_{P'Q'}\varphi\alpha_{QP}\}\}$ .



Quindi si deve dimostrare che

$$H_n \{T \{\alpha_{P'Q'}\}\} H_n \{T \{\varphi\}\} = H_n \{T \{\alpha_{P'Q'}\varphi\alpha_{QP}\}\} H_n \{T \{\alpha_{QP}\}\},$$

che per l'additività e le proprietà rispetto all'omotopia di  $H_n$  e di  $T$  si riduce a

$$\alpha_{P'Q'}\varphi \simeq \alpha_{P'Q'}\varphi\alpha_{QP}\alpha_{PQ},$$

che è vera in quanto  $\alpha_{QP}\alpha_{PQ} \simeq 1_{H_n\{P_\bullet\}}$ .  $\square$

*Osservazione 4.4.5.* Grazie agli ultimi due lemmi, si può omettere la risoluzione proiettiva e parlare di  $L_n T$ ,  $n$ -esimo funtore derivato sinistro.

**Lemma 4.4.6.** *Siano  $P'$ ,  $P''$  moduli proiettivi, allora nella situazione*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{i} & P' \oplus P'' & \xrightarrow{\pi} & P'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon' & & & & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha''} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

si può costruire un morfismo  $P' \oplus P'' \xrightarrow{\varepsilon} M$  suriettivo che renda commutativi i quadrati del diagramma.

*Dimostrazione.* Per la proiettività, esiste  $\beta$  che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & P'' & \\ \beta \swarrow & \downarrow \varepsilon'' & \\ M & \xrightarrow{\alpha''} & M'' \end{array};$$

si definisce  $\varepsilon \{(y', y'')\} := \alpha' \varepsilon' \{y'\} + \beta \{y''\}$ . È un morfismo dato che  $\varepsilon = \nabla \{\alpha' \varepsilon', \beta\}$ . Per il primo quadrato, si ha  $\varepsilon i \{y'\} = \varepsilon \{(y', 0)\} = \alpha' \varepsilon' \{y'\}$ , mentre per il secondo  $\alpha'' \varepsilon \{(y', y'')\} = \alpha'' \{\alpha' \varepsilon' \{y'\} + \beta \{y''\}\} = \alpha'' \beta \{y''\} = \varepsilon'' \{y''\} = \varepsilon'' \pi \{(y', y'')\}$ .

Rimane da dimostrare la suriettività: sia  $x \in M$ , allora  $\alpha'' \{x\} \in M''$  ed esiste  $y'' \in P''$  tale che  $\alpha'' \{x\} = \varepsilon'' \{y''\} = \alpha'' \beta \{y''\}$ . Quindi  $x - \beta \{y''\} \in \ker \alpha'' = \text{Im } \alpha'$ , ed esiste  $x' \in M'$  con  $\alpha' \{x'\} = x - \beta \{y''\}$ . Ancora, esiste  $y' \in P'$  tale che  $\varepsilon' \{y'\} = x'$ ; si ottiene  $\varepsilon \{(y', y'')\} = \alpha' \varepsilon' \{y'\} + \beta \{y''\} = x$ .  $\square$

**Teorema 4.4.7.** *Dato un funtore additivo  $T$  e una successione esatta*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha''} M'' \longrightarrow 0$$

per ogni  $n > 0$  esiste un morfismo (di connessione)  $L_n T \{M''\} \xrightarrow{\omega_n} L_n T \{M'\}$  tale che sia esatta la successione

$$\dots \rightarrow L_1 T \{M''\} \xrightarrow{\omega_1} L_0 T \{M'\} \xrightarrow{L_0 T \{\alpha'\}} L_0 T \{M\} \xrightarrow{L_0 T \{\alpha''\}} L_0 T \{M''\} \longrightarrow 0.$$

*Dimostrazione.* Si consideri  $P'_0$  e  $P''_0$  moduli proiettivi per cui valga il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & P'_0 \oplus P''_0 & \longrightarrow & P''_0 \longrightarrow 0 \\ & & \varphi'_0 \downarrow & & \varphi_0 \downarrow & & \varphi''_0 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha''} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array},$$

dove  $\varphi_0$  esiste ed è suriettiva per il lemma precedente. Si è nelle ipotesi del lemma 4.1.7, quindi è esatta la successione

$$0 \longrightarrow \ker \varphi'_0 \longrightarrow \ker \varphi_0 \longrightarrow \ker \varphi''_0 \longrightarrow \text{coker } \varphi'_0 = 0,$$

cioè la successione dei kernel è esatta. Si possono scegliere anche  $P'_1$  e  $P''_1$  in

modo che valga il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P'_1 \oplus P''_1 & \longrightarrow & P''_1 \longrightarrow 0 \\
& & \varphi'_1 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \varphi''_1 \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \ker \varphi'_0 & \longrightarrow & \ker \varphi_0 & \longrightarrow & \ker \varphi''_0 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0 \quad .
\end{array}$$

