Appunti del corso:
Algebra IV
Prof. Claudia Menini

Stefano Maggiolo

2005/2006

Indice

1 Introduzione

Definizione 1.0.1. Una *categoria* $\mathcal{C}$ consiste in una classe di oggetti $\mathrm{Ob}\{\mathcal{C}\}$ dotata, per ogni coppia (C_1, C_2) di oggetti, di un insieme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\}$ dei morfismi di C_1 in C_2 e per ogni tripla (C_1, C_2, C_3) di un'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \circ\colon & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_2, C_3\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_3\} \\ & (f, g) & \longmapsto & gf \end{array};$$

inoltre questi enti devono soddisfare i seguenti assiomi:

- se $(C_1, C_2) \neq (C_3, C_4)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_3, C_4\}$;
- se $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_3, C_4\}$, $h(gf) = (hf)g$;
- per ogni $C \in \mathcal{C}$, esiste $1_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C, C\}$ tale che per ogni $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C, C'\}$, $f\,1_C = f = 1_C\,f$.

Se $C \in \mathrm{Ob}\{\mathcal{C}\}$, si scriverà $C \in \mathcal{C}$; si dirà che un morfismo $C_1 \xrightarrow{f} C_2$ è un isomorfismo se esiste un morfismo $C_2 \xrightarrow{g} C_1$ tale che $fg = 1_{C_2}$ e $gf = 1_{C_1}$.

Esempio 1.0.2. Gli insiemi con le funzioni come morfismi formano la categoria Ins degli insiemi; si può formare una categoria per ogni struttura algebrica, ponendo come oggetti tutti gli insiemi dotati di quella struttura algebrica e come morfismi i morfismi della struttura: si ottengono in questo modo la categoria dei gruppi, degli anelli, dei R-moduli destri e sinistri e così via.

Definizione 1.0.3. Una categoria si dice *piccola* se gli oggetti formano un insieme; *discreta* se per $C_1 = C_2$ si ha $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} = \{1\}_{C_1}$, altrimenti $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} = \varnothing$; data una categoria $\mathcal{C}$, la categoria *opposta* è $\mathcal{C}^\circ$ dove $\mathrm{Ob}\{\mathcal{C}^\circ\} = \mathrm{Ob}\{\mathcal{C}\}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}\{C_1, C_2\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_2, C_1\}$.

Definizione 1.0.4. Una *sottocategoria* $\mathcal{D}$ di una categoria $\mathcal{C}$ è una categoria tale che $\mathrm{Ob}\{\mathcal{D}\} \subseteq \mathrm{Ob}\{\mathcal{C}\}$ e per ogni $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\{D_1, D_2\} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{D_1, D_2\}$. Se in quest'ultima relazione vale l'uguaglianza, $\mathcal{D}$ è detta *sottocategoria piena* di $\mathcal{C}$.

Definizione 1.0.5. Date due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, un *funtore covariante* tra le due è $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e consiste nell'assegnare a ogni oggetto $C \in \mathcal{C}$ un oggetto $F\{C\} \in \mathcal{D}$ e a ogni morfismo $C_1 \xrightarrow{f} C_2$ un morfismo $F\{C_1\} \xrightarrow{F\{f\}} F\{C_2\}$, in modo che $F\{1_C\} = 1_{F\{C\}}$ e $F\{gf\} = F\{g\}F\{f\}$; F è un *funtore controvariante* se invece $F\{f\} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\{F\{C_2\}, F\{C_1\}\}$ e $F\{gf\} = F\{f\}F\{g\}$.

Osservazione 1.0.6. Dati due funtori $F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ e $G\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$, si definisce ed è funtore $GF\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$ tale che $GF\{C\} = G\{F\{C\}\}$ e $GF\{f\} = G\{F\{f\}\}$.

Definizione 1.0.7. Si consideri l'applicazione

$$F_{C_1}^{C_2}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\{F\{C_1\}, F\{C_2\}\}$$

che associa a f il morfismo $F\{f\}$; F si dice *fedele* se ogni $F_{C_1}^{C_2}$ è iniettiva; F è *pieno* se ogni $F_{C_1}^{C_2}$ è suriettiva.

Esempio 1.0.8. Sia $\mathcal{C}$ una categoria e $A \in \mathcal{C}$; si definisce il funtore $h^A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, \bullet\} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ins}$ che associa all'oggetto C l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, C\}$ e al morfismo $C_1 \xrightarrow{f} C_2$ la funzione

$$\begin{array}{rccc} h^A\{f\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, f\} : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, C_1\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, C_2\} \\ & \left(A \xrightarrow{\xi} C_1\right) & \longmapsto & \left(A \xrightarrow{\xi} C_1 \xrightarrow{f} C_2\right) \end{array}.$$

Così definito, h^A è un funtore covariante:

- $h^A\{1_C\}\{\xi\} = 1_C\,\xi = \xi$, quindi $h^A\{1_C\} = 1_{h^A\{C\}}$;
- $h^A\{gf\}\{\xi\} = gf\xi = h^A\{g\}\{f\xi\} = \left(h^A\{g\}\,h^A\{f\}\right)\{\xi\}$, quindi $h^A\{gf\} = h^A\{g\}\,h^A\{f\}$.

Se il funtore è fedele, significa che per ogni coppia $C_1 \xrightarrow{f,g} C_2$ con $f \neq g$ esiste $A \xrightarrow{\xi} C_1$ tale che $f\xi \neq g\xi$; in questo caso A è detto *generatore* di $\mathcal{C}$.

Si può ripetere il procedimento costruendo il funtore controvariante $h_A\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Ins}$ che associa a C l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C, A\}$ e con $h_A\{f\}\{\xi\} = \xi f$. Se h_A è fedele, A si dice *cogeneratore* di $\mathcal{C}$.

Definizione 1.0.9. Dati due funtori $\mathcal{C} \xrightarrow{F,G} \mathcal{D}$, un loro morfismo funtoriale è $\varphi\colon F \to G$ e consiste nell'assegnare per ogni $C \in \mathcal{C}$ un morfismo $F\{C\} \xrightarrow{\varphi_C} G\{C\}$ in modo che il diagramma

$$\begin{tikzcd} F\{C_1\} \arrow[r, "\varphi_{C_1}"] \arrow[d, "F\{f\}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G\{C_1\} \arrow[d, "G\{f\}"] \\ F\{C_2\} \arrow[r, "\varphi_{C_2}"'] & G\{C_2\} \end{tikzcd}$$

commuti per ogni $C_1 \xrightarrow{f} C_2$. I funtori sono isomorfi se per ogni $C \in \mathcal{C}$, φ_C è un isomorfismo, cioè ha un'inversa bilatera; in questo caso, si scrive $F \cong G$.

Definizione 1.0.10. Due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono *equivalenti* se esiste una coppia di funtori $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tali che $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$ e $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$, dove $1_{\mathcal{C}}$ è il funtore identità di $\mathcal{C}$. Se inoltre $FG = 1_{\mathcal{D}}$ e $GF = 1_{\mathcal{D}}$, le due categorie si dicono isomorfe.

Lemma 1.0.11. *Sia $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore covariante pieno e fedele, allora $C_1 \xrightarrow{f} C_2$ è isomorfismo se e solo se $T\{f\}$ è isomorfismo.*

Dimostrazione. Se f è un isomorfismo, esiste f^{-1} e $T\{f\}T\{f^{-1}\} = T\{ff^{-1}\} = T\{1_{C_2}\} = 1_{T\{C_2\}}$. Componendo dall'altro lato, si ottiene che $T\{f^{-1}\} = T\{f\}^{-1}$. Se $T\{f\}$ è un isomorfismo, esiste $h = T\{f\}^{-1}$, ma $h = T\{g\}$ per qualche g, quindi $T\{1_{C_1}\} = 1_{T\{C_1\}} = hT\{f\} = T\{g\}T\{f\} = T\{gf\}$. Per la fedeltà di T, $1_{C_1} = gf$; procedendo allo stesso modo, risulta $g = f^{-1}$. $\square$

Teorema 1.0.12. *Sia $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore covariante, allora T è un'equivalenza se e solo se T è fedele, pieno e per ogni $D \in \mathcal{D}$, esistono $C \in \mathcal{C}$ e $T\{C\} \xrightarrow{\xi_D} D$ isomorfismo.*

Dimostrazione. Se T è un'equivalenza, esistono il funtore $\mathcal{D} \xrightarrow{S} \mathcal{C}$ e gli isomorfismi funtoriali $ST \xrightarrow{\alpha} 1_{\mathcal{C}}$ e $TS \xrightarrow{\beta} 1_{\mathcal{D}}$.

<u>T è fedele.</u> Siano $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\}$ con $T\{f\} = T\{f'\}$; allora $ST\{f\} = ST\{f'\}$. Poiché α è un isomorfismo si ha $f = \alpha_{C_2} ST\{f\} \alpha_{C_1}^{-1} =$

$\alpha_{C_2} ST\{f'\} \alpha_{C_1}^{-1} = f$:

$$\begin{tikzcd} ST\{C_1\} \arrow[r, "\alpha_{C_1}"] \arrow[d, "ST\{f\}=ST\{f'\}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_1 \arrow[d, "f'"', "f"] \\ ST\{C_2\} \arrow[r, "\alpha_{C_2}"] & C_2. \end{tikzcd}$$

<u>T è pieno.</u> Sia $T\{C_1\} \xrightarrow{h} T\{C_2\}$; si ponga $g = \alpha_{C_2} S\{h\} \alpha_{C_1}^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_1, C_2\}$. Poiché α è isomorfismo, si ha $ST\{g\} = \alpha_{C_2}^{-1} g \alpha_{C_1}$, a sua volta uguale a $S\{h\}$ per la definizione di g; ma S è, come T, un'equivalenza, quindi per il punto precedente è fedele, da cui $h = T\{g\}$:

$$\begin{tikzcd} ST\{C_1\} \arrow[r, "\alpha_{C_1}"] \arrow[d, "S\{h\}=ST\{g\}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_1 \arrow[d, "g"] \\ ST\{C_2\} \arrow[r, "\alpha_{C_2}"'] & C_2. \end{tikzcd}$$

Per ogni $D \in \mathcal{D}$, se si pone $C = T\{D\}$, l'isomorfismo $ST\{D\} \xrightarrow{\beta_D} D$ è quello cercato.

<u>Costruzione di $S \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.</u> Per l'implicazione inversa, si deve costruire S. Preso $D \in \mathcal{D}$, si ponga $S\{D\} = C$, dove $C \in \mathcal{C}$ è l'oggetto per cui esiste $C \xrightarrow{\xi_D} D$. Preso un morfismo $D_1 \xrightarrow{f} D_2$, esiste $T\{C_1\} \xrightarrow{f' = \xi_{D_2}^{-1} f \xi_{D_1}} T\{C_2\}$, ma poiché T è pieno e fedele, esiste un unico $C_1 \xrightarrow{f''} C_2$ tale che $T\{f''\} = f'$; sia $S\{f\} = f''$.

<u>S è un funtore.</u> Grazie alla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi_{D_1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\xi_{D_2}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D_3 \arrow[d, "\xi_{D_3}"'] \\ T\{C_1\} \arrow[r, "TS\{f\}"'] & T\{C_2\} \arrow[r, "TS\{g\}"'] & T\{C_3\}, \end{tikzcd}$$

prese $D_1 \xrightarrow{f} D_2$ e $D_2 \xrightarrow{g} D_3$, si ha $T\{S\{g\} S\{f\}\} = TS\{g\} TS\{f\} = \left(\xi_{D_3}^{-1} g \xi_{D_2}\right)\left(\xi_{D_2}^{-1} f \xi_{D_1}\right) = \xi_{D_3}^{-1} g f \xi_{D_1} = TS\{gf\}$. Per la fedeltà di T, $S\{g\} S\{f\} = S\{gf\}$. Inoltre, $TS\{1_D\} = \xi_D^{-1} 1_D \xi_D = 1_{T\{C\}} = T\{1_C\}$, da cui $S\{1_D\} = 1_C$.

Per costruzione, si ha $S\{D\} = C$ e $TS\{D\} = T\{C\} = D$, perciò $TS = 1_{\mathcal{D}}$.

Costruzione di $\alpha\colon ST \to 1_{\mathcal{C}}$. Si deve costruire per ogni $C \in \mathcal{C}$ un isomorfismo $ST\{C\} \xrightarrow{\alpha_C} C$. In generale esiste $TS\{D\} \xrightarrow{\xi_D} D$; se $D = T\{C\}$, $TST\{C\} \xrightarrow{\xi_{T\{C\}}} T\{C\}$. Per le proprietà di T, esiste un unico morfismo $ST\{C\} \xrightarrow{\alpha_C} C$ tale che $T\{\alpha_C\} = \xi_{T\{C\}}$; si deve dimostrare che α definito dagli α_C è un isomorfismo funtoriale.

α è un morfismo funtoriale. Si deve dimostrare la commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} ST\{C_1\} \arrow[r, "\alpha_{C_1}"] \arrow[d, "ST\{f\}"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & C_1 \arrow[d, "f"] \\ ST\{C_2\} \arrow[r, "\alpha_{C_2}"'] & C_2. \end{tikzcd}$$

Applicando T,

$$\begin{aligned} T\{f\alpha_{C_1}\} &= & T\{\alpha_{C_2} ST\{f\}\} &= \\ &= T\{f\} T\{\alpha_{C_1}\} & &= T\{\alpha_{C_2}\} TST\{f\} \\ &= T\{f\} \xi_{T\{C_1\}} & &= \xi_{T\{C_2\}} TST\{f\}. \end{aligned}$$

Ma posto $D = T\{C_1\}$, si ha che $TST\{f\} = \xi^{-1}_{T\{C_2\}} T\{f\} \xi_{T\{C_1\}}$, da cui $T\{f\alpha_{C_1}\} = T\{\alpha_{C_2} ST\{f\}\}$ e per la fedeltà di T la tesi. Applicando il lemma con $f = \xi_{T\{C\}}$, si ottiene che $\alpha_C = T\left\{\xi_{T\{C\}}\right\}$ è un isomorfismo. □

Teorema 1.0.13 (Lemma di Yoneda)**.** *Siano $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Ins}$ un funtore controvariante, $A \in \mathcal{C}$ e $\mathrm{Hom}\{h_A, F\}$ l'insieme dei morfismi funtoriali da h_A in F. Posto*

$$\begin{aligned} \alpha^F_A\colon \quad \mathrm{Hom}\{h_A, F\} &\longrightarrow F\{A\} \\ \left(h_A \xrightarrow{\xi} F\right) &\longmapsto \xi_A\{1_A\}, \end{aligned}$$

α^F_A è una biiezione, naturale in A e F.

Dimostrazione. Costruzione di $\beta = \left(\alpha^F_A\right)^{-1}$. Si dimostra che α^F_A è invertibile, costruendo $F\{A\} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}\{h_A, F\}$: se $x \in F\{A\}$, $\beta\{x\}$ deve essere un morfismo funtoriale definito dalle $h_A\{C\} \xrightarrow{\beta\{x\}_C} F\{C\}$; presa $f \in h_A\{C\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C, A\}$, sia $\beta\{x\}_C\{f\} = F\{f\}\{x\}$.

$\underline{\beta\{x\} \text{ è un morfismo funtoriale.}}$ Si deve dimostrare che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
h_A\{C_2\} \arrow[r, "\beta\{x\}_{C_2}"] \arrow[d, "h_A\{g\}"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & F\{C_2\} \arrow[d, "F\{g\}"] \\
h_A\{C_1\} \arrow[r, "\beta\{x\}_{C_1}"'] & F\{C_1\}
\end{tikzcd}$$

commuta: preso $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C_2, A\}$, procedendo dalle due parti:

$$\begin{aligned}
F\{g\}\left\{\beta\{x\}_{C_2}\{f\}\right\} &= & \beta\{x\}_{C_1}\{h_A\{g\}\{f\}\} &= \\
&= F\{g\}\{F\{f\}\{x\}\} & &= \beta\{x\}_{C_1}\{fg\} \\
&= F\{fg\}\{x\} & &= F\{fg\}\{x\}.
\end{aligned}$$

$\underline{\beta = \left(\alpha_A^F\right)^{-1}.}$ Preso un morfismo funtoriale $h_A \xrightarrow{\xi} F$, per ogni $C \in \mathcal{C}$, $\beta\left\{\alpha_A^F\{\xi\}\right\}_C = \beta\{\xi_A\{1_A\}\}_C$. Questa applicazione manda $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{C, A\}$ in $\beta\{\xi_A\{1_A\}\}_C\{f\} = F\{f\}\{\xi_A\{1_A\}\}$, ma ξ è un morfismo, quindi $F\{f\}\xi_A = \xi_C h_A\{f\}$, così l'immagine di f risulta -$\xi_C\{h_A\{f\}\{1_A\}\} = \xi_C\{f\}$. Viceversa, se $x \in F\{A\}$, $\alpha_A^F\{\beta\{x\}\} = \beta\{x\}_A\{1_A\} = F\{1_A\}\{x\} = 1_{F\{A\}}\{x\} = x$.

$\underline{\alpha_A^F \text{ è naturale in } A.}$ Presa $A \xrightarrow{u} B$ e posto $h_u \colon h_A \to h_B$, si deve mostrare che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\{h_B, F\} \arrow[r, "\alpha_B^F"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}\{h_u, F\}"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & F\{B\} \arrow[d, "F\{u\}"] \\
\mathrm{Hom}\{h_A, F\} \arrow[r, "\alpha_A^F"'] & F\{A\}
\end{tikzcd}$$

commuta. Preso $\xi\colon h_B \to F$ morfismo funtoriale:

$$
\begin{aligned}
&F\{u\}\left\{\alpha_B^F\{\xi\}\right\} = \\
&\qquad = F\{u\}\{\xi_B\{1_B\}\} \\
&\qquad = \xi_A\{h_B\{u\}\{1_B\}\} \\
&\qquad = \xi_A\{1_B\,u\} \\
&\qquad = \xi_A\{u\}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_A^F\{\mathrm{Hom}\{h_u, F\}\{\xi\}\} = \\
&\qquad = \alpha_A^F\{\xi h_u\} \\
&\qquad = (\xi h_u)_A\{1_A\} \\
&\qquad = \xi_A\{h_{uA}\{1_A\}\} \\
&\qquad = \xi_A\{u\,1_A\} \\
&\qquad = \xi_A\{u\}\,.
\end{aligned}
$$

<u>α_A^F è naturale in F.</u> Preso un morfismo funtoriale $\psi\colon F \to G$, si mostra la commutatività del diagramma

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\{h_A, F\} \arrow[r, "\alpha_A^F"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}\{h_A,\psi\}"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & F\{A\} \arrow[d, "\psi_A"] \\
\mathrm{Hom}\{h_A, G\} \arrow[r, "\alpha_A^G"'] & G\{A\}\,.
\end{tikzcd}
$$

Preso $\xi \in \mathrm{Hom}\{h_A, F\}$:

$$
\begin{aligned}
&\psi_A\left\{\alpha_A^F\{\xi\}\right\} = \\
&\qquad = \psi_A\{\xi_A\{1_A\}\}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_A^G\{\mathrm{Hom}\{h_A, \psi\}\{\xi\}\} = \\
&\qquad = \alpha_A^G\{\psi\xi\} \\
&\qquad = (\psi\xi)_A\{1_A\} \\
&\qquad = \psi_A\{\xi_A\{1_A\}\}\,,
\end{aligned}
$$

quindi il diagramma commuta e α_A^F è naturale in F. $\square$

Osservazione 1.0.14. α_A^F naturale in A significa che $\alpha_\bullet^F\colon \mathrm{Hom}\{h_\bullet, F\} \to F\{\bullet\}$ è un morfismo funtoriale tra funtori da $\mathcal{C}$ a Ins. Allo stesso modo, la naturalità in F significa che $\alpha_A^\bullet\colon \mathrm{Hom}\{h_A, \bullet\} \to \bullet\{A\}$ è un morfismo funtoriale tra funtori da $\mathrm{Hom}\{\mathcal{C}, \mathrm{Ins}\}$ a Ins.

