

Appunti del corso:
Teoria dei gruppi
Dott. Rocco Chirivì

Stefano Maggiolo

<http://poisson.phc.unipi.it/~maggiolo/>

maggiolo@mail.dm.unipi.it

2007–2008

Indice

1	Gruppi finiti generati da riflessioni	3
1.1	Sistemi di radici, positivi, semplici	4
1.2	Lunghezza	8
1.3	Sottogruppi parabolici	11
1.4	Domini fondamentali	13
1.5	Complesso di Coxeter	15
2	Classificazione	16
2.1	Gruppi cristallografici	22
3	Invarianti polinomiali	26
3.1	Teorema di Chevalley	27
3.2	Ordine di Bruhat	33
4	Varietà delle bandiere	37

1 Gruppi finiti generati da riflessioni

02/10/2007
Prima lezione

Definizione 1.1. Uno spazio euclideo è uno spazio vettoriale V di dimensione finita su \mathbb{R} con un prodotto scalare (\bullet, \bullet) (una forma bilineare simmetrica definita positiva).

Definizione 1.2. La riflessione rispetto al vettore $\alpha \in V \setminus \{0\}$ è l'applicazione lineare $s_\alpha: V \rightarrow V$ definita da $s_\alpha(\alpha) := -\alpha$ e $s_\alpha(v) = v$ per ogni $v \in H_\alpha$, l'ortogonale di α .

Osservazione 1.3. La riflessione rispetto al vettore α (o rispetto a H_α) è unica perché α e H_α generano V . Si può esplicitare l'espressione di s_α :

$$s_\alpha(v) = v - \frac{2(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

infatti questa espressione è lineare e rispetta la definizione.

Osservazione 1.4. La riflessione $s_\alpha \in O(V)$, cioè è un'applicazione ortogonale; inoltre, s_α ha ordine 2.

Dimostrazione. Se v_1, \dots, v_{n-1} è una base ortogonale di H_α , aggiungendo α si ottiene una base ortogonale di V . Su questa base, $s_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$. Poiché s_α è descritta da una matrice ortogonale su una base ortogonale, è ortogonale. Alternativamente, si può dimostrare direttamente verificando che $(\lambda\alpha + v, \mu\alpha + w) = (s_\alpha(\lambda\alpha + v), s_\alpha(\mu\alpha + w))$, dove $v, w \in H_\alpha$. \square

D'ora in poi, W sarà sempre un sottogruppo finito di $O(V)$ generato da riflessioni.

Esempio 1.5. Il primo gruppo che si vedrà è $I_2(m)$ (che non è altro che il gruppo diedrale $D_m = \langle r, s \mid r^m = s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$). Se si prendono $\alpha := e_1$ e β come il vettore sulla circonferenza unitaria che forma un angolo di $\pi - \pi/m$ con α , si dimostra che $\langle s_\alpha, s_\beta \rangle = I_2(m)$: posto $\rho := s_\beta s_\alpha$, si ha $\det \rho = 1$, cioè ρ è una rotazione di un certo angolo ε ; da $\rho(\alpha) = s_\beta s_\alpha(\alpha) = s_\beta(-\alpha) = -s_\beta(\alpha)$, si ottiene che ρ è una rotazione di $-2\pi/m$, cioè $r = \rho^{-1}$.

Esempio 1.6. Anche il gruppo delle permutazioni di n elementi, S_n , è un gruppo che soddisfa le richieste. Per dimostrarlo, si costruisce un'azione di S_n in \mathbb{R}^n , cioè una mappa $\rho: S_n \rightarrow O(\mathbb{R}^n)$ che sia iniettiva, in modo di poter identificare S_n con l'immagine, e si dimostrerà che l'immagine è generata da riflessioni. L'azione che si sceglie è data da $\sigma e_i := e_{\sigma i}$; con questa azione, gli elementi di S_n che agiscono come simmetrie sono le trasposizioni (i, j) ; infatti, se si pone $\alpha_{i,j} := e_i - e_j$ per $i < j$, risulta

$$(i, j)(\alpha_{i,j}) = (i, j)(e_i - e_j) = e_j - e_i = -\alpha_{i,j},$$

mentre fissa l'ortogonale (dato che è costituito dai vettori che hanno i -esima e j -esima coordinata uguale). Si è ottenuto che $\rho((i, j)) = s_{\alpha_{i,j}}$; inoltre ρ è chiaramente iniettiva, da cui $\text{Im}(\rho) \cong S_n$; in particolare S_n è generato da trasposizioni, per cui $\text{Im}(\rho)$ è generato da simmetrie.