Applicando ancora il lemma 4.1.7 si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow \ker \varphi'_1 \longrightarrow \ker \varphi_1 \longrightarrow \ker \varphi''_1 \longrightarrow \text{coker } \varphi'_1 = 0.$$

Proseguendo per induzione, si ricavano le risoluzioni proiettive  $P'_\bullet$ ,  $P_\bullet := P'_\bullet \oplus P''_\bullet$ ,  $P''_\bullet$  rispettivamente di  $M'$ ,  $M$ ,  $M''$ , come nel diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P'_\bullet & \longrightarrow & P_\bullet & \longrightarrow & P''_\bullet \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Applicando  $T$  la successione superiore rimane esatta per l'additività, quindi si ha

$$0 \longrightarrow T \{P'_\bullet\} \longrightarrow T \{P_\bullet\} \longrightarrow T \{P''_\bullet\} \longrightarrow 0$$

e si può concludere con il teorema 4.1.8.

Si nota che la definizione di  $\omega_n$  come nel teorema, è indipendente dalla scelta delle risoluzioni proiettive.  $\square$

**Definizione 4.4.8.** Un funtore  $T$  covariante additivo è esatto a destra se per ogni successione esatta  $M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha''} M'' \longrightarrow 0$ , è esatta anche la successione  $T \{M'\} \xrightarrow{T\{\alpha'\}} T \{M\} \xrightarrow{T\{\alpha''\}} T \{M''\} \longrightarrow 0$ .

**Proposizione 4.4.9.** Sia  $T$  un funtore covariante additivo esatto a destra, allora  $L_0T$  e  $T$  sono isomorfi.

*Dimostrazione.* Sia  $M$  un modulo, allora dalla successione esatta  $P_1 \longrightarrow$

$P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$  si ricava la successione esatta  $T\{P_1\} \longrightarrow T\{P_0\} \xrightarrow{T\{\pi\}} T\{M\} \longrightarrow 0$ . Si ottiene quindi un isomorfismo tra  $L_0T\{M\} = \frac{T\{P_0\}}{\ker T\{\pi\}}$  e  $T\{M\}$ , che fornisce l'isomorfismo functoriale richiesto.  $\square$

**Proposizione 4.4.10.** *Sia  $P$  un modulo proiettivo, allora  $L_nT\{P\} = 0$  per ogni  $n > 0$ , mentre  $L_0T\{P\} = T\{P\}$ .*

*Dimostrazione.* Chiaramente, una risoluzione proiettiva di  $P$  è data da  $P_0 = P$  e  $P_n = 0$  per ogni  $n \neq 0$ . Di conseguenza,  $L_nT\{P\} = H_n\{T\{P_\bullet\}\}$  che è 0 se  $n \neq 0$ ,  $T\{P\}$  se  $n = 0$ .  $\square$

**Proposizione 4.4.11.** *Si consideri  $T$  esatto a destra e una successione esatta*

$$0 \longrightarrow K_q \xrightarrow{\mu} P_{q-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con  $K_q = \ker \partial_{q-1}^{P_\bullet}$ ; allora  $L_qT\{M\} \cong \ker T\{\mu\}$ .

*Dimostrazione.* Se si costruisce la risoluzione proiettiva di  $M$  come nella proposizione 4.3.5, si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} P_q & \xrightarrow{\partial_{q-1}^{P_\bullet}} & P_{q-1} \\ \varphi_q \downarrow & \circlearrowleft \mu \nearrow & \\ K_q & & \end{array},$$

con  $\mu$  iniettivo e  $\varphi_q$  suriettivo. Si ha in particolare la successione esatta  $\dots \longrightarrow P_{q+1} \longrightarrow P_q \xrightarrow{\varphi_q} K_q \longrightarrow 0$ . Da questa si può dedurre, applicando  $T$ , il seguente diagramma commutativo con le righe esatte, dato che  $T$  è esatto a destra:

$$\begin{array}{ccccccc} T\{P_{q+1}\} & \xrightarrow{T\{\partial_{q+1}^{P_\bullet}\}} & T\{P_q\} & \xrightarrow{T\{\pi\}} & T\{K_q\} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow T\{\partial_q^{P_\bullet}\} & & \downarrow T\{\mu\} & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T\{P_{q-1}\} & \xrightarrow{T\{P_{q-1}\}} & T\{P_{q-1}\} \end{array} .$$