Corollario 1.0.15. *Siano $A, B \in \mathcal{C}$, allora $A \cong B$ se e solo se $h_A \cong h_B$.*

Dimostrazione. Se $A \cong B$, esistono $A \xrightarrow{u} B$ e $B \xrightarrow{v} A$ tali che $vu = 1_A$ e viceversa; allora preso $C \xrightarrow{f} A$, $h_v h_u \{f\} = v(uf) = (vu) f = f$ e viceversa.

Se invece $h_A \cong h_B$, si ha un morfismo funtoriale $\varphi \colon h_A \to h_B$ tale che ogni φ_C è un isomorfismo; siano $u = \varphi_A \{1_A\}$ e $v = \varphi_B^{-1} \{1_B\}$, cioè si ottengono $A \xrightarrow{u} B$ e $B \xrightarrow{v} A$. Si consideri il diagramma della naturalità in A di α_A^F con $F = h_B$:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}\{h_B, h_A\} \arrow[r, "\alpha_B^{h_A}"] \arrow[d, "\operatorname{Hom}\{h_u, h_A\}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & h_A\{B\} \arrow[d, "h_A\{u\}"] \\
\operatorname{Hom}\{h_A, h_A\} \arrow[r, "\alpha_A^{h_A}"'] & h_A\{A\} .
\end{tikzcd}$$

Allora partendo da $\varphi^{-1} \in \operatorname{Hom}\{h_B, h_A\}$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\alpha_A^{h_A}\left\{\operatorname{Hom}\{h_u, h_A\}\left\{\varphi^{-1}\right\}\right\} \\
&\quad = \alpha_A^{h_A}\left\{\varphi^{-1} h_u\right\} \\
&\quad = \left(\varphi^{-1} h_u\right)_A \{1_A\} \\
&\quad = \varphi_A^{-1}\left\{h_{uA}\{1_A\}\right\} \\
&\quad = \varphi_A^{-1}\{u\} \\
&\quad = \varphi_A^{-1}\left\{\varphi_A\{1_A\}\right\} = 1_A \,.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&h_A\{u\}\left\{\alpha_B^{h_A}\left\{\varphi^{-1}\right\}\right\} \\
&\quad = h_A\{u\}\left\{\varphi_B^{-1}\{1_B\}\right\} \\
&\quad = h_A\{u\}\{v\} \\
&\quad = vu \\
&\\
&
\end{aligned}$$

Procedendo analogamente si dimostra anche che $1_B = uv$, quindi u e v sono isomorfismi. $\square$

2 Funtori aggiunti

Si considerano due funtori covarianti $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$; da questi si definiscono i funtori

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{\bullet\right\},\blacktriangle\right\}: & \mathcal{A}^{\circ}\times\mathcal{B} & \longrightarrow & \mathrm{Ins}\,, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{\bullet, H\left\{\blacktriangle\right\}\right\}: & \mathcal{A}\times\mathcal{B}^{\circ} & \longrightarrow & \mathrm{Ins}\,, \end{array}$$

che associano all'oggetto (A,B) rispetticamente gli oggetti $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A\right\},B\right\}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{A,\mathcal{B}\right\}$. Presi $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{A_1,A_2\right\}$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{B_1,B_2\right\}$ si deve definire l'immagine del morfismo (f,g). Prima si considerano le applicazioni

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{f\right\},B\right\}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A_2\right\},B\right\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A_1\right\},B\right\} \\ & \left(T\left\{A_2\right\}\xrightarrow{\eta}B\right) & \longmapsto & \left(T\left\{A_1\right\}\xrightarrow{T\{f\}}T\left\{A_2\right\}\xrightarrow{\eta}B\right), \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{A,H\left\{g\right\}\right\}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{A,H\left\{B_1\right\}\right\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{A,H\left\{B_2\right\}\right\} \\ & \left(A\xrightarrow{\eta}H\left\{B_1\right\}\right) & \longmapsto & \left(A\xrightarrow{\eta}H\left\{B_1\right\}\xrightarrow{H\{g\}}H\left\{B_2\right\}\right); \end{array}$$

infine, l'immagine di (f,g) tramite i funtori iniziali sono i seguenti morfismi:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{f\right\},g\right\}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A_2\right\},B_1\right\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A_1\right\},B_2\right\} \\ & \left(T\left\{A_2\right\}\xrightarrow{\eta}B_1\right) & \longmapsto & \left(T\left\{A_1\right\}\xrightarrow{T\{f\}}T\left\{A_2\right\}\xrightarrow{\eta}B_1\xrightarrow{g}B_2\right) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{f,H\left\{g\right\}\right\}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{A_2,H\left\{B_1\right\}\right\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{A_1,H\left\{B_2\right\}\right\} \\ & \left(A_2\xrightarrow{\eta}H\left\{B_1\right\}\right) & \longmapsto & \left(A_1\xrightarrow{f}A_2\xrightarrow{\eta}H\left\{B_1\right\}\xrightarrow{H\{g\}}H\left\{B_2\right\}\right). \end{array}$$

Definizione 2.0.16. La coppia di funtori (T,H) è un'*aggiunzione* se esistono degli isomorfismi $\Lambda_B^A\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A\right\},B\right\} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{A,H\left\{B\right\}\right\}$ tali che per ogni $A_1 \xrightarrow{f} A_2$ e $B_1 \xrightarrow{g} B_2$ si verifichi

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A_2\right\},B_1\right\} \arrow[r, "\Lambda_{B_1}^{A_2}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\{T\{f\},g\}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{A_2,H\left\{B_1\right\}\right\} \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\{f,H\{g\}\}"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A_1\right\},B_2\right\} \arrow[r, "\Lambda_{B_2}^{A_1}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{A_1,H\left\{B_2\right\}\right\}, \end{tikzcd}$$

cioè per ogni $T\{A_2\} \xrightarrow{\eta} B_1$ deve risultare $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\{f, H\{g\}\}\left\{\Lambda_{B_1}^{A_2}\{\eta\}\right\} = \Lambda_{B_1}^{A_2}\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\{T\{f\}, g\}\{\eta\}\}$, che si semplifica nella condizione

$$H\{g\}\Lambda_{B_1}^{A_2}\{\eta\} f = \Lambda_{B_2}^{A_1}\{g\eta(T\{f\})\}.$$

In altre parole, (T, H) sono funtori aggiunti se esiste un isomorfismo funtoriale $\Lambda\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\{T\{\bullet\}, \blacktriangle\} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\{\bullet, H\{\blacktriangle\}\}$.

Esempio 2.0.17. Sia ${}_RM_S$ un bimodulo, $H = \mathrm{Hom}_S\{{}_RM_S, \bullet\}\colon \mathrm{Mod}\text{-}S \to \mathrm{Mod}\text{-}R$ e $T = \bullet \otimes_R {}_RM\colon \mathrm{Mod}\text{-}R \to \mathrm{Mod}\text{-}S$. Si ponga

$$\begin{array}{cccc}\Lambda_B^A\colon & \mathrm{Hom}_S\{A \otimes_R M, B\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R\{A, \mathrm{Hom}_S\{M, B\}\} \\ & \left(A \otimes_R M \xrightarrow{\eta} B\right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S\{M, B\} \\ a & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & B \\ m & \longmapsto & \eta\{a \otimes m\}\end{array}\right)\end{array}\right)\end{array}$$

e quella che si dimostrerà essere la sua inversa:

$$\begin{array}{cccc}\Gamma_B^A\colon & \mathrm{Hom}_R\{A, \mathrm{Hom}_S\{M, B\}\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S\{A \otimes_R M, B\} \\ & \left(A \xrightarrow{\xi} \mathrm{Hom}_S\{M, B\}\right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} A \otimes_R M & \longrightarrow & B \\ a \otimes m & \longmapsto & \xi\{a\}\{m\}\end{array}\right).\end{array}$$

<u>$\Lambda_B^A\{\eta\}\{a\}$ è morfismo di Mod-S.</u> Per semplicità si ponga $\alpha = \Lambda_B^A\{\eta\}\{a\}$; allora si ottiene

$$\begin{aligned}\alpha\{m_1s_1 + m_2s_2\} &= \eta\{a \otimes (m_1s_1 + m_2s_2)\} \\ &= \eta\{a \otimes (m_1s_1) + a \otimes (m_2s_2)\} \\ &= \eta\{(a \otimes m_1)s_1 + (a \otimes m_2)s_2\} \\ &= \eta\{a \otimes m_1\}s_1 + \eta\{a \otimes m_2\}s_2 \\ &= \alpha\{m_1\}s_1 + \alpha\{m_2\}s_2.\end{aligned}$$

<u>$\Lambda_B^A\{\eta\}$ è morfismo di Mod-R.</u> Si deve dimostrare che

$\Lambda_B^A\left\{\eta\right\}\left\{a_1r_1+a_2r_2\right\}=\Lambda_B^A\left\{\eta\right\}\left\{a_1\right\}r_1+\Lambda_B^A\left\{\eta\right\}\left\{a_2\right\}r_2$:

$$\begin{aligned}\Lambda_B^A\left\{\eta\right\}\left\{a_1r_1+a_2r_2\right\}\left\{m\right\}&=\eta\left\{(a_1r_1+a_2r_2)\otimes m\right\}\\&=\eta\left\{a_1r_1\otimes m+a_2r_2\otimes m\right\}\\&=\eta\left\{a_1r_1\otimes m\right\}+\eta\left\{a_2r_2\otimes m\right\}\\&=\Lambda_B^A\left\{\eta\right\}\left\{a_1r_1\right\}+\Lambda_B^A\left\{\eta\right\}\left\{a_2r_2\right\}\\&=\Lambda_B^A\left\{\eta\right\}\left\{a_1\right\}r_1+\Lambda_B^A\left\{\eta\right\}\left\{a_2\right\}r_2.\end{aligned}$$

<u>$\Gamma_B^A\left\{\xi\right\}$ è ben definita.</u> Si deve mostrare che l'applicazione che associa $\xi\left\{a\right\}\left\{m\right\}$ alla coppia (a,m) è bilanciata; l'additività è banale, inoltre

$$\begin{aligned}\xi\left\{ar\right\}\left\{m\right\}&=\left(\xi\left\{a\right\}r\right)\left\{m\right\} &&\text{perché } \xi \text{ è morfismo di Mod-}R\\&=\xi\left\{a\right\}\left\{rm\right\}. &&\text{per definizione di } \cdot \text{ in } \left(\mathrm{Hom}_S\left\{M,B\right\}\right)_R\end{aligned}$$

<u>$\Gamma_B^A\left\{\xi\right\}$ è morfismo di Mod-S.</u> Si ha:

$$\begin{aligned}&\Gamma_B^A\left\{\xi\right\}\left\{(a_1\otimes m_1)\,s_1+(a_2\otimes m_2)\,s_2\right\}=\\&\quad=\Gamma_B^A\left\{\xi\right\}\left\{a_1\otimes m_1s_1+a_2\otimes m_2s_2\right\}\\&\quad=\Gamma_B^A\left\{\xi\right\}\left\{a_1\otimes m_1s_1\right\}+\Gamma_B^A\left\{\xi\right\}\left\{a_2\otimes m_2s_2\right\}\\&\quad=\xi\left\{a_1\right\}\left\{m_1s_1\right\}+\xi\left\{a_2\right\}\left\{m_2s_2\right\}\\&\quad=\xi\left\{a_1\right\}\left\{m_1\right\}s_1+\xi\left\{a_2\right\}\left\{m_2\right\}s_2\\&\quad=\Gamma_B^A\left\{\xi\right\}\left\{a_1\otimes m_1\right\}s_1+\Gamma_B^A\left\{\xi\right\}\left\{a_2\otimes m_2\right\}s_2.\end{aligned}$$

<u>$\Gamma_B^A=\left(\Lambda_B^A\right)^{-1}$.</u> Presa $A\otimes_R M\xrightarrow{\eta}B$:

$$\begin{aligned}\Gamma_B^A\left\{\Lambda_B^A\left\{\eta\right\}\right\}\left\{\bar a\otimes\bar m\right\}&=\Gamma_B^A\left\{a\mapsto\left(m\mapsto\eta\left\{a\otimes m\right\}\right)\right\}\left\{\bar a\otimes\bar m\right\}\\&=\left(a\otimes m\mapsto\eta\left\{a\otimes m\right\}\right)\left\{\bar a\otimes\bar m\right\}\\&=\eta\left\{\bar a\otimes\bar m\right\}.\end{aligned}$$

Preso invece $A \xrightarrow{\xi} \mathrm{Hom}_S\{M, B\}$:

$$\begin{aligned}
\Lambda_B^A\left\{\Gamma_B^A\{\xi\}\right\}\{\bar{a}\}\{\bar{m}\} &= \Lambda_B^A\{a\otimes m \mapsto \xi\{a\}\{m\}\}\{\bar{a}\}\{\bar{m}\}\\
&= (a\mapsto (m\mapsto \xi\{a\}\{m\}))\{\bar{a}\}\{\bar{m}\}\\
&= (m\mapsto \xi\{\bar{a}\}\{m\})\{\bar{m}\}\\
&= \xi\{\bar{a}\}\{\bar{m}\}
\end{aligned}$$

<u>(T, H) sono un'aggiunzione.</u> Si deve verificare che commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_S\{A_2\otimes_R M, B_1\} \arrow[r, "\Lambda_{B_1}^{A_2}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_S\{f\otimes_R M, g\}"'] & \mathrm{Hom}_R\{A_2, \mathrm{Hom}_S\{M, B_1\}\} \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R\{f, \mathrm{Hom}_S\{M, g\}\}"] \\
\mathrm{Hom}_S\{A_1\otimes_R M, B_2\} \arrow[r, "\Lambda_{B_2}^{A_1}"'] & \mathrm{Hom}_R\{A_1, \mathrm{Hom}_S\{M, B_2\}\}.
\end{tikzcd}$$

Percorrendo il diagramma a partire da $A_2\otimes_R M \xrightarrow{\eta} B$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_R\{f, \mathrm{Hom}_S\{M, g\}\}\left\{\Lambda_{B_1}^{A_2}\{\eta\}\right\} =\\
&\qquad = \mathrm{Hom}_R\{f, \mathrm{Hom}_S\{M, g\}\}\{a_2\mapsto (m\mapsto \eta\{a_2\otimes m\})\}\\
&\qquad = \mathrm{Hom}_S\{M, g\}(a_2\mapsto (m\mapsto \eta\{a_2\otimes m\}))\, f\\
&\qquad = \mathrm{Hom}_S\{M, g\}(a_1\mapsto (m\mapsto \eta\{f\{a_1\}\otimes m\}))\\
&\qquad = a_1\mapsto (m\mapsto g\eta\{f\{a_1\}\otimes m\})\\
&\Lambda_{B_2}^{A_1}\{\mathrm{Hom}_S\{f\otimes_R M, g\}\{\eta\}\} =\\
&\qquad = \Lambda_{B_2}^{A_1}\{g\eta(f\otimes_R M)\}\\
&\qquad = \Lambda_{B_2}^{A_1}\{a_1\otimes m\mapsto g\eta\{f\{a_1\}\otimes m\}\}\\
&\qquad = a_1\mapsto (m\mapsto g\eta\{f\{a_1\}\otimes m\})
\end{aligned}$$

Teorema 2.0.18. *Se (T, H) e (T', H) sono aggiunzioni, allora $T \cong T'$.*

Dimostrazione. <u>Costruzione dell'isomorfismo.</u> Per ogni $A\in\mathcal{A}$ e $B\in\mathcal{B}$, si hanno i due isomorfismi Λ_B^A e Λ'^A_B; si ponga λ_B^A in modo che

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A\right\},B\right\} \arrow[rr, "\lambda_B^A"] \arrow[dr, "\Lambda_B^A"'] & \circlearrowleft & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T'\left\{A\right\},B\right\} \arrow[dl, "\Lambda'^A_B"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left\{A,H\left\{B\right\}\right\}, &
\end{tikzcd}$$

cioè $\lambda_B^A = \left(\Lambda'^A_B\right)^{-1}\Lambda_B^A$. Si definisce quindi $T'\left\{A\right\} \xrightarrow{\chi_A} T\left\{A\right\}$ con $\chi_A = \lambda^A_{T\{A\}}\left\{1_{T\{A\}}\right\}$.