In realtà, si potrebbe vedere tutto in \mathbb{R}^{n-1} , dato che le trasposizioni che generano S_n sono $n-1$ (oppure perché l'azione di S_n su \mathbb{R}^n fissa il sottospazio generato da $\sum e_i$, quindi si può proiettare sul suo ortogonale).

Esempio 1.7. Si considera ora $W := \langle s_{\alpha_{i,j}}, s_{e_k} \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq i < j \leq n \rangle$ in \mathbb{R}^n . Questo gruppo, oltre a permutarle, può anche cambiare segno alle coordinate; viene denotato con B_n . Per dimostrare che è finito, si mostrerà che è isomorfo a $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$.

Siano $I_n := \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$ e

$$\begin{aligned} H &:= \{ \sigma \in S(I_n) \mid \forall h, \sigma(-h) = -\sigma(h) \}, \\ H_0 &:= \{ \sigma \in H \mid \forall h, \sigma(h) = \pm h \} \cong \mathbb{Z}_2^n \leq H, \\ H_1 &:= \{ \sigma \in H \mid \sigma(\{1, \dots, n\}) = \{1, \dots, n\} \} \cong S_n. \end{aligned}$$

Innanzitutto si mostrerà che $H \cong H_0 \rtimes H_1$ (basta dire che generano H , che l'intersezione è banale e che H_0 è normale). Banalmente, $H_0 \cap H_1 = \{e\}$; poiché $|H| = 2^n n!$ (si fissa la permutazione su n elementi e il segno su ogni numero positivo), per questioni di cardinalità H_0 e H_1 generano H ; per la normalità, basta dimostrare che $H_1 \leq N(H_0)$ (perché di sicuro $H_0 \leq N(H_0)$): presi $\sigma \in H_1$ e $\tau \in H_0$, bisogna dimostrare che $\sigma\tau\sigma^{-1}$ cambia solo segno e basta verificarlo su $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$; infatti, $\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(h)) = \sigma\tau(h) = \sigma(\pm h) = \pm\sigma(h)$. Quindi H_0 è normale, e di conseguenza H è il prodotto semidiretto di H_0 e H_1 .

Si può scrivere $H = \langle \sigma_k, \sigma_{i,j} \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq i < j \leq n \rangle$, dove σ_k cambia solo segno alla k -esima coordinata, mentre $\sigma_{i,j}$ traspone i e j . Questo è vero perché i σ_i generano H_0 e i $\sigma_{i,j}$ generano H_1 . Ora, si costruisce $\rho: H \rightarrow O(\mathbb{R}^n)$ come $\rho(\sigma)(e_i) := \pm e_{|\sigma i|}$ (il segno dipende dal segno di σi); ρ è iniettiva, quindi $H \cong \text{Im}(\rho) = \langle \rho(\sigma_k), \rho(\sigma_{i,j}) \rangle = \langle s_{e_i}, s_{\alpha_{i,j}} \rangle$.

Esempio 1.8. Si costruisce ora il gruppo D_n : si definisce $K \subseteq H$ come $K := \{ \sigma \in H \mid |\sigma(\{1, \dots, n\}) \cap \{-1, \dots, -n\}| \equiv 0 \pmod{2} \}$, e si dimostra che $K \cong L \rtimes S_n$, dove $L := \{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum a_i \equiv 0 \pmod{2} \}$, da cui si capisce che K è un sottogruppo di indice 2 di H . Procedendo in modo analogo ai casi precedenti, si dimostra che K è isomorfo a $W := \langle s_{e_i+e_j}, s_{e_i-e_j} \rangle$.

1.1 Sistemi di radici, positivi, semplici

Osservazione 1.9. Se $s_\alpha \in W$, e $t \in O(V)$ qualunque, allora $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$ (basta verificarlo per $t\alpha$ e per gli elementi di $H_{t\alpha} = tH_\alpha$). In particolare, se $w \in W$, ancora $ws_\alpha = ws_\alpha w^{-1} \in W$: i vettori $\{\alpha \mid s_\alpha \in W\}$ sono stabili per l'azione di W , a meno di multipli. Questo si può vedere come la stabilità nel proiettivo, oppure come la stabilità delle rette generate dai vettori per cui si fa la simmetria. Più formalmente, W agisce sull'insieme $\{L_\alpha := \langle \alpha \mid s_\alpha \in W \rangle\}$. Se si vuole un sottoinsieme stabile costituito da vettori, si devono prendere almeno $\pm\alpha$. Per non avere altri multipli, si può richiedere che i vettori siano tutti di norma unitaria, anche se non è necessario, per esempio se l'azione di W sulle rette non è transitiva (come per il gruppo diedrale D_4).