Si può applicare il lemma 4.1.7, da cui si ricava la successione esatta

$$T \{P_{q+1}\} \longrightarrow \ker T \{\partial_q^{P_\bullet}\} \longrightarrow \ker T \{\mu\} \longrightarrow \text{coker } 0 = 0.$$

Si ricava quindi che  $\ker T \{\mu\} \cong \frac{\ker T \{\partial_q^{P_\bullet}\}}{\text{Im } T \{\partial_q^{P_\bullet}\}} = H_q \{T \{P_\bullet\}\} = L_q T \{M\}$ . In particolare, risulta esatta la successione

$$0 \longrightarrow L_q T \{M\} \longrightarrow T \{K_q\} \xrightarrow{T\{\mu\}} T \{P_{q-1}\}. \quad \square$$

## 4.5 Funtori derivati destri

Si possono ripercorrere le tappe percorse per arrivare alla definizione dei funtori derivati sinistri dal lato opposto. Si lavora con cocomplessi  $C^\bullet$ , cioè successioni del tipo

$$\dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_{C^\bullet}^n} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{C^\bullet}^{n+1}} C_{n+2} \longrightarrow \dots$$

tali che  $\partial_{C^\bullet}^{n+1} \partial_{C^\bullet}^n = 0$ , e in particolare con cocomplessi positivi aciclici iniettivi, formati cioè da moduli iniettivi. Da un cocomplesso  $E^\bullet$  di questo tipo si può ricavare la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0 \{E^\bullet\} = \ker \partial_{E^\bullet}^0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \dots;$$

se  $M = \ker \partial_{C^\bullet}^0$ , si dice che  $E^\bullet$  è una risoluzione iniettiva di  $M$ .

Si può dimostrare che ogni modulo è immergibile in un modulo iniettivo e con questo risultato che ogni modulo ammette una risoluzione iniettiva. Inoltre vale il teorema del sollevamento, cioè data  $M \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M'$  esiste un morfismo di cocomplessi  $\varphi$  tale che  $H^0 \{\varphi\} = \tilde{\varphi}$ , e  $\varphi$  è unico a meno di omotopie. Infine, prese due risoluzioni iniettive di un modulo, queste sono nella stessa classe di omotopia.

Preso un funtore covariante additivo  $T$ , applicandolo ad una risoluzione iniettiva positiva aciclica  $E^\bullet$  di  $M$  si ottengono delle coomologie non nulle e si può definire  $R_{E^\bullet}^n \{T\} := H^n \{T \{E^\bullet\}\}$ . Preso invece un morfismo  $\tilde{\varphi}$ , si

pone  $R_{E \bullet E'}^n T \{\tilde{\varphi}\} := H^n \{\varphi\}$ , dove  $\varphi$  è un sollevamento di  $\tilde{\varphi}$ . Si dimostra che cambiando risoluzione iniettiva, si ha un isomorfismo canonico tra le coomologie e la definizione di  $R^n T \{\tilde{\varphi}\}$  è compatibile con questo isomorfismo. Si può quindi non esplicitare la risoluzione scelta e definire un funtore  $R^n T$ . Se  $T$  è esatto a sinistra si ha  $R^0 T \cong T$ . Inoltre  $R^0 T \{E\} = E$  e  $R^n T \{E\} = 0$  per ogni  $n \neq 0$  e  $E$  iniettivo.

Da una successione esatta  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha''} M'' \longrightarrow 0$  si possono costruire i morfismi di connessione  $\omega^n$  e la successione esatta lunga

$$0 \rightarrow R_0 T \{M'\} \xrightarrow{R_0 T \{\alpha'\}} R_0 T \{M\} \xrightarrow{R_0 T \{\alpha''\}} R_0 T \{M''\} \xrightarrow{\omega^1} R_1 T \{M'\} \rightarrow \dots$$

Un particolare funtore derivato è  $\text{Ext}_A^n \{X, \bullet\} := R^n T$  dove  $T$  è il funtore  $\text{Hom}_A \{X, \bullet\}$ ; poiché  $T$  è esatto, si ha  $\text{Ext}_A^0 \{X, \bullet\} = T \{\bullet\}$ .