$\lambda^{\bullet}_{\blacktriangle}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{\bullet\right\},\blacktriangle\right\} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T'\left\{\bullet\right\},\blacktriangle\right\}$ è un bifuntore. Date $A_1 \xrightarrow{f} A_2$, $B_1 \xrightarrow{g} B_2$ e $T\left\{A_2\right\} \xrightarrow{\xi} B_1$, si deve verificare

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A_2\right\},B_1\right\} \arrow[r, "\lambda^{A_2}_{B_1}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\{T\{f\},g\}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T'\left\{A_2\right\},B_1\right\} \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\{T'\{f\},g\}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A_1\right\},B_2\right\} \arrow[r, "\lambda^{A_1}_{B_2}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{A_1\right\},B_2\right\}:
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T'\left\{f\right\},g\right\}\left\{\lambda^{A_2}_{B_1}\left\{\xi\right\}\right\} = \\
&\quad = g\lambda^{A_2}_{B_1}\left\{\xi\right\}T'\left\{f\right\} \\
&\quad = g\left(\Lambda'^{A_2}_{B_1}\right)^{-1}\left\{\Lambda^{A_2}_{B_1}\left\{\xi\right\}\right\}T'\left\{f\right\} \\
&\quad = \left(\Lambda'^{A_1}_{B_2}\right)^{-1}\left\{H\left\{g\right\}\Lambda^{A_2}_{B_1}\left\{\xi\right\}f\right\}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\lambda^{A_1}_{B_2}\left\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left\{T\left\{f\right\},g\right\}\left\{\xi\right\}\right\} = \\
&\quad = \lambda^{A_1}_{B_2}\left\{g\xi T\left\{f\right\}\right\} \\
&\quad = \left(\Lambda'^{A_1}_{B_2}\right)^{-1}\left\{\Lambda^{A_1}_{B_2}\left\{g\xi T\left\{f\right\}\right\}\right\} \\
&\quad = \left(\Lambda'^{A_1}_{B_2}\right)^{-1}\left\{H\left\{g\right\}\Lambda^{A_2}_{B_1}\left\{\xi\right\}f\right\}.
\end{aligned}$$

$\chi\colon T' \to T$ è morfismo di funtori. Deve risultare:

$$\begin{tikzcd}
T'\left\{A_1\right\} \arrow[r, "\chi_{A_1}"] \arrow[d, "T'\{f\}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T\left\{A_1\right\} \arrow[d, "T\{f\}"] \\
T'\left\{A_2\right\} \arrow[r, "\chi_{A_2}"'] & T\left\{A_2\right\}:
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&T\{f\}\chi_{A_1} = && \chi_{A_2}T'\{f\} = \\
&\quad = T\{f\}\lambda^{A_1}_{T\{A_1\}}\left\{1_{T\{A_1\}}\right\} && \quad = \lambda^{A_2}_{T\{A_2\}}\left\{1_{T\{A_2\}}\right\}T'\{f\} \\
&\quad = \lambda^{A_1}_{T\{A_2\}}\left\{T\{f\}\,1_{T\{A_1\}}\right\} && \quad = \lambda^{A_1}_{T\{A_2\}}\left\{1_{T\{A_2\}}\,T'\{f\}\right\} \\
&\quad = \lambda^{A_1}_{T\{A_2\}}\{T\{f\}\} && \quad = \lambda^{A_1}_{T\{A_2\}}\{T\{f\}\}
\end{aligned}$$

χ è isomorfismo funtoriale. Si costruisce l'inversa di χ ripetendo il procedimento al contrario, quindi sia $\mu^A_B = \left(\Lambda^A_B\right)^{-1}\Lambda'^A_B$ e $\zeta_A = \mu^A_{T'\{A\}}\left\{1_{T'\{A\}}\right\}$; allora

$$\begin{aligned}
&\zeta_A\chi_A = && \chi_A\zeta_A = \\
&\quad = \zeta_A\lambda^A_{T\{A\}}\left\{1_{T\{A\}}\right\} && \quad = \chi_A\mu^A_{T'\{A\}}\left\{1_{T'\{A\}}\right\} \\
&\quad = \lambda^A_{T'\{A\}}\left\{\zeta_A\,1_{T\{A\}}\right\} && \quad = \mu^A_{T\{A\}}\left\{\chi_A\,1_{T'\{A\}}\right\} \\
&\quad = \lambda^A_{T'\{A\}}\{\zeta_A\} && \quad = \mu^A_{T\{A\}}\{\chi_A\} \\
&\quad = \lambda^A_{T'\{A\}}\mu^A_{T'\{A\}}\left\{1_{T'\{A\}}\right\} && \quad = \mu^A_{T\{A\}}\chi^A_{T\{A\}}\left\{1_{T\{A\}}\right\} \\
&\quad = 1_{T'\{A\}} && \quad = 1_{T\{A\}}\,.
\end{aligned}$$
□

Proposizione 2.0.19. *Sia* $\sigma_A = \Lambda^A_{T\{A\}}\left\{1_{T\{A\}}\right\} : A \to HT\{A\}$, *allora* $\sigma\colon 1_{\mathcal{A}} \to HT$ *è un morfismo funtoriale (detto* unità *dell'aggiunzione).*

Dimostrazione. Si deve verificare che

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\sigma_{A_1}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & HT\{A_1\} \arrow[d, "HT\{f\}"] \\
A_2 \arrow[r, "\sigma_{A_2}"'] & HT\{A_2\}:
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&HT\{f\}\sigma_{A_1} = && \sigma_{A_2}f = \\
&\quad = HT\{f\}\Lambda^{A_1}_{T\{A_1\}}\left\{1_{T\{A_1\}}\right\} && \quad = \Lambda^{A_2}_{T\{A_2\}}\left\{1_{T\{A_2\}}\right\}f \\
&\quad = \Lambda^{A_1}_{T\{A_2\}}\left\{T\{f\}\,1_{T\{A_1\}}\right\} && \quad = \Lambda^{A_1}_{T\{A_2\}}\left\{1_{T\{A_2\}}\,T\{f\}\right\} \\
&\quad = \Lambda^{A_1}_{T\{A_2\}}\{T\{f\}\} && \quad = \Lambda^{A_1}_{T\{A_2\}}\{T\{f\}\}\,.
\end{aligned}$$
□

Osservazione 2.0.20. Si definisce dualmente la *counità* dell'aggiunzione come il morfismo funtoriale $\rho\colon TH \to 1_{\mathcal{B}}$ con $\rho_B = \left(\Lambda_B^{H\{B\}}\right)^{-1}\left\{1_{H\{B\}}\right\}$. In generale σ e ρ non sono isomorfismi, cioè l'aggiunzione non dà delle equivalenze tra categorie.

Grazie all'aggiunzione si hanno queste identità:

$$\begin{aligned}
\Lambda_B^A\{f\} &= H\{f\}\,\sigma_A \\
\left(\Lambda_B^A\right)^{-1}\{g\} &= \rho_B T\{g\} \\
\rho_{T\{A\}}T\{\sigma_A\} &= 1_{T\{A\}} \\
H\{\rho_B\}\,\sigma_{H\{B\}} &= 1_{H\{B\}}\,.
\end{aligned}$$

Teorema 2.0.21. *Siano $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtori covarianti, $\sigma\colon 1_{\mathcal{A}} \to HT$ e $\rho\colon TH \to 1_{\mathcal{B}}$ morfismi funtoriali tali che $\rho_{T\{A\}}T\{\sigma_A\} = 1_{T\{A\}}$ e $H\{\rho_B\}\,\sigma_{H\{B\}} = 1_{H\{B\}}$, allora (T,H) è una aggiunzione con unità σ e counità ρ.*

Dimostrazione. $\underline{\Gamma_B^A = \left(\Lambda_B^A\right)^{-1}.}$ Siano $\Lambda_B^A\{f\} = H\{f\}\,\sigma_A$ e $\Gamma_B^A\{g\} = \rho_B T\{g\}$, allora presi $T\{A\} \xrightarrow{f} B$ e $A \xrightarrow{g} H\{B\}$, grazie al fatto che ρ e σ sono funtori, si ha:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_B^A\left\{\Lambda_B^A\{f\}\right\} = \\
&\quad = \Gamma_B^A\{H\{f\}\,\sigma_A\} \\
&\quad = \rho_B\left(T\{H\{f\}\,\sigma_A\}\right) \\
&\quad = \rho_B\left(TH\{f\}\right)\left(T\{\sigma_A\}\right) \\
&\quad = f\rho_{T\{A\}}T\{\sigma_A\} \\
&\quad = f
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\Lambda_B^A\left\{\Gamma_B^A\{f\}\right\} \\
&\quad = \Lambda_B^A\{\rho_B T\{g\}\} \\
&\quad = \left(H\{\rho_B T\{g\}\}\right)\sigma_A \\
&\quad = \left(H\{\rho_B\}\right)\left(HT\{g\}\right)\sigma_A \\
&\quad = H\{\rho_B\}\,\sigma_{H\{B\}}g \\
&\quad = g
\end{aligned}$$

$\underline{\Lambda \text{ realizza una aggiunzione.}}$ Presi $A_1 \xrightarrow{f} A_2$, $B_1 \xrightarrow{g} B_2$ e $T\{A_2\} \xrightarrow{\xi} B_1$, si ha:

$$\Lambda_{B_2}^{A_1}\left\{g\xi T\left\{f\right\}\right\} = \qquad\qquad H\left\{g\right\}\Lambda_{B_1}^{A_2}\left\{\xi\right\}f =$$
$$= H\left\{g\xi T\left\{f\right\}\right\}\sigma_{A_1} \qquad\qquad = H\left\{g\right\}H\left\{\xi\right\}\sigma_{A_2}f$$
$$= H\left\{g\right\}H\left\{\xi\right\}HT\left\{f\right\}\sigma_{A_1} \qquad\qquad = H\left\{g\right\}H\left\{\xi\right\}HT\left\{f\right\}\sigma_{A_1}$$

σ e ρ sono unità e counità. L'unità dell'aggiunzione (T, H) è $\Lambda_{T\{A\}}^{A}\left\{1_{T\{A\}}\right\} = H\left\{1_{T\{A\}}\right\}\sigma_A = \sigma_A$, mentre la counità è $\left(\Lambda_B^{H\{B\}}\right)^{-1}\left\{1_{H\{B\}}\right\} = \Gamma_B^{H\{B\}}\left\{1_{H\{B\}}\right\} = \rho_B T\left\{1_{H\{B\}}\right\} = \rho_B$. □

Proposizione 2.0.22. *Siano $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ due funtori che determinano un'equivalenza tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, cioè tali che esistono i due isomorfismi funtoriali $\eta\colon 1_{\mathcal{A}} \to HT$ e $\varepsilon\colon 1_{\mathcal{B}} \to TH$, allora (T, H) sono un'aggiunzione di unità η e counità ρ con $\rho_B = \varepsilon_B^{-1}T\left\{\eta_{H\{B\}}^{-1}\right\}\varepsilon_{TH\{B\}}$.*

Dimostrazione. Si dimostreranno le ipotesi del teorema precedente; per farlo innanzitutto si verifica che $\eta_{HT\{A\}} = HT\left\{\eta_A\right\}$ e $\varepsilon_{TH\{B\}} = TH\left\{\varepsilon_B\right\}$: questo è vero perché dal fatto che η e ε sono funtori si ottiene $\eta_{HT\{A\}}\eta_A = HT\left\{\eta_A\right\}\eta_A$ e $\varepsilon_{TH\{B\}}\varepsilon_B = TH\left\{\varepsilon_B\right\}\varepsilon_B$, ma η e ε sono isomorfismi funtoriali, quindi η_A e ε_B si possono elidere. Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
&\rho_{T\{A\}}T\left\{\eta_A\right\} = \\
&\quad = \varepsilon_{T\{A\}}^{-1}T\left\{\eta_{HT\{A\}}^{-1}\right\}\varepsilon_{THT\{A\}}T\left\{\eta_A\right\} \\
&\quad = \varepsilon_{T\{A\}}^{-1}T\left\{\eta_{HT\{A\}}^{-1}\right\}THT\left\{\eta_A\right\}\varepsilon_{T\{A\}} \\
&\quad = \varepsilon_{T\{A\}}^{-1}T\left\{\eta_{HT\{A\}}^{-1}\right\}T\left\{\eta_{HT\{A\}}\right\}\varepsilon_{T\{A\}} \\
&\quad = 1_{T\{A\}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&H\left\{\rho_B\right\}\eta_{H\{B\}} = \\
&\qquad = H\left\{\varepsilon_B^{-1} T\left\{\eta_{H\{B\}}^{-1}\right\}\varepsilon_{TH\{B\}}\right\}\eta_{H\{B\}} \\
&\qquad = H\left\{\varepsilon_B^{-1}\right\} HT\left\{\eta_{H\{B\}}^{-1}\right\} H\left\{\varepsilon_{TH\{B\}}\right\}\eta_{H\{B\}} \\
&\qquad = H\left\{\varepsilon_B^{-1}\right\} HT\left\{\eta_{H\{B\}}^{-1}\right\} HTH\left\{\varepsilon_B\right\}\eta_{H\{B\}} \\
&\qquad = H\left\{\varepsilon_B^{-1}\right\} HT\left\{\eta_{H\{B\}}^{-1}\right\} \eta_{HTH\{B\}} H\left\{\varepsilon_B\right\} \\
&\qquad = H\left\{\varepsilon_B^{-1}\right\} HT\left\{\eta_{H\{B\}}^{-1}\right\} HT\left\{\eta_{H\{B\}}\right\} H\left\{\varepsilon_B\right\} \\
&\qquad = 1_{H\{B\}}\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Proposizione 2.0.23. *Sia (T, H) un'aggiunzione di unità σ e counità ρ, e siano $\eta\colon 1_{\mathcal{A}} \to HT$, $\varepsilon\colon 1_{\mathcal{B}} \to TH$ isomorfismi funtoriali, allora anche σ e ρ sono isomorfismi funtoriali.*

Dimostrazione. Per l'unicità di unità e counità e la proposizione precedente, $\eta = \sigma$, mentre $\rho_B = \varepsilon_B^{-1} T\left\{\eta_{H\{B\}}^{-1}\right\}\varepsilon_{TH\{B\}}$, quindi ρ è un isomorfismo perché composizione di isomorfismi. $\square$

Esempio 2.0.24. Siano ancora $T = \bullet \otimes_R M$ e $H = \mathrm{Hom}\left\{M, \bullet\right\}$; l'unità di questa aggiunzione è definita da $\sigma_A = \Lambda_{A\otimes_R M}^{A}\left\{1_A\right\}$, cioè

$$
\begin{array}{rccc}
\sigma_A\colon & A & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S\left\{M, A\otimes_R M\right\} \\
& a & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & A\otimes_R M \\ m & \longmapsto & a\otimes m \end{array}\right);
\end{array}
$$

quindi $\sigma_A\left\{a\right\} = a \otimes \bullet$. Viceversa, la counità è definita da $\rho_B = \Gamma_B^{\mathrm{Hom}_S\{M,B\}}\left\{1_{\mathrm{Hom}_S\{M,B\}}\right\}$, cioè

$$
\begin{array}{rccc}
\rho_B\colon & \mathrm{Hom}_S\left\{M, B\right\}\otimes_R M & \longrightarrow & B \\
& f\otimes y & \longmapsto & f\left\{y\right\}.
\end{array}
$$

3 Categorie abeliane

3.1 Kernel

Definizione 3.1.1. Siano $A, B \in \mathcal{C}$ e $A \xrightarrow{f} B$, allora f è un *monomorfismo* se per ogni $C \xrightarrow{g_1, g_2} A$ con $fg_1 = fg_2$ si ha $g_1 = g_2$; f è *epimorfismo* se per ogni $B \xrightarrow{g_1, g_2} C$ con $g_1 f = g_2 f$ si ha $g_1 = g_2$.

Osservazione 3.1.2. Un isomorfismo è sia monomorfismo che epimorfismo, poiché si può comporre con l'inversa; al contrario, un monomorfismo ed epimorfismo può non essere isomorfismo, come ad esempio l'inclusione $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ nella categoria degli anelli.

Lemma 3.1.3. *Siano $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} A$ tali che $gf = 1_A$, allora f è monomorfismo e g è epimorfismo.*

Dimostrazione. Siano C un oggetto, $C \xrightarrow{\lambda_1, \lambda_2} A$ e $A \xrightarrow{\xi_1, \xi_2} C$; se $f\lambda_1 = f\lambda_2$ si ha $\lambda_1 = 1_A \lambda_1 = gf\lambda_1 = gf\lambda_2 = \lambda_2$; se invece $\xi_1 g = \xi_2 g$, si ha $\xi_1 = \xi_1 1_A = \xi_1 gf = \xi_2 gf = \xi_2$. $\square$

Definizione 3.1.4. Due morfismi $A \xrightarrow{f} B$ e $A' \xrightarrow{f'} B$ sono *equivalenti* se esiste un isomorfismo $A \xrightarrow{g} A'$ tale che valga

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \circlearrowleft & A' \arrow[dl, "f'"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

Osservazione 3.1.5. L'equivalenza è chiaramente una relazione di equivalenza; inoltre se f è equivalente a un monomorfismo o a un epimorfismo, è esso stesso un monomorfismo o un epimorfismo.

Definizione 3.1.6. Un *sottooggetto* di $C \in \mathcal{C}$ è una classe di equivalenza di monomorfismi con immagine C.

Definizione 3.1.7. Data una categoria $\mathcal{C}$, $A \in \mathcal{C}$ è un *oggetto iniziale* se $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, B\}| = 1$ per ogni $B \in \mathcal{C}$, è *oggetto finale* se $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{B, A\}| = 1$ per ogni $B \in \mathcal{C}$. Se A è iniziale e finale, è detto *zero* di $\mathcal{C}$.

Osservazione 3.1.8. Due oggetti iniziali $A, B \in \mathcal{C}$ sono naturalmente isomorfi: esistono uniche $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} A$, e $gf \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, A\}$ deve essere l'identità e viceversa; allo stesso modo due oggetti finali sono naturalmente isomorfi.

Definizione 3.1.9. Una *categoria preadditiva* è una categoria $\mathcal{C}$ tale che per ogni $A, B \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, B\}$ è un gruppo abeliano con elemento neutro notato 0_B^A e la composizione di funzioni è un morfismo di gruppi.

Osservazione 3.1.10. Se $\mathcal{C}$ è preadditiva e A è un suo zero, allora $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\{A, B\}$ è costituito dal solo elemento neutro del gruppo e viceversa; in questo caso si scrive $A = 0_{\mathcal{C}}$.

Osservazione 3.1.11. Se la categoria è preadditiva, f è monomorfismo se e solo se per ogni $fg = 0$ si ha $g = 0$ ed è epimorfismo se e solo se per ogni $gf = 0$ si ha $g = 0$, dove 0 è l'elemento neutro di un gruppo di morfismi.

Definizione 3.1.12. Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con $0_{\mathcal{C}}$ e $A \xrightarrow{f} B$, allora il *kernel* di f, se esiste, è una classe di equivalenza di un morfismo $K \xrightarrow{k} A$ tale che $fk = 0_B^K$ e caratterizzata dalla proprietà universale: per ogni altro morfismo $X \xrightarrow{\lambda} A$ con le stesse proprietà, esiste anche un unico morfismo $X \xrightarrow{\gamma} K$ tale che

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "k"] & & A \arrow[r, "f"] & B \\ & X. \arrow[ul, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "\lambda"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & & \end{tikzcd}$$

Proposizione 3.1.13. *La definizione è ben posta, cioè: se k soddisfa la proprietà universale del kernel di $A \xrightarrow{f} B$ ed è equivalente a k' allora anche k' soddisfa la proprietà universale; viceversa, se k e k' soddisfano la proprietà universale allora sono equivalenti. Inoltre se k è un kernel, allora è monomorfismo.*

Dimostrazione. Se k soddisfa la proprietà universale ed è equivalente a k' allora esiste un isomorfismo α tale che $k' = k\alpha$; quindi $fk' = fk\alpha = 0_B^{K'}$, inoltre se esistono X e $X \xrightarrow{\lambda} A$ tali che $f\lambda = 0_B^X$, esistono anche γ e $\gamma' = \alpha^{-1}\gamma$

come in

$$
\begin{tikzcd}
K' \arrow[rr, "k'"] \arrow[dr, "\alpha"] & & A \arrow[r, "f"] & B \\
& K \arrow[ur, "k"] & & \\
& X; \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[uul, dashed, "\gamma'"] \arrow[uur, "\lambda"'] & &
\end{tikzcd}
$$

il morfismo γ' è unico perché lo è γ.

Viceversa, se k' soddisfa la proprietà universale, allora esistono γ e γ' tali che $k\gamma = k'$ e $k'\gamma' = k$, cioè $k\gamma\gamma' = k$ e $k'\gamma'\gamma = k'$; per l'unicità richiesta dalla proprietà universale, $\gamma\gamma' = 1_{K'}$ e $\gamma'\gamma = 1_K$, cioè k è equivalente a k'.

Sia $X \xrightarrow{\xi} K$ un morfismo tale che $k\xi = 0_A^X$, allora $fk\xi = 0_B^X$, quindi esiste unico $X \xrightarrow{\gamma} K$ tale che $k\gamma = k\xi$; inoltre $k\xi = 0_A^X = k0_K^X$, quindi $\gamma = \xi = 0_K^X$. $\square$

Definizione 3.1.14. Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con $0_\mathcal{C}$ e $A \xrightarrow{f} B$, allora il *cokernel* di f, se esiste, è una classe di equivalenza di un morfismo $B \xrightarrow{\chi} Q$ tale che $\chi f = 0_Q^A$ e caratterizzata dalla proprietà universale: per ogni altro morfismo $B \xrightarrow{\eta} Y$ con le stesse proprietà, esiste anche un unico morfismo $Q \xrightarrow{\xi} Y$ tale che

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "\eta"'] & \circlearrowleft & Q \arrow[dl, dashed, "\xi"] \\
& & Y. &
\end{tikzcd}
$$

Osservazione 3.1.15. In modo analogo al kernel, si dimostra che la definizione del cokernel è ben posta e che un cokernel è sempre epimorfismo.

Osservazione 3.1.16. In generale si dirà che k è kernel di f per dire che il kernel di f è la classe di equivalenza di k, così per il cokernel, allo stesso modo in cui si scrive $A = 0_\mathcal{C}$ per dire che A è uno zero di $\mathcal{C}$.

Proposizione 3.1.17. *Sia $A \xrightarrow{f} B$; se f è dotato di kernel, allora è monomorfismo se e solo* $\ker f = 0_A^{0_\mathcal{C}}$*; se f è dotato di cokernel, allora è epimorfismo se e solo se* $\operatorname{coker} f = 0_{0_\mathcal{C}}^B$.

Dimostrazione. Se f è monomorfismo, ovviamente $f0_A^{0_\mathcal{C}} = 0_B^{0_\mathcal{C}}$, inoltre se esiste $X \xrightarrow{\lambda} A$ tale che $f\lambda = 0_B^X$, anche $f0_A^X = 0_B^X$, quindi $\lambda = 0_A^X$ perché f è monomorfismo, e ponendo $\gamma = 0_{0_\mathcal{C}}^X$ si ha che $0_A^{0_\mathcal{C}}$ soddisfa la proprietà universale.

Viceversa, se $0_A^{0_\mathcal{C}}$ è il kernel di f e $f\lambda = 0_B^X$, per la proprietà universale esiste un morfismo $X \xrightarrow{\gamma} 0_\mathcal{C}$ tale che $0_A^{0_\mathcal{C}}\gamma = \lambda$, cioè $\lambda = 0_A^X$, quindi f è monomorfismo. □

Proposizione 3.1.18. *Sia $\mathcal{C}$ una categoria dotata di tutti i kernel e i cokernel, allora se $k = \ker f$, $k = \ker \operatorname{coker} k$, se $\chi = \operatorname{coker} f$, $\chi = \operatorname{coker} \ker \chi$.*

Dimostrazione. Sia $\chi = \operatorname{coker} k$, allora si deve dimostrare che $k = \ker \chi$. Sia quindi $X \xrightarrow{\lambda} A$ un morfismo tale che $\chi\lambda = 0_Q^X$:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "k"] & & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\chi"] & & B \\
& X \arrow[ul, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "\lambda"'] & & Q; \arrow[ur, dashed, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

poiché $\chi = \operatorname{coker} k$ e $fk = 0_B^K$, esiste un unico morfismo $Q \xrightarrow{\eta} B$ tale che $\eta\chi = f$, quindi $f\lambda = \eta\chi\lambda = 0_B^X$. Essendo $k = \ker f$ e $f\lambda = 0_B^X$, esiste un unico morfismo $X \xrightarrow{\gamma} K$ tale che $k\gamma = \lambda$, cioè k soddisfa la proprietà universale per essere kernel di χ. □

Osservazione 3.1.19. Sia $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo, $k = \ker f$, $\chi = \operatorname{coker} f$, $\sigma = \operatorname{coker} k$ e $\nu = \ker \chi$:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, dashed, "\rho"] & B \arrow[r, "\chi"] & Q \\
& Q' \arrow[r, dashed, "\bar{f}"'] & K'. \arrow[u, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

Poiché $\nu = \ker \chi$ e $\chi f = 0_Q^A$, esiste un unico morfismo $A \xrightarrow{\rho} K'$ tale che $\nu\rho = f$; inoltre $0_B^K = fk = \nu\rho k$ implica $\rho k = 0$ perché ν è monomorfismo. Di conseguenza esiste un unico morfismo $Q' \xrightarrow{\bar{f}} K'$ tale che $\bar{f}\sigma = \rho$, in quanto

$\sigma = \operatorname{coker} k$. Infine si ha $\nu \bar{f} \sigma = f$. In generale, $\bar{f}$ non è un isomorfismo; una categoria in cui per ogni f, $\bar{f}$ così costruito è un isomorfismo si dice soddisfare la proprietà (ab).

Definizione 3.1.20. Una *categoria preabeliana* $\mathcal{C}$ è una categoria preadditiva con $0_{\mathcal{C}}$, dotata di tutti i kernel e i cokernel e che verifica (ab).

Lemma 3.1.21. *Se g è un monomorfismo allora* $\ker f = \ker gf$*; se f è un epimorfismo allora* $\operatorname{coker} g = \operatorname{coker} gf$*.*

Dimostrazione. Siano $k = \ker f$ e $k' = \ker gf$, allora $fk = 0_B^K$ e $gfk' = 0_C^{K'}$, da cui si ha $gfk = 0_C^K$ e $fk' = 0_B^{K'}$ perché g è monomorfismo. Quindi esistono γ e γ' tali che $k\gamma = k'$ e $k'\gamma' = k$, ma questo implica che k e k' sono equivalenti. □

Teorema 3.1.22. *Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con $0_{\mathcal{C}}$ e dotata di tutti i kernel e i cokernel, allora $\mathcal{C}$ è preabeliana se e solo se ogni morfismo f si può esprimere come $k\chi$ dove k è un kernel e χ è un cokernel.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{C}$ verifica (ab) allora $f = \nu \bar{f} \sigma$ e ν è un kernel mentre $\bar{f}\sigma$ è un cokernel in quanto equivalente a σ.

Viceversa, se ogni f si può scrivere come $\xi\eta$ con ξ monomorfismo e η epimorfismo, allora

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[dd, "\sigma"'] & & B \arrow[r, "\chi"] & Q \\
& & X \arrow[ur, "\xi"] \arrow[dr, dashed, "\beta"] & & \\
& Q' \arrow[ur, dashed, "\alpha"] \arrow[rr, "\bar{f}"'] & & K' . \arrow[uu, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

Poiché ξ è un kernel, è un monomorfismo, quindi $\ker \eta = \ker \eta\xi = \ker f = k$; inoltre η è un coker, quindi $\eta = \operatorname{coker} \ker \eta = \operatorname{coker} k$, cioè η e σ sono equivalenti, quindi esiste un isomorfismo α tale che $\alpha\sigma = \eta$. Procedendo dall'altra parte, dal fatto che η è un cokernel si ha che è un epimorfismo, quindi $\operatorname{coker}\xi = \operatorname{coker}\eta\xi = \operatorname{coker} f = \chi$, inoltre ξ è un kernel, quindi $\xi = \ker\operatorname{coker}\xi = \ker\chi$, cioè ξ e ν sono equivalenti, perciò esiste un isomorfismo β tale che $\nu\beta = \xi$.

Quindi da un lato $f = \nu\bar{f}\sigma$, dall'altro $f = \xi\eta = \nu\alpha\beta\sigma$, ma ν è monomorfismo e σ è epimorfismo, perciò $\bar{f} = \alpha\beta$ e $\bar{f}$ è isomorfismo. □

Lemma 3.1.23. *Si ha* $\ker 0^B_{0_\mathcal{C}} = 1_B$ *e* $\operatorname{coker} 0^{0_\mathcal{C}}_A = 1_A$.

Dimostrazione. Chiaramente $0^B_{0_\mathcal{C}}\, 1_B = 0^B_{0_\mathcal{C}}$; inoltre, se $X \xrightarrow{\lambda} B$ è un morfismo per cui $0^B_{0_\mathcal{C}}\lambda = 0^X_{0_\mathcal{C}}$, allora lo stesso morfismo λ è tale che $1_B\,\lambda = \lambda$. □

Proposizione 3.1.24. *Sia $\mathcal{C}$ una categoria preabeliana e $A \xrightarrow{f} B$, allora:*

- *f è un isomorfismo se e solo se è monomorfismo ed epimorfismo;*
- *f è monomorfismo se e solo se $f = \ker\operatorname{coker} f$;*
- *f è epimorfismo se e solo se $f = \operatorname{coker}\ker f$.*

Dimostrazione. Un isomorfismo è sempre monomorfismo ed epimorfismo; viceversa, se f è monomorfismo ed epimorfismo, allora $\ker f = 0^{0_\mathcal{C}}_A$ e $\operatorname{coker} f = 0^B_{0_\mathcal{C}}$. Poiché $\ker 0^B_{0_\mathcal{C}} = 1_B$ e $\operatorname{coker} 0^{0_\mathcal{C}}_A = 1_A$, $\bar{f} = f$ e f è un isomorfismo.

Se f è un kernel allora è sempre monomorfismo; viceversa, se f è monomorfismo, si può scrivere come $\xi\eta$ con ξ monomorfismo e η epimorfismo, allora $\eta = \operatorname{coker}\ker\eta = \operatorname{coker}\ker f = \operatorname{coker} 0^{0_\mathcal{C}}_A$, quindi η è coequivalente a 1_A e in particolare è un isomorfismo. Ora, $\xi = \ker\operatorname{coker}\xi = \ker\operatorname{coker} f$, ma essendo f equivalente a ξ si ha anche $f = \ker\operatorname{coker} f$. □

Definizione 3.1.25. L'*immagine* di un morfismo f è $\operatorname{Im} f = \ker\operatorname{coker} f$.

Lemma 3.1.26. *Sia $A \xrightarrow{f} B$ un epimorfismo, allora* $\operatorname{Im} f = 1_B$.

Dimostrazione. Sia $\chi = \operatorname{coker} f$, allora $\chi f = 0^A_Q$, ma f è un epimorfismo, quindi $\chi = 0^B_Q$; di conseguenza $\ker\chi = 1_B$. □

3.2 Prodotti

Definizione 3.2.1. Sia $\mathcal{C}$ una categoria e $(C_j)_{j\in I}$ una famiglia di oggetti di $\mathcal{C}$; se esiste, il *prodotto* della famiglia è la classe di equivalenza a meno di isomorfismi di un oggetto $\prod C_i$ dotato della famiglia di morfismi $(\pi_j)_{j\in I}$ tali che $\prod C_i \xrightarrow{\pi_j} C_j$ è caratterizzata dalla proprietà universale: per ogni famiglia di morfismi $X \xrightarrow{\eta_j} C_j$, esiste un unico morfismo $X \xrightarrow{\eta} \prod C_j$ tale che:

$$\begin{tikzcd} & \prod C_i \arrow[dr, "\pi_j"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X \arrow[ur, dashed, "\eta"] \arrow[rr, "\eta_j"'] & & C_j. \end{tikzcd}$$

Osservazione 3.2.2. Chiaramente la definizione è ben posta: se due oggetti soddisfano la proprietà universale allora sono isomorfi, se un oggetto soddisfa la proprietà universale, allora anche uno a lui isomorfo la soddisfa.

Proposizione 3.2.3. *Se $\prod C_i$ esiste, allora ogni π_j è un epimorfismo.*

Dimostrazione. Siano $C_j \xrightarrow{f,g} X$ tali che $f\pi_j = g\pi_j$; allora esiste un morfismo $C_j \xrightarrow{\eta} \prod C_i$ tale che $\pi_k\eta$ è un qualsiasi morfismo[1] se $j \neq k$, mentre $\pi_k\eta = 1_{C_j}$ se $j = k$. Quindi da $f\pi_j = g\pi_j$ si ottiene $f\pi_j\eta = g\pi_j\eta$, ma $\pi_j\eta = 1_{C_j}$ e si ha $f = g$. $\square$

Definizione 3.2.4. Procedendo dualmente, dalla famiglia $(C_j)_{j\in I}$ si definisce il *coprodotto* come la classe di equivalenza a meno di isomorfismi di un oggetto $\coprod C_i$ dotato della famiglia di morfismi $(\varepsilon_j)_{j\in I}$ tali che $C_j \xrightarrow{\varepsilon_j} \coprod C_i$ è caratterizzata dalla proprietà universale: per ogni famiglia di morfismi $C_j \xrightarrow{\xi_j} X$, esiste un unico morfismo $\coprod C_i \xrightarrow{\xi} X$ tale che:

$$\begin{tikzcd} & \coprod C_i \arrow[dr, dashed, "\xi"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ C_j \arrow[ur, "\varepsilon_j"] \arrow[rr, "\xi_j"'] & & X. \end{tikzcd}$$

[1]Se $\mathcal{C}$ è una categoria preadditiva si può evitare l'uso dell'assioma della scelta considerando $0_{C_k}^{C_j}$.

Osservazione 3.2.5. Ancora, la definizione è ben posta; inoltre le funzioni ε_j sono sempre monomorfismi.

Definizione 3.2.6. Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con $0_\mathcal{C}$, $I = \{0, \ldots, n-1\}$ e $(C_j)_{j \in I}$ una famiglia di oggetti di $\mathcal{C}$; allora il *biprodotto* della famiglia è una classe di equivalenza a meno di isomorfismi di un oggetto $\bigtimes C_i$ dotato di due famiglie di morfismi $(\pi_j)_{j \in I}$ e $(\varepsilon_j)_{j \in I}$ con $\bigtimes C_i \xrightarrow{\pi_j} C_j$ e $C_j \xrightarrow{\varepsilon_j} \bigtimes C_i$ tali che $\pi_k \varepsilon_j = \delta_{jk}$ (cioè $1_{\bigtimes C_i}$ se $j = k$, $0^{\bigtimes C_i}_{\bigtimes C_i}$ se $j \neq k$) e $\sum_{k \in I} \varepsilon_k \pi_j = 1^{\sum C_i}_{\bigtimes C_i}$.

Teorema 3.2.7. *Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con $0_\mathcal{C}$, $I = \{0, \ldots, n-1\}$ e $(C_j)_{j \in I}$ una famiglia di oggetti di $\mathcal{C}$, allora sono equivalenti:*

- *esiste il prodotto della famiglia;*
- *esiste il biprodotto della famiglia;*
- *esiste il coprodotto della famiglia.*

Inoltre se si verificano queste condizioni, prodotto, coprodotto e biprodotto sono la stessa classe di equivalenza di oggetti di $\mathcal{C}$.

Dimostrazione. Sia $\prod C_i$ il prodotto della famiglia di insiemi; per ogni $j \in I$, si considera la famiglia di funzioni $C_j \xrightarrow{\delta_{jk}} C_k$ al variare di $k \in I$; per la proprietà universale del prodotto, esiste $C_j \xrightarrow{\eta_j} \prod C_i$. Si ha $\pi_k \eta_j = \delta_{jk}$ per costruzione. Si deve dimostrare che $\sum_{j \in I} \eta_j \pi_j = 1_{\bigtimes C_i}$, ma $\pi_k \sum_{j \in I} \eta_j \pi_j = \sum_{j \in I} \pi_k \eta_j \pi_j = \sum_{j \in I} \delta_{kj} \pi_j = \pi_k = \pi_k 1_{\bigtimes C_i}$ ed essendo π_k epimorfismo, si ha l'uguaglianza.

Viceversa, se $\bigtimes C_i$ è il biprodotto della famiglia, si deve dimostrare che è anche prodotto se dotato della famiglia di morfismi $(\pi_j)_{j \in I}$. Sia quindi $X \xrightarrow{\eta_j} C_j$ una famiglia di morfismi, allora posto $\eta = \sum_{j \in I} \varepsilon_j \eta_j$, si ha $\pi_k \eta = \pi_k \sum_{j \in I} \varepsilon_j \eta_j = \sum_{j \in I} \pi_k \varepsilon_j \eta_j = \sum_{j \in I} \delta_{kj} \eta_j = \eta_k$; se η' soddisfa la medesima proprietà allora $\eta' = \eta' 1_{\bigtimes C_i} = \eta' \sum_{j \in I} \varepsilon_j \pi_j = \sum_{j \in I} \eta' \varepsilon_j \pi_j = \sum_{j \in I} \eta_j \pi_j = \sum_{j \in I} \eta \varepsilon_j \pi_j = \eta$. $\square$

Definizione 3.2.8. Una *categoria abeliana* è una categoria preabeliana in cui esistono tutti i prodotti delle famiglie finite di oggetti.

Lemma 3.2.9. *Sia $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una successione esatta in una categoria abeliana, allora $gf = 0$; inoltre, se f è un monomorfismo allora $f = \ker g$.*

Dimostrazione. L'esattezza della successione significa $\ker g = \operatorname{Im} f = \ker \operatorname{coker} f$. Sia $B \xrightarrow{\chi} Q$ il coker di f, allora esiste un unico morfismo $Q \xrightarrow{\xi} C$ tale che $\xi\chi = g$; allora $gf = \xi\chi f = \xi 0_Q^A = 0_C^A$ in quanto χf si annulla per le proprietà del cokernel. Se f è monomorfismo, si ha $f = \ker \operatorname{coker} f = \operatorname{Im} f = \ker g$. $\square$

Teorema 3.2.10. *Sia $0_\mathcal{C} \to C_1 \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C_2 \to 0_\mathcal{C}$ una successione esatta in una categoria abeliana:*

$$\begin{tikzcd}
0_\mathcal{C} \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[dr, "\varepsilon_1"'] & C \arrow[l, dashed, bend right, "\lambda"'] \arrow[d, dashed, "\alpha"] \arrow[r, "g"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend right, "\gamma"'] & 0 \\
& & C_1 \times C_2; \arrow[ur, "\pi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

allora sono equivalenti:

- *esiste $C \xrightarrow{\lambda} C_1$ tale che $\lambda f = 1_{C_1}$;*
- *esiste $C_2 \xrightarrow{\gamma} C$ tale che $g\gamma = 1_{C_2}$;*
- *esiste un isomorfismo $C \xrightarrow{\alpha} C_1 \times C_2$ tale che $\alpha f = \varepsilon_1$ e $\pi_2\alpha = g$.*

Se si verificano queste condizioni, la successione si dice spezzante *e in particolare $0 \to C_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} C_1 \times C_2 \xrightarrow{\pi_2} C_2 \to 0$ è esatta.*

Dimostrazione. <u>Costruzione di α.</u> Se esiste $C \xrightarrow{\lambda} C_1$ con $\lambda f = 1_{C_1}$, allora da C partono due morfismi verso C_1 e C_2, rispettivamente λ e g; poiché $C_1 \times C_2$ è anche un prodotto, esiste un unico morfismo $C \xrightarrow{\alpha} C_1 \times C_2$ tale che $\pi_1\alpha = \lambda$ e $\pi_2\alpha = g$; inoltre $\alpha f = 1_{C_1 \times C_2}\, \alpha f = (\varepsilon_1\pi_1 + \varepsilon_2\pi_2)\, \alpha f = \varepsilon_1\pi_1\alpha f + \varepsilon_2\pi_2\alpha f = \varepsilon_1\lambda f + \varepsilon_2 g f = \varepsilon_1\, 1_{C_1} + \varepsilon_2 0_C^A = \varepsilon_1$.

$\underline{\alpha \text{ è epimorfismo.}}$ Sia $C_1 \times C_2 \xrightarrow{\xi} X$ un morfismo tale che $\xi\alpha = 0_X^C$ allora $0 = \xi\alpha = \xi\, 1_{C_1 \times C_2}\, \alpha = \xi\,(\varepsilon_1\pi_1 + \varepsilon_2\pi_2)\,\alpha = \xi\varepsilon_1\pi_1\alpha + \xi\varepsilon_2\pi_2\alpha = \xi\alpha f\pi_1\alpha + \xi\varepsilon_2 g = \xi\varepsilon_2 g$ e poiché g è un epimorfismo $\xi\varepsilon_2 = 0_X^{C_2}$. Quindi $\xi = \xi\, 1_{C_1 \times C_2} = \xi\,(\varepsilon_1\pi_1 + \varepsilon_2\pi_2) = \xi\varepsilon_1\pi_1 + \xi\varepsilon_2\pi_2 = \xi\alpha f\pi_1 + \xi\varepsilon_2\pi_2 = 0_X^{C_1 \times C_2}$.

$\underline{\alpha \text{ è monomorfismo.}}$ Sia $X \xrightarrow{\lambda} C$ un morfismo tale che $\alpha\lambda = 0^X_{C_1 \times C_2}$, allora $0^X_{C_2} = \pi_2\alpha\lambda = g\lambda$; ma f è un monomorfismo e la successione è esatta, quindi $f = \ker g$. Per questo motivo esiste un unico morfismo $X \xrightarrow{\gamma} C_1$ tale che $f\gamma = \lambda$ e si ha $0 = \alpha\lambda = \alpha f\lambda = \varepsilon_1\lambda$, ma essento ε_1 monomorfismo, $\lambda = 0$.

Viceversa, se esiste l'isomorfismo α, si può definire $\lambda = \pi_1\alpha$, allora $\lambda f = \pi_1\alpha f = \pi_1\varepsilon_1 = 1_{C_1}$. $\square$

3.3 Limiti

Definizione 3.3.1. Una categoria si dice *piccola* se i suoi oggetti formano un insieme.

Definizione 3.3.2. Siano $\mathcal{I}$ una categoria piccola e $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtore covariante; un *cono* su F è un oggetto $X \in \mathcal{C}$ munito di una famiglia di morfismi $(\alpha_I)_{I\in\mathcal{I}}$ con $X \xrightarrow{\alpha_I} F\{I\}$ tali che per ogni $I \xrightarrow{\lambda} J$ si verifica

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\alpha_I"'] \arrow[dr, "\alpha_J"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ F\{I\} \arrow[rr, "F\{\lambda\}"'] & & F\{J\}. \end{tikzcd}$$

Definizione 3.3.3. Siano $\mathcal{I}$ una categoria piccola e $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtore covariante; un *limite* di F è una classe di equivalenza a meno di isomorfismi di un cono X dotato dei morfismi $(\alpha_I)_{I\in\mathcal{I}}$ che soddisfa la proprietà universale: per ogni altro cono Y dotato dei morfismi $(\xi_I)_{I\in\mathcal{I}}$, esiste un unico morfismo $Y \xrightarrow{\xi} X$ tale che per ogni I si abbia

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\xi_I"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[dl, "\alpha_I"] \\ & F\{I\}. & \end{tikzcd}$$

Osservazione 3.3.4. La definizione è ben posta e il limite si indica con $\varprojlim F$.

Esempio 3.3.5. Sia $\mathcal{I}$ una categoria piccola e discreta (in cui $\mathrm{Hom}\{I, I\} = \{1\}_I$ e $\mathrm{Hom}\{I, J\} = \varnothing$ se $I \neq J$); allora X è un cono se $\alpha_I = F\{1_I\}\alpha_I$, cioè ogni oggetto è un cono; di conseguenza $\varprojlim F = \prod_{I\in\mathcal{I}} F\{I\}$, ove esista.

Esempio 3.3.6. Sia $\mathcal{I} = \{I, J, K\}$ con i soli morfismi $I \xrightarrow{u_K^I} K$ e $J \xrightarrow{u_K^J} K$ oltre alle identità, allora X è un cono se $\alpha_K = F\left\{u_K^I\right\}\alpha_I = F\left\{u_K^J\right\}\alpha_K$, quindi il cono è completamente definito da α_I e α_J. In questo caso $\varprojlim F$ è il *pullback* di $F\left\{u_K^I\right\}$ e $F\left\{u_K^J\right\}$.

Se la categoria di destinazione è abeliana e $u_K^I = 0_K^I$, allora un cono è definito da una funzione $X \xrightarrow{\alpha_J} F\{J\}$ tale che $F\left\{u_K^J\right\}\alpha_J = 0^X_{F\{K\}}$; il limite di F in questo caso è il kernel di $F\left\{u_K^J\right\}$.

Definizione 3.3.7. Una categoria $\mathcal{C}$ è *completa* se per ogni categoria piccola $\mathcal{I}$ e ogni funtore covariante $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, esiste il limite $\varprojlim F$.

Teorema 3.3.8. *Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con $0_{\mathcal{C}}$, allora $\mathcal{C}$ è completa se e solo se ha tutti i prodotti e tutti i kernel.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{C}$ è completa ha tutti i prodotti e i kernel in quanto sono particolari tipi di limite.

Costruzione di $\varprojlim F$. Si denota con $\mathrm{Hom}\{\mathcal{I}\}$ l'insieme di tutti i morfismi tra oggetti di $\mathcal{I}$ e se $\lambda \in \mathrm{Hom}\{\mathcal{I}\}$, il dominio di λ si scrive $s\{\lambda\}$, il codominio $t\{\lambda\}$. Si considerano $A = \prod_{I\in\mathcal{I}} F\{I\}$, dotato dei morfismi π_I, e $B = \prod_{\lambda\in\mathrm{Hom}\{\mathcal{I}\}} F\{t\{\lambda\}\}$, dotato dei morfismi $q\{t\{\lambda\}\}$; poiché

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\pi_{s\{\lambda\}}"'] \arrow[dr, "\pi_{t\{\lambda\}}"] & \\
F\{s\{\lambda\}\} \arrow[rr, "F\{\lambda\}"'] & & F\{t\{\lambda\}\}
\end{tikzcd}$$

Non è commutativo, in generale si avrà $p_\mu = F\{\mu\}\pi_{s\{\mu\}} - \pi_{t\{\mu\}}$ non nullo. Per la proprietà universale di B, esiste un morfismo $A \xrightarrow{p} B$; siano $k = \ker p$

e $k_J = \pi_J k$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & B \arrow[dr, "q_{t\{\mu\}}"] & \\
K \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "k_J"'] & & A \arrow[ur, dashed, "p"] \arrow[rr, "p_\mu"'] \arrow[dl, "\pi_J"] & & F\{t\{\mu\}\} \\
 & F\{J\} & & & \\
 & X \arrow[uul, dashed, "\xi"] \arrow[uur, dashed, "\alpha"'] \arrow[u, "\xi_J"] & & &
\end{tikzcd}
$$

<u>Costruzione di $X \xrightarrow{\xi} K$.</u> Sia X un cono su F con la famiglia di morfismi ξ_J; allora per la proprietà universale di A, esiste il morfismo $X \xrightarrow{\alpha} A$; per fattorizzarlo tramite k, è necessario dimostrare che $p\alpha = 0_B^X$ e questo è equivalente a mostrare che $q_{t\{\mu\}}p\alpha = 0$ per ogni $\mu \in \mathrm{Hom}\{\mathcal{I}\}$, perché se si verifica questa condizione, quei morfismi si sollevano in modo unico, quindi $p\alpha = 0_B^X$. Si ha $q_{t\{\mu\}}p\alpha = \left(F\{\mu\}\pi_{s\{\mu\}} - \pi_{t\{\mu\}}\right)\alpha = F\{\mu\}\pi_{s\{\mu\}}\alpha - \pi_{t\{\mu\}}\alpha = F\{\mu\}\xi_{s\{\mu\}} - \xi_{t\{\mu\}} = 0^X_{F\{t\{\mu\}\}}$, in quanto X con i morfismi ξ_J è un cono su F. A questo punto, per la proprietà universale del kernel di p, esiste un unico morfismo $X \xrightarrow{\xi} K$ tale che $k\xi = \alpha$.

<u>$k_J\xi = \xi_J$ e ξ è unico.</u> Si ha $k_J\xi = \pi_J k\xi = \pi_J\alpha = \xi_J$. Ora, se ξ' è un altro morfismo per cui $k_J\xi' = \xi_J$, allora $k\xi' = \alpha$: questo perché $\pi_J k\xi' = k_J\xi' = \xi_J = \pi_J\alpha$, per ogni $J \in \mathcal{I}$, quindi anche $k\xi' = \alpha$. Ma per la proprietà universale del kernel, esiste un unico ξ tale che $k\xi = \alpha$, quindi $\xi' = \xi$. $\square$

Definizione 3.3.9. Sia $\mathcal{I}$ una categoria che ha come oggetti gli elementi di un insieme parzialmente ordinato e in cui $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\{I, J\} = \left\{u_J^I\right\}$ se e solo se $I \leq J$; un funtore $F\colon \mathcal{I}^\circ \to \mathcal{C}$ è detto *sistema inverso* in $\mathcal{C}$ se, posto $\beta_I^J = F\left\{u_J^I\right\}$, si ha $\beta_I^J\beta_J^L = \beta_I^L$ per ogni $I \leq J \leq L$.

Definizione 3.3.10. Il limite di un sistema inverso F si dice *limite inverso*.

Esempio 3.3.11. Se $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ e $\beta_n^{n+1} = F\left\{u_{n+1}^n\right\}$ allora F è un sistema inverso se $\beta_n^{n+2} = \beta_n^{n+1}\beta_{n+1}^{n+2}$; sia inoltre $X_n = F\{n\}$. Al posto di considerare

$\prod_{n,k\in\mathbb{N}} X_{t\left\{\beta_n^{n+k}\right\}}$, si può prendere solo $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_{t\left\{\beta_n^{n+1}\right\}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, perché le mappe β_n^{n+k} con $k \neq 1$ non modificano il kernel del morfismo p.

Siano ora A un anello, $\mathfrak{I} \leq A$ un suo ideale, $X_n = \frac{A}{\mathfrak{I}_n}$ e $\beta_n^{n+1}\left\{a + \mathfrak{I}^{n+1}\right\} = a + \mathfrak{I}^n$; β_n^{n+1} è ben definita perché $\mathfrak{I}^n \subseteq \mathfrak{I}^{n+1}$ e F è chiaramente un sistema inverso. In questo caso,

$$\begin{aligned}\varprojlim F &= \left\{ \left(a_n + \mathfrak{I}^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \mid \beta_n^{n+1}\left\{a_{n+1} + \mathfrak{I}^{n+1}\right\} = a_n + \mathfrak{I}^n \right\} \\ &= \left\{ \left(a_n + \mathfrak{I}^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_{n+1} - a_n \in \mathfrak{I}^{n+1} \right\},\end{aligned}$$

e in particolare se $A = k[x]$ e $\mathfrak{I} = (x)$, $\varprojlim F = k[[x]]$; se A è un anello locale e $\mathfrak{I}$ è il suo ideale massimale, $\varprojlim F$ dà una descrizione del comportamento analitico della varietà intorno al punto in cui si è localizzato.

Osservazione 3.3.12. Se $\varphi\colon F \to G$ è un morfismo funtoriale tra funtori covarianti da $\mathcal{I}$ a $\mathcal{C}$ che ammettono limiti con morfismi di definizione rispettivamente α_I e β_I, allora

$$\begin{tikzcd} & F\{I\} \arrow[r, "\varphi_I"] \arrow[d, "F\{\lambda\}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G\{I\} \arrow[d, "G\{\lambda\}"] \\ \varprojlim F \arrow[ur, "\alpha_I"] \arrow[dr, "\alpha_J"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} & {} \\ & F\{J\} \arrow[r, "\varphi_J"'] & G\{J\}; \end{tikzcd}$$

cioè $\varprojlim F$ è un cono su G grazie ai morfismi $\varphi_I\alpha_I$; per questo motivo, esiste un unico morfismo $\varprojlim F \xrightarrow{\varprojlim \varphi} \varprojlim G$ tale che

$$\begin{tikzcd} \varprojlim F \arrow[rr, "\varprojlim \varphi"] \arrow[dr, "\varphi_I\alpha_I"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "\circlearrowleft"] & & \varprojlim G \arrow[dl, "\beta_I"] \\ & G\{I\}. & \end{tikzcd}$$

Se $\mathcal{C}$ è completa, si può parlare del funtore $\varprojlim$ dalla categoria $\operatorname{Hom}\{\mathcal{I},\mathcal{C}\}$ a $\mathcal{C}$.

Teorema 3.3.13. *Il funtore $\varprojlim$ è esatto a sinistra.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che se per ogni $I \in \mathcal{I}$ sono esatte le successioni $0_{\mathcal{C}} \to F\{I\} \xrightarrow{\varphi_I} G\{I\} \xrightarrow{\psi_I} H\{I\}$, è esatta anche la successione

$$0_{\mathcal{C}} \to \varprojlim F \xrightarrow{\varprojlim \varphi} \varprojlim G \xrightarrow{\varprojlim \psi} \varprojlim H.$$

$\varprojlim \varphi$ è un monomorfimo. Sia $X \xrightarrow{\xi} \varprojlim F$ un morfismo tale che $\varprojlim \varphi\xi = 0^X_{\varprojlim \psi}$; allora per ogni $I \in \mathcal{I}$, $\beta_I \varprojlim \varphi\xi = 0^X_{G\{I\}}$, ma $\beta_I \varprojlim \varphi\xi = \varphi_I\alpha_I\xi$ ed essendo φ_I un monomorfismo, $\alpha_I\xi = 0^X_{F\{I\}}$ per ogni $I \in \mathcal{I}$ e da questo segue $\xi = 0^X_{\varprojlim F}$.

$\operatorname{Im} \varprojlim \varphi = \ker \varprojlim \psi$. Poiché $\varprojlim \varphi$ è un monomorfismo, si ha $\varprojlim \varphi = \ker \operatorname{coker} \varprojlim \varphi = \operatorname{Im} \varprojlim \varphi$, quindi basta dimostrare che $\varprojlim \varphi = \ker \varprojlim \psi$. Sia quindi $X \xrightarrow{\lambda} \varprojlim G$ un morfismo tale che $\varprojlim \psi\lambda = 0^X_{\varprojlim H}$, allora si annullano tutti i $\gamma_I \varprojlim \psi\lambda = \psi_I\beta_I\lambda$. Poiché φ_I è un monomorfismo, si ha $\varphi_I = \ker \psi_I$, quindi per ogni $I \in \mathcal{I}$ esiste un unico morfismo $X \xrightarrow{\eta_I} F\{I\}$ tale che $\varphi_I\eta_I = \beta_I\lambda$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim F \arrow[rr, "\varprojlim \varphi"] \arrow[dd, "\alpha_I"'] & & \varprojlim G \arrow[r, "\varprojlim \psi"] \arrow[dd, "\beta_I"'] \arrow[dd, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowleft"] & \varprojlim H \arrow[dd, "\gamma_I"] \\
 & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[ul, dashed, "\xi"'] \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dl, dashed, "\eta_I"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & & \\
0 \arrow[r] & F\{I\} \arrow[rr, "\varphi_I"'] & \; & G\{I\} \arrow[r, "\psi_I"'] & H\{I\}.
\end{tikzcd}$$

Si ha quindi una famiglia di morfismi $(\eta_I)_{I\in\mathcal{I}}$, allora si può mostrare che X con questa famiglia è un cono su F: si deve mostrare che, preso un morfismo $I \xrightarrow{\lambda} J$, $\eta_J = F\{\mu\}\eta_I$, che è equivalente a dimostrare $\varphi_J\eta_J = \varphi_J F\{\mu\}\eta_I$ in quanto φ_J è monomorfismo. Si ha $\varphi_J\eta_J = \beta_J\lambda = G\{\mu\}\beta_I\lambda = G\{\mu\}\varphi_I\eta_I = \varphi_J F\{\mu\}\eta_I$, perché $\varprojlim G$ è un cono su G. Per la proprietà universale si $\varprojlim F$, esiste un unico morfismo $X \xrightarrow{\xi} \varprojlim F$ tale che $\alpha_I\xi = \eta_I$. Rimane da dimostrare che $\varprojlim \varphi\xi = \lambda$, ma per ogni $I \in \mathcal{I}$, $\beta_I \varprojlim \varphi\xi = \varphi_I\alpha_I\xi = \varphi_I\eta_I = \beta_I\lambda$, da cui $\varprojlim \varphi\xi = \lambda$. $\square$

Teorema 3.3.14. *Sia (T, H) una coppia di funtori aggiunti, $F\colon I \to \mathcal{B}$,* *allora* $\varprojlim HF = H\left\{\varprojlim F\right\}$ *e se* $\varprojlim F$ *è definito dai morfismi* α_I*, allora* $\varprojlim HF$ *è definito dai morfismi* $H\{\alpha_I\}$*.*

Dimostrazione. Poiché H è un funtore, subito si ha che $H\left\{\varprojlim F\right\}$ dotato dei morfismi $H\{\alpha_I\}$ è un cono su HF. Si prenda un cono X su HF con i morfismi $X \xrightarrow{\xi_I} HF\{I\}$.

Esiste $X \xrightarrow{\xi} H\left\{\varprojlim F\right\}$. Dal fatto che X è un cono si ha $HF\{\mu\}\,\xi_I = \xi_J$ e applicando T si ha $THF\{\mu\}\,T\{\xi_I\} = T\{\xi_J\}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & THF\{I\} \arrow[rr, "\rho_{F\{I\}}"] \arrow[dd, "THF\{\mu\}"] \arrow[ddrr, phantom, "\circlearrowleft"] & & F\{I\} \arrow[dd, "F\{\mu\}"] \\
T\{X\} \arrow[ur, "T\{\xi_I\}"] \arrow[dr, "T\{\xi_J\}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} & & \\
 & THF\{J\} \arrow[rr, "\rho_{F\{J\}}"] & & F\{J\},
\end{tikzcd}
$$

dove ρ è la counità dell'aggiunzione. Quindi $T\{X\}$ è un cono su F con i morfismi $\rho_{F\{I\}}T\{\xi_I\}$ e perciò esiste un unico morfismo $T\{X\} \xrightarrow{\eta} \varprojlim F$ tale che $\alpha_I\eta = \rho_{F\{I\}}T\{\xi_I\}$; sia $\xi = \Lambda^X_{\varprojlim F}\{\eta\}$; ξ va da X a $H\left\{\varprojlim F\right\}$. Perché ξ sia il morfismo cercato deve essere $H\{\alpha_I\}\,\xi = \xi_I$, ma per le proprietà dell'aggiunzione

$$
\begin{aligned}
H\{\alpha_I\}\,\xi &= H\{\alpha_I\}\,\Lambda^X_{\varprojlim F}\{\eta\} \\
&= \Lambda^X_{F\{I\}}\{\alpha_I\eta\} \\
&= \Lambda^X_{F\{I\}}\left\{\rho_{F\{I\}}T\{\xi_I\}\right\} \\
&= \Lambda^{HF\{I\}}_{F\{I\}}\left\{\rho_{F\{I\}}\right\}\xi_I \\
&= \Lambda^{HF\{I\}}_{F\{I\}}\left\{\left(\Lambda^{HF\{I\}}_{F\{I\}}\right)\left\{1_{HF\{I\}}\right\}\right\}\xi_I \\
&= \xi_I.
\end{aligned}
$$

ξ è unico. Sia ξ' un altro morfismo tale che $H\{\alpha_I\}\,\xi' = \xi_I$, per cui cioè si ha $H\{\alpha_I\}\,\xi' = H\{\alpha_I\}\,\xi$; $\Lambda^X_{\varprojlim F}$ è un isomorfismo, quindi esiste η' tale che $\xi' = \Lambda^X_{\varprojlim F}\{\eta'\}$. Allora da un lato $H\{\alpha_I\}\,\xi' = H\{\alpha_I\}\,\Lambda^X_{\varprojlim F}\{\eta'\} = \Lambda^X_{F\{I\}}\{\alpha_I\eta'\}$, dall'altro procedendo allo stesso modo $H\{\alpha_I\}\Lambda^X_{\varprojlim F}\{\eta\} = \Lambda^X_{F\{I\}}\{\alpha_I\eta\}$; allora, sempre perché $\Lambda^X_{F\{I\}}$ è un isomorfismo, si ha $\alpha_I\eta' = \alpha_I\eta$ per ogni $I \in \mathcal{I}$, quindi $\eta = \eta'$ e $\xi = \xi'$. □

Osservazione 3.3.15. Si possono definire tutti i concetti duali, cioè quelli di *cocono*, *colimite* (notato $\varinjlim F$), di categoria *cocompleta*, di *sistema diretto* e di *limite diretto*. Valgono quindi i risultati duali:

- una categoria è cocompleta se e solo se ha tutti i cokernel e i coprodotti;
- $\varinjlim$ è un funtore ed è esatto a destra;
- se (T, H) è una coppia di funtori aggiunti, allora $\varinjlim TF = T\left\{\varinjlim F\right\}$.

4 Funtori derivati

4.1 Complessi

Definizione 4.1.1. Un complesso di A-moduli destri è una successione $C_\bullet = \left(C_n, \partial_n^{C_\bullet}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che $C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^{C_\bullet}} C_n \xrightarrow{\partial_n^{C_\bullet}} C_{n-1}$ e $\partial_n^{C_\bullet}\partial_{n+1}^{C_\bullet} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. $\partial_n^{C_\bullet}$ è detto operatore differenziale; l'n-ciclo di $C_\bullet$ è $Z_n\left\{C_\bullet\right\} := \ker \partial_n^{C_\bullet}$; l'$n$-bordo di è $B_n\left\{C_\bullet\right\} := \operatorname{Im} \partial_{n+1}^{C_\bullet}$. Si ha $B_n \subseteq Z_n$ e $H_n\left\{C_\bullet\right\} := \frac{Z_n\{C_\bullet\}}{B_n\{C_\bullet\}}$ è detto n-esimo modulo di omologia di $C_\bullet$.

Definizione 4.1.2. Dati $C_\bullet$, $D_\bullet$, un morfismo di complessi tra i due è $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet$ e consiste nel definire $C_n \xrightarrow{\varphi_n} D_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ in modo che il diagramma seguente sia commutativo:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\varphi_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}^{C_\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D_{n+1} \arrow[d, "\partial_{n+1}^{D_\bullet}"] \\
C_n \arrow[r, "\varphi_n"'] & D_n.
\end{tikzcd}$$

Lemma 4.1.3. *Dato un complesso $C_\bullet$ (omesso nelle notazioni), si possono indurre i morfismi $\hat{\partial}_n\colon \operatorname{coker} \partial_{n+1} \to \ker \partial_{n-1}$; questi morfismi sono tali che* $\ker \hat{\partial}_n = H_n$ *e* $\operatorname{coker} \hat{\partial}_n = H_{n-1}$.

Dimostrazione. Si ha $\operatorname{coker} \partial_{n+1} = \frac{C_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}} = \frac{C_n}{B_n}$, mentre $\ker \partial_{n-1} = Z_{n-1}$; quindi si cerca un morfismo $\hat{\partial}_n\colon \frac{C_n}{B_n} \to Z_{n-1}$; si ponga $\hat{\partial}_n\left\{c_n + B_n\right\} = \partial_n\left\{c_n\right\}$. Questo morfismo ha come codominio Z_{n-1} perché $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ ed è ben definito in quanto se $c_n \in B_n$, allora $c_n \in \partial_{n+1}\left\{C_{n+1}\right\}$ e $\partial_n\partial_{n+1}\left\{C_{n+1}\right\} = 0$.

Risulta $\ker \hat{\partial}_n = \frac{\ker \partial_n}{B_n} = H_n$, mentre $\operatorname{coker} \hat{\partial}_n = \frac{Z_{n-1}}{\operatorname{Im} \partial_n} = H_{n-1}$. $\square$

Osservazione 4.1.4. Da un morfismo di complessi $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet$ si possono indurre anche i seguenti morfismi.

- Un morfismo tra i moduli di omologia:

$$\begin{aligned}
H_n\left\{\varphi\right\}\colon \quad \frac{Z_n\{C_\bullet\}}{B_n\{C_\bullet\}} = H_n\left\{C_\bullet\right\} &\longrightarrow H_n\left\{D_\bullet\right\} = \frac{Z_n\{D_\bullet\}}{B_n\{D_\bullet\}} \\
z_n + B_n\left\{C_\bullet\right\} &\longmapsto \varphi_n\left\{z_n\right\} + B_n\left\{D_\bullet\right\}.
\end{aligned}$$

$H_n\{\varphi\}$ è ben definito perché se $z_n \in B_n\{C_\bullet\}$, $\varphi_n\{z_n\} \in B_n\{D_\bullet\}$: infatti se z_n è immagine di $\partial^{C_\bullet}_{n+1}$, percorrendo il diagramma nel verso contrario risulta che $\varphi_n\{z_n\}$ è immagine di $\partial^{D_\bullet}_{n+1}$, cioè $\varphi_n\{z_n\} \in B_n\{D_\bullet\}$.

- Un morfismo tra i cokernel degli operatori differenziali:

$$\begin{array}{rccc} \Gamma_n\{\varphi\}: & \frac{C_n}{B_n\{C_\bullet\}} = \operatorname{coker}\partial^{C_\bullet}_{n+1} & \longrightarrow & \operatorname{coker}\partial^{D_\bullet}_{n+1} = \frac{D_n}{B_n\{D_\bullet\}} \\ & c_n + B_n\{C_\bullet\} & \longmapsto & \varphi_n\{c_n\} + B_n\{D_\bullet\}. \end{array}$$

$\Gamma_n\{\varphi\}$ è ben definito per lo stesso motivo di $H_n\{\varphi\}$.

- Un morfismo tra i kernel degli operatori differenziali:

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_n\{\varphi\}: & Z_{n-1}\{C_\bullet\} = \ker\partial^{C_\bullet}_{n-1} & \longrightarrow & \ker\partial^{D_\bullet}_{n-1} = Z_{n-1}\{D_\bullet\} \\ & c_{n-1} & \longmapsto & \varphi_{n-1}\{c_{n-1}\}. \end{array}$$

$\Lambda_n\{\varphi\}$ è ben definito perché se $c_{n-1} \in Z_{n-1}\{C_\bullet\}$, allora in particolare $0 = \varphi_{n-2}\partial^{C_\bullet}_{n-1}\{c_{n-1}\} = \partial^{C_\bullet}_{n-1}\varphi_{n-1}\{c_{n-1}\}$, cioè $\varphi_{n-1}\{c_{n-1}\} \in Z_{n-1}$.

Osservazione 4.1.5. Risulta commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \frac{C_n}{B_n\{C_\bullet\}} \arrow[r, "\Gamma_n\{\varphi\}"] \arrow[d, "\hat{\partial}^{C_\bullet}_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \frac{D_n}{B_n\{D_\bullet\}} \arrow[d, "\hat{\partial}^{D_\bullet}_n"] \\ Z_{n-1}\{C_\bullet\} \arrow[r, "\Lambda_n\{\varphi\}"'] & Z_{n-1}\{D_\bullet\}, \end{tikzcd}$$

in quanto

$$\begin{aligned} \Lambda_n\{\varphi\}\hat{\partial}^{C_\bullet}_n\{c_n + B_n\{C_\bullet\}\} = & \quad \hat{\partial}^{D_\bullet}_n\Gamma_n\{\varphi\}\{c_n + B_n\{D_\bullet\}\} \\ = \Lambda_n\{\varphi\}\partial^{C_\bullet}_n\{c_n\} & \quad = \hat{\partial}^{D_\bullet}_n\{\varphi_n\{c_n\} + B_n\{D_\bullet\}\} \\ = \varphi_{n-1}\partial^{C_\bullet}_n\{c_n\} & \quad = \partial^{D_\bullet}_n\varphi_n\{c_n\}. \end{aligned}$$

Si può costruire anche il seguente diagramma completamente commutativo:

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[rrr, "\varphi_n"] \arrow[dr] \arrow[ddd, "\partial_n^{C_\bullet}"'] & & & D_n \arrow[dl] \arrow[ddd, "\partial_n^{D_\bullet}"] \\
& \operatorname{coker} \partial_{n+1}^{C_\bullet} = \frac{C_n}{B_n\{C_\bullet\}} \arrow[r, "\Gamma_n\{\varphi\}"] \arrow[d, "\hat{\partial}_n^{C_\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \frac{D_n}{B_n\{D_\bullet\}} = \operatorname{coker} \partial_{n+1}^{D_\bullet} \arrow[d, "\hat{\partial}_n^{D_\bullet}"] & \\
& \ker \partial_{n-1}^{C_\bullet} = Z_{n-1}\{C_\bullet\} \arrow[r, "\Lambda_n\{\varphi\}"'] \arrow[dl] & Z_{n-1}\{D_\bullet\} = \ker \partial_{n-1}^{D_\bullet} \arrow[dr] & \\
C_{n-1} \arrow[rrr, "\varphi_{n-1}"'] & & & D_{n-1}.
\end{tikzcd}$$

Lemma 4.1.6. *Siano* $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet \xrightarrow{\psi} E_\bullet$ *morfismi di complessi, allora* $\psi\varphi$ *definito da* $(\psi\varphi)_n = \psi_n\varphi_n$ *è ancora un morfismo e* $H_n\{\psi\varphi\} = H_n\{\psi\}\, H_n\{\varphi\}$.

Dimostrazione. L'applicazione costruita è ovviamente un morfismo. Si ha $H_n\{\psi\}\{H_n\{\varphi\}\{c_n + B_n\{C_\bullet\}\}\} = H_n\{\psi\}\{\varphi_n\{c_n\} + B_n\{D_\bullet\}\} = \psi_n\varphi_n\{c_n\} + B_n\{E_\bullet\} = H_n\{\psi\varphi\}\{c_n + B_n\{C_\bullet\}\}$. □

Lemma 4.1.7 (del serpente)**.** *Se il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varepsilon'"'] & B' \arrow[r, "\pi'"'] & C' &
\end{tikzcd}$$

ha le righe esatte, allora per la commutatività esistono $\varepsilon_\star$, $\pi_\star$, $\varepsilon'_\star$, $\pi'_\star$ *come* *nel diagramma seguente:*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker\alpha \arrow[r, "\varepsilon_\star"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \ker\beta \arrow[r, "\pi_\star"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \ker\gamma \arrow[d] & \\
 & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r, "\varepsilon'_\star"] \arrow[d] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r, "\pi'_\star"] \arrow[d] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 & .
\end{tikzcd}
$$

Inoltre esiste $\ker\gamma \xrightarrow{\omega} \operatorname{coker}\alpha$ *tale che*

$$\ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma$$

sia esatta. Inoltre, se ε *è iniettiva lo è anche* $\varepsilon_\star$ *e se* π' *è suriettiva lo è anche* $\pi'_\star$.

Dimostrazione. Costruzione di ω. Sia $c \in \ker\gamma$, allora esiste $b \in B$ tale che $c = \pi\{b\}$, quindi $0 = \gamma\pi\{b\} = \pi'\beta\{b\}$, cioè $\beta\{b\} \in \ker\pi' = \operatorname{Im}\varepsilon'$; quindi esiste un $a' \in A'$ tale che $\varepsilon'\{a'\} = \beta\{b\}$. Si definisce $\omega\{c\} = a' + \operatorname{Im}\alpha$. Per mostrare che ω è ben definita, si prenda $\bar{b}$ con $\pi\left\{\bar{b}\right\} = c$; $\bar{b}$ definisce $\omega\{c\} = \bar{a}'$. Allora $b - \bar{b} \in \ker\pi = \operatorname{Im}\varepsilon$, quindi esiste $a \in A$ tale che $\varepsilon\{a\} = b - \bar{b}$ e $\varepsilon'\{a' - \bar{a}'\} = \beta\left\{b - \bar{b}\right\} = \beta\varepsilon\{a\} = \varepsilon'\alpha\{a\}$. Per l'iniettività di ε', si conclude $a' - \bar{a}' = \alpha\{a\}$, cioè a' e $\bar{a}'$ sono nella stessa classe di $\operatorname{coker}\alpha$.

La successione è esatta. Si dimostrano le seguenti:

- $\operatorname{Im}\pi_\star \subseteq \ker\omega$: preso $c \in \operatorname{Im}\pi_\star$, esiste $b \in \ker\beta$ tale che $c = \pi_\star\{b\} = \pi\{b\}$; per la costruzione esiste $a' \in A'$ con $\beta\{b\} = \varepsilon'\{a'\}$, ma $b \in \ker\beta$

implica $0 = \beta\{b\} = \varepsilon'\{a'\}$, cioè $a' \in \ker \varepsilon'$; per l'iniettività di ε', $a' = 0$, quindi $\omega\{c\} = a' = 0$ e $c \in \ker \omega$;

- $\operatorname{Im} \pi_\star \supseteq \ker \omega$: preso $c \in \ker \omega$, $\omega\{c\} = 0 + \operatorname{Im} \alpha$, e si ha che per ogni $b \in B$ tale che $\beta\{b\} = \varepsilon'\{0\} = 0$, $\pi\{b\} = c$; ma $\beta\{b\} = 0$ significa $b \in \ker \beta$, cioè $c \in \operatorname{Im} \pi_\star$;

- $\operatorname{Im} \omega \subseteq \ker \varepsilon'_\star$: preso $a' \in \operatorname{Im} \omega$, esiste $c \in \ker \gamma$ con $\omega\{c\} = a'$; per costruzione, per ogni $b \in B$ tale che $\beta\{b\} = \varepsilon'\{a'\}$ si ha $\pi\{b\} = c$ ed esiste almeno uno di tali b; quindi esiste $b \in B$ con $\beta\{b\} = \varepsilon'\{a'\}$, cioè $\varepsilon'\{a'\} \in \operatorname{Im} \beta$, cioè $a' \in \ker \varepsilon'_\star$;

- $\operatorname{Im} \omega \supseteq \ker \varepsilon'_\star$: $a' \in \ker \varepsilon'_\star$ significa $\varepsilon'\{a'\} \in \operatorname{Im} \beta$, cioè esiste $b \in B$ tale che $\beta\{b\} = \varepsilon'\{a'\}$; ma per costruzione di ω, $\omega\pi\{b\} = a'$, cioè $a' \in \operatorname{Im} \omega$. □

Teorema 4.1.8. *Sia $0 \to C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet \xrightarrow{\psi} E_\bullet \to 0$ una successione esatta (cioè tale che lo sia per ogni n), allora per ogni n esiste un morfismo $H_n\{E_\bullet\} \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}\{C_\bullet\}$ tale che la successione*

$$\dots \to H_{n+1}\{E_\bullet\} \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n\{C_\bullet\} \xrightarrow{H_n\{\varphi\}} H_n\{D_\bullet\} \xrightarrow{H_n\{\psi\}} H_n\{E_\bullet\} \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}\{C_\bullet\} \to \dots$$

sia esatta.

Dimostrazione. Per le osservazioni su Γ_n e Λ_n si può costruire il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{C_n}{B_n\{C_\bullet\}} \arrow[r, "\Gamma_n\{\varphi\}"] \arrow[d, "\hat\partial_n^{C_\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \frac{D_n}{B_n\{D_\bullet\}} \arrow[r, "\Gamma_n\{\psi\}"] \arrow[d, "\hat\partial_n^{D_\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \frac{E_n}{B_n\{E_\bullet\}} \arrow[r] \arrow[d, "\hat\partial_n^{E_\bullet}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}\{C_\bullet\} \arrow[r, "\Lambda_n\{\varphi\}"'] & Z_{n-1}\{D_\bullet\} \arrow[r, "\Lambda_n\{\psi\}"'] & Z_{n-1}\{E_\bullet\} &
\end{tikzcd}$$

e dimostrare che le righe sono esatte:

- $\Gamma_n\{\psi\}$ è suriettiva poiché lo è ψ_n;

- $\Lambda_n\{\varphi\}$ è iniettiva poiché lo è φ_n;

- $\operatorname{Im}\Gamma_n\{\varphi\} \supseteq \ker\Gamma_n\{\psi\}$: si consideri $d_n + B_n\{D_\bullet\} \in \ker\Gamma_n\{\psi\}$, allora

$$0 = \Gamma_n\{\psi\}\{d_n + B_n\{D_\bullet\}\} = \psi_n\{d_n\} + B_n\{E_\bullet\},$$

cioè $\psi_n\{d_n\} \in B_n\{E_\bullet\} = \operatorname{Im}\partial^{E_\bullet}_{n+1}$, quindi esiste $e_{n+1} \in E_{n+1}$ tale che

$$\psi_n\{d_n\} = \partial^{E_\bullet}_{n+1}\{e_{n+1}\};$$

ma ψ_{n+1} è suriettiva, quindi esiste $d_{n+1} \in D_{n+1}$ tale che $\psi_{n+1}\{d_{n+1}\} = e_{n+1}$; componendo si ha

$$\psi_n\{d_n\} = \partial^{E_\bullet}_{n+1}\psi_{n+1}\{d_{n+1}\} = \psi_n\partial^{D_\bullet}_{n+1}\{d_{n+1}\},$$

cioè $d_n - \partial^{D_\bullet}_{n+1}\{d_{n+1}\} \in \ker\psi_n \subseteq \operatorname{Im}\varphi_n$. Quindi esiste $c_n \in C_n$ tale che $\varphi_n\{c_n\} = d_n - \partial^{D_\bullet}_{n+1}\{d_{n+1}\}$; passando ai quozienti,

$$\varphi_n\{c_n\} + B_n\{D_\bullet\} = d_n - \partial^{D_\bullet}_{n+1}\{d_{n+1}\} + B_n\{D_\bullet\} = d_n + B_n\{D_\bullet\},$$

da cui $\Gamma_n\{\varphi\}\{c_n\} = d_n + B_n\{D_\bullet\} \in \operatorname{Im}\Gamma_n\{\varphi\}$.

- $\operatorname{Im}\Gamma_n\{\varphi\} \subseteq \ker\Gamma_n\{\psi\}$: sia $d_n + B_n\{D_\bullet\} \in \operatorname{Im}\Gamma_n\{\varphi\}$, allora esiste $c_n \in C_n$ tale che

$$\varphi_n\{c_n\} + B_n\{D_\bullet\} = d_n + B_n\{D_\bullet\}.$$

Applicando $\Gamma_n\{\psi\}$, $\Gamma_n\{\psi\}\{\varphi_n\{c_n\} + B_n\{D_\bullet\}\} = \psi_n\varphi_n\{c_n\} + B_n\{E_\bullet\} = 0 + B_n\{E_\bullet\}$, poiché $\psi_n\varphi_n = 0$.

- $\operatorname{Im}\Lambda_n\{\varphi\} \supseteq \ker\Lambda_n\{\psi\}$: sia $d_{n-1} \in \ker\Lambda_n\{\psi\}$, allora

$$0 = \Lambda_n\{\psi\}\{d_{n-1}\} = \psi_{n-1}\{d_{n-1}\},$$

cioè $d_{n-1} \in \ker\psi_{n-1} = \operatorname{Im}\varphi_{n-1}$. Quindi esiste $c_{n-1} \in C_{n-1}$ tale che

$d_{n-1} = \varphi_{n-1}\{c_{n-1}\} = \Lambda_n\{\varphi\}\{c_{n-1}\}$; rimane da dimostrare che $c_{n-1} \in Z_{n-1}\{C_\bullet\}$; si ha

$$\varphi_n \partial^{C_\bullet}_{n-1}\{c_{n-1}\} = \partial^{D_\bullet}_{n-1}\varphi_{n-1}\{c_{n-1}\} = \partial^{D_\bullet}_{n-1}\{d_{n-1}\} = 0$$

poiché $d_{n-1} \in Z_{n-1}\{D_\bullet\}$. Per l'iniettività di φ_n si conclude che $\partial^{C_\bullet}_{n-1}\{c_{n-1}\} = 0$.

- $\operatorname{Im}\Lambda_n\{\varphi\} \subseteq \ker\Lambda_n\{\psi\}$: sia $d_{n-1} \in \operatorname{Im}\Lambda_n\{\varphi\}$, allora esiste $c_{n-1} \in Z_{n-1}\{C_\bullet\}$ tale che $d_{n-1} = \varphi_{n-1}\{c_{n-1}\}$; quindi $\Lambda_n\{\psi\}\{d_{n-1}\} = \psi_{n-1}\varphi_{n-1}\{c_{n-1}\} = 0$.

Il diagramma soddisfa le condizioni del lemma 4.1.7; applicandolo risulta ω tale che

$$\ker\hat{\partial}^{C_\bullet}_n \to \ker\hat{\partial}^{D_\bullet}_n \to \ker\hat{\partial}^{E_\bullet}_n \xrightarrow{\omega} \operatorname{coker}\hat{\partial}^{C_\bullet}_n \to \operatorname{coker}\hat{\partial}^{D_\bullet}_n \to \operatorname{coker}\hat{\partial}^{E_\bullet}_n;$$

sostituendo si ha la seguente successione esatta:

$$H_n\{C_\bullet\} \to H_n\{D_\bullet\} \to H_n\{E_\bullet\} \xrightarrow{\omega} H_{n-1}\{C_\bullet\} \to H_{n-1}\{D_\bullet\} \to H_{n-1}\{E_\bullet\}.$$

□

4.2 Omotopie

Definizione 4.2.1. Dati $C_\bullet \xrightarrow{\varphi,\psi} D_\bullet$ morfismi di complessi, un'omotopia tra φ e ψ è $\varphi \xrightarrow{\Sigma} \psi$ costituita da $C_n \xrightarrow{\Sigma_n} D_{n+1}$ per ogni n, con $\varphi_n - \psi_n = \partial^{D_\bullet}_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}\partial^{C_\bullet}_n$.

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\Sigma_n"] \arrow[d, "\partial^{C_\bullet}_n"'] \arrow[dr, shift left, "\varphi_n"] \arrow[dr, shift right, "\psi_n"'] & D_{n+1} \arrow[d, "\partial^{D_\bullet}_{n+1}"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "\Sigma_{n-1}"'] & D_n \end{tikzcd}$$

Se esiste un'omotopia tra φ e ψ si scrive $\varphi \simeq \psi$.

Osservazione 4.2.2. Se Σ è un'omotopia, si ottiene che $H_n\{\varphi\}\{c_n + B_n\{C_\bullet\}\} = \varphi_n\{c_n\} + B_n\{D_\bullet\} =$

$\psi_n\{c_n\}+\partial_{n+1}^{D_\bullet}\Sigma_n\{c_n\}+\Sigma_{n-1}\partial_n^{C_\bullet}\{c_n\}+B_n\{D_\bullet\}=\psi_n\{c_n\}+B_n\{D_\bullet\}$: infatti $\partial_{n+1}^{D_\bullet}\Sigma_n\{c_n\}\in B_n\{D_\bullet\}$, mentre $c_n\in Z_n\{C_\bullet\}$ implica $\Sigma_{n-1}\partial_n^{C_\bullet}\{c_n\}=0$. Quindi si ottiene $H_n\{\varphi\}=H_n\{\psi\}$, cioè l'omotopia conserva i morfismi tra i moduli di omologia.

Proposizione 4.2.3. *L'omotopia è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. La relazione è chiaramente riflessiva (con $\Sigma_n=0$) e simmetrica (con $\Sigma'_n=-\Sigma_n$). Per dimostrare la transitività, siano $\varphi\xrightarrow{\Sigma}\psi\xrightarrow{\Theta}\chi$ due omotopie; risulta $\chi_n-\varphi_n=(\chi_n-\psi_n)+(\psi_n-\varphi_n)=\partial_{n+1}^{D_\bullet}\{\Sigma_n+\Theta_n\}+(\Sigma_{n-1}+\Theta_{n-1})\,\partial_n^{C_\bullet}$. Quindi $\Sigma+\Theta$ è un'omotopia tra φ e χ. $\square$

Lemma 4.2.4. *Siano $C_\bullet\xrightarrow{\varphi,\psi}D_\bullet\xrightarrow{\varphi',\psi'}E_\bullet$. Se $\varphi\simeq\psi$ allora $\varphi'\varphi\simeq\varphi'\psi$, mentre se $\varphi'\simeq\psi'$ allora $\varphi'\psi\simeq\psi'\psi$.*

Inoltre, se $\varphi\simeq\psi$ e $\varphi'\simeq\psi'$ allora $\varphi'\varphi\simeq\psi'\psi$.

Dimostrazione. Per il primo caso, si ha $\varphi'_n\varphi_n-\varphi'_n\psi_n=\varphi'_n\partial_{n+1}^{D_\bullet}\Sigma_n+\varphi'_n\Sigma_{n-1}\partial_n^{C_\bullet}=\partial_{n+1}^{E_\bullet}\varphi'_{n+1}\Sigma_n+\varphi'_n\Sigma_{n-1}\partial_n^{C_\bullet}$; quindi $\varphi'\Sigma$ realizza l'omotopia tra $\varphi'\varphi$ e $\varphi'\psi$, dove $(\varphi'\Sigma)_n=\varphi'_{n+1}\Sigma_n$. Allo stesso modo si verifica che la seconda omotopia cercata è data da $\Theta\psi$, con $(\Theta\psi)_n=\Theta_n\psi_n$.

Se $\varphi\simeq\psi$ e $\varphi'\simeq\psi'$, per le dimostrazioni precedenti si ha $\varphi'\varphi\simeq\varphi'\psi$ e $\varphi'\psi\simeq\psi'\psi$; poiché l'omotopia è una relazione di equivalenza, $\varphi'\varphi\simeq\psi'\psi$. $\square$

Lemma 4.2.5. *Sia F un funtore additivo e $\varphi\simeq\psi$, allora $F\{\varphi\}\simeq F\{\psi\}$, cioè un funtore additivo preserva l'omotopia; in particolare $H_n\{F\{\varphi\}\}=H_n\{F\{\psi\}\}$.*

Dimostrazione. Applicando il funtore al complesso $C_\bullet$ si ottiene un altro complesso $F\{C_\bullet\}$ con $\partial_n^{F\{C_\bullet\}}=F\left\{\partial_n^{C_\bullet}\right\}$: infatti $F\left\{\partial_{n-1}^{C_\bullet}\right\}F\left\{\partial_n^{C_\bullet}\right\}=F\left\{\partial_{n-1}^{C_\bullet}\partial_n^{C_\bullet}\right\}=F\{0\}=0$, e la commutatività del diagramma segue da quella del complesso $C_\bullet$. Applicando F alla relazione di omotopia si conserva l'uguaglianza, quindi $F\{\varphi\}\simeq F\{\psi\}$ tramite l'omotopia $F\{\Sigma\}$. $\square$

Esempio 4.2.6. L'uguaglianza tra gli $H_n\{\varphi\}$ non implica l'omotopia tra i φ:

si considerino i due complessi $C_\bullet$ e $D_\bullet$ legati dal morfismo φ:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 = \mathbb{Z} \arrow[r, "2\bullet"] \arrow[d, "\varphi_0 = 1_{\mathbb{Z}}"] & C_0 = \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & D_1 = \mathbb{Z} \arrow[r] & D_0 = 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Poiché tutte le composizioni $\varphi_{n-1}\partial_n^{C_\bullet}$ e $\partial_n^{D_\bullet}\varphi_n$ sono nulle, φ è un morfismo di complessi.

Si ha $H_n\{D_\bullet\} = 0$ per ogni $n \neq 1$ e $H_1\{C_\bullet\} = 0$, quindi $H_n\{\varphi\} = 0$ per ogni n, cioè $H_n\{\varphi\} = H_n\{0\}$, ma $\varphi \not\simeq 0$. Infatti se per assurdo fosse così, preso un qualsiasi funtore additivo F, si avrebbe $F\{\varphi\} \simeq F\{0\} = 0$. Sia F il funtore $\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$; applicando F e considerando che $\mathbb{Z} \otimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, il diagramma diventa:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & F\{C_1\} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "F\{\varphi_0\} = 1_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}"] & F\{C_0\} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots . \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & F\{D_1\} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \arrow[r] & F\{D_0\} = 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

In particolare $H_1\{F\{C_\bullet\}\} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = H_1\{F\{D_\bullet\}\}$ e $H_1\{F\{\varphi\}\} = 1_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}$, da cui si deduce $F\{\varphi\} \not\simeq 0$ e quindi $\varphi \not\simeq 0$.

4.3 Risoluzioni proiettive

Definizione 4.3.1. Un complesso $C_\bullet$ è detto positivo se $C_n = 0$ per ogni $n < 0$, positivo aciclico se inoltre $H_n\{C_\bullet\} = 0$ per ogni $n > 0$. Il complesso è detto proiettivo se lo sono tutti i C_n.

Osservazione 4.3.2. Un complesso positivo aciclico è quindi un complesso del tipo

$$\ldots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2^{C_\bullet}} C_1 \xrightarrow{\partial_1^{C_\bullet}} C_0 \longrightarrow 0,$$

con $Z_n\{C_\bullet\} = B_n\{C_\bullet\}$ per ogni $n > 0$. La successione non è esatta perché

$\partial_1^{C_\bullet}$ non è suriettivo, ma si può renderla esatta in questo modo:

$$\ldots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2^{C_\bullet}} C_1 \xrightarrow{\partial_1^{C_\bullet}} C_0 \xrightarrow{\pi} \frac{C_0}{B_0\{C_\bullet\}} = H_0\{C_\bullet\} \longrightarrow 0.$$

Definizione 4.3.3. Sia M un A-modulo destro, e $C_\bullet$ un complesso proiettivo positivo aciclico con $\frac{C_o}{B_0\{C_\bullet\}} = M$; allora $C_\bullet$ è detto risoluzione proiettiva di M e si ha:

$$\ldots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2^{C_\bullet}} C_1 \xrightarrow{\partial_1^{C_\bullet}} C_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Lemma 4.3.4. *Ogni modulo è immagine epimorfa di un modulo proiettivo.*

Dimostrazione. A è un modulo proiettivo in quanto basta considerare $h\{a\} = xa$ dove $x \in M$ è tale che $f\{x\} = g\{1\}$:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0; \end{tikzcd}$$

x esiste perché f è un epimorfismo. Si può dimostrare inoltre che $\{\, P_i \mid i \in I \,\}$ è una famiglia di moduli proiettivi se e solo se $\bigoplus_{i\in I} P_i$ è proiettivo. Da questo fatto si deduce che $A^{(M)}$ è proiettivo per un qualsiasi insieme M e in particolare se M è un modulo. Un elemento di $A^{(M)}$ è una funzione $M \xrightarrow{f} A$ con $\operatorname{Supp} f$ finito; sia quindi $A^{(M)} \xrightarrow{\varphi} M$ l'applicazione che associa a f l'elemento $\sum_{m\in M} mf\{m\}$. Questa applicazione è ben definita per l'osservazione sul supporto ed è chiaramente un epimorfismo. $\square$

Proposizione 4.3.5. *Ogni A-modulo destro ammette una risoluzione proiettiva.*

Dimostrazione. Sia M un modulo; per il lemma precedente, ogni modulo è immagine epimorfa di un modulo proiettivo, cioè esiste un epimorfismo $P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M$ con P_0 proiettivo. Si costruisce il complesso per ricorrenza: si supponga di conoscere $P_0, \ldots, P_{n-1}$ e $\partial_1^{P_\bullet}, \ldots, \partial_{n-1}^{P_\bullet}$; per il lemma precedente, esiste un modulo proiettivo P_n e un epimorfismo $P_n \xrightarrow{\varphi_n} \ker \varphi_{n-1}$; sia $\partial_n^{P_\bullet}$ la composizione di φ_n con l'iniezione di $\ker \partial_{n-1}^{P_\bullet}$ in P_{n-1}:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "\partial_2^{P_\bullet}"] \arrow[d, "\varphi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^{P_\bullet}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"'] & 0 \\
& \ker \varphi_1 \arrow[ur, hook] \arrow[d] & \ker \varphi_0 \arrow[ur, hook] \arrow[d] & M \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Si ottiene un complesso positivo, aciclico e proiettivo per costruzione; inoltre $\frac{P_0}{B_0\{P_\bullet\}} = \frac{P_0}{\operatorname{Im}\varphi_1} = \frac{P_0}{\ker \varphi_0} = M$. □

Teorema 4.3.6 (del sollevamento). *Siano $P_\bullet$ un complesso proiettivo positivo, $D_\bullet$ un complesso positivo aciclico e $H_0\{P_\bullet\} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} H_0\{D_\bullet\}$ un morfismo, allora esiste un morfismo di complessi φ tale che $H_0\{\varphi\} = \tilde{\varphi}$. Inoltre se anche ψ soddisfa $H_0\{\psi\} = \tilde{\varphi}$, si ha $\varphi \simeq \psi$ (in particolare, $H_n\{\varphi\}$ dipende solo da $\tilde{\varphi}$).*

Dimostrazione. Siamo nella seguente situazione:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "\partial_2^{P_\bullet}"] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^{P_\bullet}"] & P_0 \arrow[r, "\pi_P"] & H_0\{P_\bullet\} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & D_2 \arrow[r, "\partial_2^{D_\bullet}"] & D_1 \arrow[r, "\partial_1^{D_\bullet}"] & D_0 \arrow[r, "\pi_D"] & H_0\{D_\bullet\} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

<u>Esistenza di φ.</u> Poiché P_0 è proiettivo, esiste $P_0 \xrightarrow{\varphi_0} D_0$ tale che $\pi_D\varphi_0 = \tilde{\varphi}\pi_P$. Componendo a destra con $\partial_1^{P_\bullet}$ si ottiene $0 = \pi_D\varphi_0\partial_1^{P_\bullet} = \tilde{\varphi}\pi_P\partial_1^{P_\bullet}$, dato che l'immagine di $\partial_1^{P_\bullet}$ viene annullata da π_P. Quindi si ricava che $\operatorname{Im}\varphi_0\partial_1^{P_\bullet} \subseteq \ker \pi_D = \operatorname{Im}\partial_1^{D_\bullet} = B_0\{D_\bullet\}$ e si può scrivere:

$$\begin{tikzcd}
& P_1 \arrow[dl, dashed, "\varphi_1"'] \arrow[d, "\varphi_0\partial_1^{P_\bullet}"] & \\
D_1 \arrow[r, "\partial_1^{D_\bullet}"'] & B_0\{D_\bullet\} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

con $\varphi_0 \partial_1^{P_\bullet} = \partial_1^{D_\bullet} \varphi_1$; procedendo per ricorrenza si costruisce φ per l'aciclicità di $D_\bullet$, grazie alla quale si può iterare il procedimento.

Unicità a meno di omotopie. Se ψ è un altro sollevamento, si cerca un'omotopia $\psi \xrightarrow{\Sigma} \varphi$. Chiaramente $\Sigma_n = 0$ per ogni $n < 0$, quindi Σ_0 deve soddisfare $\psi_0 - \varphi_0 = \partial_1^{D_\bullet} \Sigma_0$, ma $\pi_D \{\psi_0 - \varphi_0\} = \tilde{\varphi}\pi_P - \tilde{\varphi}\pi_P = 0$ cioè $\operatorname{Im}\{\psi_0 - \varphi_0\} \subseteq \ker \pi_D = \operatorname{Im} \partial_1^{D_\bullet} = B_0 \{D_\bullet\}$ e per la proiettività si può scrivere

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[dl, dashed, "\Sigma_0"'] \arrow[d, "\psi_0 - \varphi_0"] & \\
D_1 \arrow[r, "\partial_1^{D_\bullet}"'] & B_0 \{D_\bullet\} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

quindi Σ_0 esiste. Per ricorrenza, Σ_n deve soddisfare $\psi_n - \varphi_n = \partial_{n+1}^{D_\bullet} \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \partial_n^{P_\bullet}$. Per usare la proiettività di P_n, deve essere $\operatorname{Im}\left\{\psi_n - \varphi_n - \Sigma_{n-1}\partial_n^{P_\bullet}\right\} \subseteq B_n \{D_\bullet\} = \ker \partial_n^{D_\bullet}$, e questo si verifica grazie all'ipotesi di ricorrenza. Quindi per proiettività esiste Σ_n con $\partial_{n+1}^{D_\bullet} \Sigma_n = \psi_n - \varphi_n - \Sigma_{n-1} \partial_n^{P_\bullet}$. □

Lemma 4.3.7. *Tutte le risoluzioni proiettive di un modulo sono nella stessa classe di omotopia, cioè se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ sono risoluzioni esistono φ e ψ tali che $\varphi\psi \simeq 1_{Q_\bullet}$ e $\psi\varphi \simeq 1_{P_\bullet}$.*

Dimostrazione. Se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ sono entrambe risoluzioni proiettive di un modulo M, si può prendere $\tilde{\varphi} = 1_M$ e si ottengono quindi due sollevamenti $P_\bullet \xrightarrow{\varphi} Q_\bullet$ e $Q_\bullet \xrightarrow{\psi} P_\bullet$ con $\varphi\psi \simeq 1_{Q_\bullet}$ e $\psi\varphi \simeq 1_{P_\bullet}$, poiché l'identità e $\psi\varphi$ sono sollevamenti di 1_M da $P_\bullet$ a se stesso. □

Inoltre l'omotopia dà l'uguaglianza nelle coomologie, cioè $1_{H_n\{P_\bullet\}} = H_n \{1_{P_\bullet}\} = H_n \{\psi\varphi\} = H_n \{\psi\} H_n \{\varphi\}$ e viceversa. Si ha quindi che le coomologie di $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ sono isomorfe tramite $H_n \{\varphi\}$ e $H_n \{\psi\}$.

4.4 Funtori derivati

Osservazione 4.4.1. Si consideri un funtore covariante additivo T dalla categoria degli A-moduli destri a quella dei gruppi abeliani, ad esempio il prodotto tensoriale $\bullet \otimes_A X$. Preso un modulo M e una sua risoluzione proiettiva $P_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$, applicando T si ottiene un complesso con $\partial_n^{T\{P_\bullet\}} \partial_{n+1}^{T\{P_\bullet\}} = T\left\{\partial_n^{P_\bullet}\right\} T\left\{\partial_{n+1}^{P_\bullet}\right\} = 0$, ma l'esattezza non è più garantita e in particolare $H_n\{T\{P_\bullet\}\}$ non è necessariamente nullo per ogni $n > 0$.

Proposizione 4.4.2. *Si ponga $L_n^{P_\bullet}\{T\{M\}\} := H_n\{T\{P_\bullet\}\}$ e si consideri la seguente situazione:*

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] & 0 \\
P'_\bullet \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

con $P_\bullet$, $P'_\bullet$ risoluzioni proiettive di M, M' e φ un sollevamento di $\tilde{\varphi}$. Posto $L_n^{P_\bullet P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\} = H_n\{T\{\varphi\}\}$, $L_n^{P_\bullet} T$ è ben definito e si comporta come un funtore.

Dimostrazione. La definizione di $L_n^{P_\bullet P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\}$ è ben posta perché φ è unico a meno di omotopie al variare del sollevamento e per il lemma 4.2.5 questo è sufficiente perché $H_n\{\varphi\}$ sia unico. Si ha:

$$H_n\{T\{P_\bullet\}\} = L_n^{P_\bullet} T\{M\} \xrightarrow{H_n\{T\{\varphi\}\} = L_n^{P_\bullet P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\}} L_n^{P'_\bullet} T\{M'\} = H_n\{T\{P'_\bullet\}\}.$$

Inoltre sono soddisfatte le seguenti.

- Per ogni $M \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M' \xrightarrow{\tilde{\varphi}'} M''$ si ha $L_n^{P_\bullet P''_\bullet} T\{\tilde{\varphi}'\tilde{\varphi}\} = L_n^{P'_\bullet P''_\bullet} T\{\tilde{\varphi}'\} L_n^{P_\bullet P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\}$. Infatti Presi φ e φ' sollevamenti, si ha $L_n^{P'_\bullet P''_\bullet} T\{\tilde{\varphi}'\} L_n^{P_\bullet P'_\bullet} T\{\tilde{\varphi}\} = H_n\{T\{\varphi'\}\} H_n\{T\{\varphi\}\} = H_n\{T\{\varphi'\} T\{\varphi\}\} = H_n\{T\{\varphi'\varphi\}\} = L_n^{P_\bullet P''_\bullet} T\{\tilde{\varphi}'\tilde{\varphi}\}$.

- Preso M, $L_n^{P_\bullet P_\bullet} T\{1_M\} = 1_{L_n^{P_\bullet} T\{M\}}$. Infatti un sollevamento di 1_M è omotopicamente equivalente a $1_{P_\bullet}$ e $H_n\{T\{1_{P_\bullet}\}\} = 1_{H_n\{T\{P_\bullet\}\}}$. □

Lemma 4.4.3. *Prese $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ risoluzioni proiettive di M, $L_n^{P_\bullet} T\{M\}$ e $L_n^{Q_\bullet} T\{M\}$ sono legate da un isomorfismo canonico.*

Dimostrazione. Esistono i sollevamenti α_{PQ} e α_{QP} (unici a meno di omotopie) dell'identità. Per le osservazioni precedenti si ha $\alpha_{QP}\alpha_{PQ} \simeq 1_{P_\bullet}$ e ciò implica $T\{\alpha_{QP}\}T\{\alpha_{PQ}\} = T\{\alpha_{QP}\alpha_{PQ}\} \simeq T\{1_{P_\bullet}\} = 1_{T\{P_\bullet\}}$ perché T è additivo.

Da questa omotopia si ricava che $1_{H_n\{T\{P_\bullet\}\}} = H_n\left\{1_{T\{P_\bullet\}}\right\} = H_n\{T\{\alpha_{QP}\}T\{\alpha_{PQ}\}\} = H_n\{T\{\alpha_{QP}\}\}H_n\{T\{\alpha_{PQ}\}\}$. Chiaramente vale anche il viceversa, così $H_n\{T\{\alpha_{QP}\}\}$ e $H_n\{T\{\alpha_{PQ}\}\}$ realizzano un isomorfismo tra $H_n\{T\{P_\bullet\}\}$ e $H_n\{T\{Q_\bullet\}\}$. $\square$

Lemma 4.4.4. *Prese $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ risoluzioni proiettive di M, $P'_\bullet$ e $Q'_\bullet$ di M' e $M \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M'$, allora $L_n^{P_\bullet P'_\bullet}T\{M\}$ e $L_n^{Q_\bullet Q'_\bullet}T\{M\}$ sono compatibili con l'isomorfismo del lemma precedente.*

Dimostrazione. Si deve verificare che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
L_n^{P_\bullet}T\{M\} \arrow[r, "L_n^{P_\bullet P'_\bullet}T\{\tilde{\varphi}\}"] \arrow[d, "L_n^{P_\bullet Q_\bullet}T\{1_M\}"'] & L_n^{P'_\bullet}T\{M'\} \arrow[d, "L_n^{P'_\bullet Q'_\bullet}T\{1_{M'}\}"] \\
L_n^{Q_\bullet}T\{M\} \arrow[r, "L_n^{Q_\bullet Q'_\bullet}T\{\tilde{\varphi}\}"'] & L_n^{Q'_\bullet}T\{M'\}
\end{tikzcd}$$

sia commutativo. Si ha $L_n^{P_\bullet Q_\bullet}T\{1_M\} = H_n\{T\{\alpha_{PQ}\}\}$, $L_n^{P'_\bullet Q'_\bullet}T\{1_{M'}\} = H_n\{T\{\alpha_{P'Q'}\}\}$ e se si considera il sollevamento φ di $\tilde{\varphi}$ come nel diagramma

$$\begin{tikzcd}
Q_\bullet \arrow[d, "\alpha_{QP}"'] \arrow[dr] & & \\
P_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] & 0 \\
P'_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{P'Q'}"'] & M' \arrow[r] & 0 \\
Q'_\bullet, \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

chiaramente anche $\alpha_{P'Q'}\varphi\alpha_{QP}$ è un sollevamento di $\tilde{\varphi}$ e nel diagramma precedente si ha $L_n^{P_\bullet P'_\bullet}T\{\tilde{\varphi}\} = H_n\{T\{\varphi\}\}$ e $L_n^{Q_\bullet Q'_\bullet}T\{\tilde{\varphi}\} = H_n\{T\{\alpha_{P'Q'}\varphi\alpha_{QP}\}\}$.

Quindi si deve dimostrare che

$$H_n \{T \{\alpha_{P'Q'}\}\} H_n \{T \{\varphi\}\} = H_n \{T \{\alpha_{P'Q'}\varphi\alpha_{QP}\}\} H_n \{T \{\alpha_{QP}\}\},$$

che per l'additività e le proprietà rispetto all'omotopia di H_n e di T si riduce a

$$\alpha_{P'Q'}\varphi \simeq \alpha_{P'Q'}\varphi\alpha_{QP}\alpha_{PQ},$$

che è vera in quanto $\alpha_{QP}\alpha_{PQ} \simeq 1_{H_n\{P_\bullet\}}$. □

Osservazione 4.4.5. Grazie agli ultimi due lemmi, si può omettere la risoluzione proiettiva e parlare di L_nT, n-esimo funtore derivato sinistro.

Lemma 4.4.6. *Siano P', P'' moduli proiettivi, allora nella situazione*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P' \oplus P'' \arrow[r, "\pi"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha'"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "\alpha''"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

si può costruire un morfismo $P' \oplus P'' \xrightarrow{\varepsilon} M$ suriettivo che renda commutativi i quadrati del diagramma.

Dimostrazione. Per la proiettività, esiste β che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & P'' \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\varepsilon''"] \\
M \arrow[r, "\alpha''"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & M'';
\end{tikzcd}$$

si definisce $\varepsilon \{(y', y'')\} := \alpha'\varepsilon' \{y'\} + \beta \{y''\}$. È un morfismo dato che $\varepsilon = \bigtriangledown \{\alpha'\varepsilon', \beta\}$. Per il primo quadrato, si ha $\varepsilon i \{y'\} = \varepsilon \{(y', 0)\} = \alpha'\varepsilon' \{y'\}$, mentre per il secondo $\alpha''\varepsilon \{(y', y'')\} = \alpha'' \{\alpha'\varepsilon' \{y'\} + \beta \{y''\}\} = \alpha''\beta \{y''\} = \varepsilon'' \{y''\} = \varepsilon''\pi \{(y', y'')\}$.

Rimane da dimostrare la suriettività: sia $x \in M$, allora $\alpha'' \{x\} \in M''$ ed esiste $y'' \in P''$ tale che $\alpha'' \{x\} = \varepsilon'' \{y''\} = \alpha''\beta \{y''\}$. Quindi $x - \beta \{y''\} \in \ker \alpha'' = \operatorname{Im} \alpha'$, ed esiste $x' \in M'$ con $\alpha' \{x'\} = x - \beta \{y''\}$. Ancora, esiste $y' \in P'$ tale che $\varepsilon' \{y'\} = x'$; si ottiene $\varepsilon \{(y', y'')\} = \alpha'\varepsilon' \{y'\} + \beta \{y''\} = x$. $\square$

Teorema 4.4.7. *Dato un funtore additivo T e una successione esatta*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha''} M'' \longrightarrow 0$$

per ogni $n > 0$ esiste un morfismo (di connessione) $L_nT \{M''\} \xrightarrow{\omega_n} L_nT \{M'\}$ tale che sia esatta la successione

$$\ldots \to L_1T \{M''\} \xrightarrow{\omega_1} L_0T \{M'\} \xrightarrow{L_0T\{\alpha'\}} L_0T \{M\} \xrightarrow{L_0T\{\alpha''\}} L_0T \{M''\} \longrightarrow 0.$$

Dimostrazione. Si consideri P'_0 e P''_0 moduli proiettivi per cui valga il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'_0"'] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi_0"'] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha'"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "\alpha''"'] \arrow[d, dashed] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd},$$

dove φ_0 esiste ed è suriettiva per il lemma precedente. Si è nelle ipotesi del lemma 4.1.7, quindi è esatta la successione

$$0 \longrightarrow \ker \varphi'_0 \longrightarrow \ker \varphi_0 \longrightarrow \ker \varphi''_0 \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi'_0 = 0,$$

cioè la successione dei kernel è esatta. Si possono scegliere anche P'_1 e P''_1 in modo che valga il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1'"'] & P_1' \oplus P_1'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi_1"'] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \varphi_0' \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varphi_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \ker \varphi_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & .
\end{tikzcd}$$

Applicando ancora il lemma 4.1.7 si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow \ker \varphi_1' \longrightarrow \ker \varphi_1 \longrightarrow \ker \varphi_1'' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi_1' = 0.$$

Proseguendo per induzione, si ricavano le risoluzioni proiettive $P_\bullet'$, $P_\bullet := P_\bullet' \oplus P_\bullet''$, $P_\bullet''$ rispettivamente di M', M, M'', come nel diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_\bullet' \arrow[r] \arrow[d] & P_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & P_\bullet'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Applicando T la successione superiore rimane esatta per l'additività, quindi si ha

$$0 \longrightarrow T\{P_\bullet'\} \longrightarrow T\{P_\bullet\} \longrightarrow T\{P_\bullet''\} \longrightarrow 0$$

e si può concludere con il teorema 4.1.8.

Si nota che la definizione di ω_n come nel teorema, è indipendente dalla scelta delle risoluzioni proiettive. $\square$

Definizione 4.4.8. Un funtore T covariante additivo è esatto a destra se per ogni successione esatta $M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha''} M'' \longrightarrow 0$, è esatta anche la successione $T\{M'\} \xrightarrow{T\{\alpha'\}} T\{M\} \xrightarrow{T\{\alpha''\}} T\{M''\} \longrightarrow 0$.

Proposizione 4.4.9. *Sia T un funtore covariante additivo esatto a destra, allora L_0T e T sono isomorfi.*

Dimostrazione. Sia M un modulo, allora dalla successione esatta $P_1 \longrightarrow$

$P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ si ricava la successione esatta $T\{P_1\} \longrightarrow T\{P_0\} \xrightarrow{T\{\pi\}} T\{M\} \longrightarrow 0$. Si ottiene quindi un isomorfismo tra $L_0T\{M\} = \frac{T\{P_0\}}{\ker T\{\pi\}}$ e $T\{M\}$, che fornisce l'isomorfismo funtoriale richiesto. $\square$

Proposizione 4.4.10. *Sia P un modulo proiettivo, allora $L_nT\{P\} = 0$ per ogni $n > 0$, mentre $L_0T\{P\} = T\{P\}$.*

Dimostrazione. Chiaramente, una risoluzione proiettiva di P è data da $P_0 = P$ e $P_n = 0$ per ogni $n \neq 0$. Di conseguenza, $L_nT\{P\} = H_n\{T\{P_\bullet\}\}$ che è 0 se $n \neq 0$, $T\{P\}$ se $n = 0$. $\square$

Proposizione 4.4.11. *Si consideri T esatto a destra e una successione esatta*

$$0 \longrightarrow K_q \xrightarrow{\mu} P_{q-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con $K_q = \ker \partial^{P_\bullet}_{q-1}$; allora $L_qT\{M\} \cong \ker T\{\mu\}$.

Dimostrazione. Se si costruisce la risoluzione proiettiva di M come nella proposizione 4.3.5, si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
P_q \arrow[r, "\partial^{P_\bullet}_{q-1}"] \arrow[d, "\varphi_q"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft\mu" near start] & P_{q-1} \\
K_q \arrow[ur] &
\end{tikzcd},$$

con μ iniettivo e φ_q suriettivo. Si ha in particolare la successione esatta $\ldots \longrightarrow P_{q+1} \longrightarrow P_q \xrightarrow{\varphi_q} K_q \longrightarrow 0$. Da questa si può dedurre, applicando T, il seguente diagramma commutativo con le righe esatte, dato che T è esatto a destra:

$$\begin{tikzcd}
 & T\{P_{q+1}\} \arrow[r, "T\{\partial^{P_\bullet}_{q+1}\}"] \arrow[d] & T\{P_q\} \arrow[r, "T\{\pi\}"] \arrow[d, "T\{\partial^{P_\bullet}_q\}"'] & T\{K_q\} \arrow[r] \arrow[d, "T\{\mu\}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T\{P_{q-1}\} \arrow[r, "1_{T\{P_{q-1}\}}"'] & T\{P_{q-1}\} &
\end{tikzcd}.$$

Si può applicare il lemma 4.1.7, da cui si ricava la successione esatta

$$T\{P_{q+1}\} \longrightarrow \ker T\left\{\partial_q^{P_\bullet}\right\} \longrightarrow \ker T\{\mu\} \longrightarrow \operatorname{coker} 0 = 0.$$

Si ricava quindi che $\ker T\{\mu\} \cong \frac{\ker T\left\{\partial_q^{P_\bullet}\right\}}{\operatorname{Im} T\left\{\partial_q^{P_\bullet}\right\}} = H_q\{T\{P_\bullet\}\} = L_q T\{M\}$. In particolare, risulta esatta la successione

$$0 \longrightarrow L_q T\{M\} \longrightarrow T\{K_q\} \xrightarrow{T\{\mu\}} T\{P_{q-1}\}. \qquad \square$$

4.5 Funtori derivati destri

Si possono ripercorrere le tappe percorse per arrivare alla definizione dei funtori derivati sinistri dal lato opposto. Si lavora con cocomplessi $C^\bullet$, cioè successioni del tipo

$$\ldots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial^n_{C^\bullet}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial^{n+1}_{C^\bullet}} C_{n+2} \longrightarrow \ldots$$

tali che $\partial^{n+1}_{C^\bullet}\partial^n_{C^\bullet} = 0$, e in particolare con cocomplessi positivi aciclici iniettivi, formati cioè da moduli iniettivi. Da un cocomplesso $E^\bullet$ di questo tipo si può ricavare la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0\{E^\bullet\} = \ker \partial^0_{E^\bullet} \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \ldots;$$

se $M = \ker \partial^0_{C^\bullet}$, si dice che $E^\bullet$ è una risoluzione iniettiva di M.

Si può dimostrare che ogni modulo è immergibile in un modulo iniettivo e con questo risultato che ogni modulo ammette una risoluzione iniettiva. Inoltre vale il teorema del sollevamento, cioè data $M \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M'$ esiste un morfismo di cocomplessi φ tale che $H^0\{\varphi\} = \tilde{\varphi}$, e φ è unico a meno di omotopie. Infine, prese due risoluzioni iniettive di un modulo, queste sono nella stessa classe di omotopia.

Preso un funtore covariante additivo T, applicandolo ad una risoluzione iniettiva positiva aciclica $E^\bullet$ di M si ottengono delle coomologie non nulle e si può definire $R^n_{E^\bullet}\{T\} := H^n\{T\{E^\bullet\}\}$. Preso invece un morfismo $\tilde{\varphi}$, si pone $R^n_{E^\bullet E'^\bullet}T\left\{\tilde{\varphi}\right\} := H^n\left\{\varphi\right\}$, dove φ è un sollevamento di $\tilde{\varphi}$. Si dimostra che cambiando risoluzione iniettiva, si ha un isomorfismo canonico tra le coomologie e la definizione di $R^nT\left\{\tilde{\varphi}\right\}$ è compatibile con questo isomorfismo. Si può quindi non esplicitare la risoluzione scelta e definire un funtore R^nT. Se T è esatto a sinistra si ha $R^0T \cong T$. Inoltre $R^0T\left\{E\right\} = E$ e $R^nT\left\{E\right\} = 0$ per ogni $n \neq 0$ e E iniettivo.

Da una successione esatta $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha''} M'' \longrightarrow 0$ si possono costruire i morfismi di connessione ω^n e la successione esatta lunga

$$0 \to R_0T\left\{M'\right\} \xrightarrow{R_0T\{\alpha'\}} R_0T\left\{M\right\} \xrightarrow{R_0T\{\alpha''\}} R_0T\left\{M''\right\} \xrightarrow{\omega^1} R_1T\left\{M'\right\} \longrightarrow \ldots .$$

Un particolare funtore derivato è $\mathrm{Ext}^n_A\left\{X,\bullet\right\} := R^nT$ dove T è il funtore $\mathrm{Hom}_A\left\{X,\bullet\right\}$; poiché T è esatto, si ha $\mathrm{Ext}^0_A\left\{X,\bullet\right\} = T\left\{\bullet\right\}$.