Definizione 1.10. Un insieme finito Φ di vettori non nulli si dice *sistema di radici* se:

- (R₁) $\langle \alpha \rangle \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$ per ogni $\alpha \in \Phi$;
- (R₂) $s_\alpha \Phi = \Phi$ per ogni $\alpha \in \Phi$.

Dato W , si può costruire un sistema di radici considerando le rette per cui si fanno le simmetrie, scegliendo un vettore non nullo su una di queste rette,

prendendo tutti quelli nell'orbita per l'azione di W ed eventualmente iterando il processo se l'orbita non prende almeno un vettore in ogni retta. Chiaramente quello che si ottiene è un sistema di radici, e altrettanto chiaramente non è unico (si può riscaldare ogni orbita indipendentemente).

Viceversa, preso un sistema di radici, si può considerare il gruppo $\langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$, ma a priori non è detto che questo sia finito.

Proposizione 1.11. *Dato un sistema di radici Φ , $W := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ è un gruppo finito.*

Dimostrazione. Si considera il sottospazio $V_0 := \langle \alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$, e si scrive $V = V_0 \oplus V_0^\perp$ (Se $V_0 = V$, il sistema di radici si dice *essenziale*). Ora, W agisce su Φ , cioè c'è un'azione $f: W \rightarrow S(\Phi)$; se si dimostra che f è iniettiva, si è concluso. Se $w \in \ker f$, si ha $w(\alpha) = \alpha$ per ogni $\alpha \in \Phi$, cioè w fissa V_0 ; d'altra parte, w fissa anche V_0^\perp , perché $V_0^\perp \subseteq H_\alpha$ per ogni $\alpha \in \Phi$ e w è una composizione di simmetrie s_α . \square

Definizione 1.12. Dato un sistema di radici Φ , $\Delta \subseteq \Phi$ è detto *sistema semplice* se:

(S₁) Δ è una base per $V_0 := \langle \alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$;

(S₂) per ogni $\beta \in \Phi$, se si scrive $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \alpha$ allora $a_\alpha \geq 0$ per ogni α o $a_\alpha \leq 0$ per ogni α .

Se Δ è un sistema semplice, si può dividere Φ in due parti: $\Phi = \Pi \cup (-\Pi)$, dove Π è l'insieme delle radici che si scrivono con coefficienti non negativi (si verifica facilmente che $-\Pi$ è proprio il complementare di Π in Φ).

Definizione 1.13. Un *ordine totale* su V è una relazione transitiva tale che:

1. per ogni $u, v \in V$, si ha $u = v$ o $u < v$ o $v < u$;
2. per ogni $u, v, w \in V$ con $u < v$, si ha $u + w < v + w$;
3. per ogni $c \in \mathbb{R}^*$, $u, v \in V$ con $u < v$, si ha $cu < cv$ se $c > 0$, $cv < cu$ se $c < 0$.

Un vettore v è *positivo* se $0 < v$, *negativo* se $v < 0$. L'insieme dei vettori positivi si denota con V^+ , quello dei vettori negativi con V^- .

Se e_1, \dots, e_n è una base di V , si può definire l'ordine lessicografico rispetto a questa base ponendo $\sum a_i e_i < \sum b_i e_i$ se e solo se esiste i tale che $a_i < b_i$ e $a_j = b_j$ per ogni $1 \leq j < i$. Si verifica facilmente che questo ordine è un ordine totale su V .

Ora, dato un sistema di radici Φ , un *sistema positivo* è $\Pi := \Phi \cap V^+$ per qualche ordine totale; chiaramente $-\Pi$ è il complementare di Π in Φ .

Teorema 1.14.

1. Se Δ è un sistema semplice in Φ , allora esiste unico $\Pi \subseteq \Phi$ positivo con $\Delta \subseteq \Pi$;
2. se Π è un sistema positivo in Φ , allora esiste unico $\Delta \subseteq \Phi$ semplice con $\Delta \subseteq \Pi$.

Dimostrazione.

1. **Unicità.** Sia Π un sistema positivo tale che $\Delta \subseteq \Pi \subseteq \Phi$; poiché $\Delta \subseteq V^+$ secondo l'ordine totale relativo a Π , $\langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}^+} \cap \Phi \subseteq \Pi$; allo stesso modo $\langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}^-} \cap \Phi \subseteq -\Pi$, quindi i contenimenti devono essere uguaglianze e Π è univocamente determinato.

Esistenza. Si prende una base di V_0^\perp che completa Δ e si considera l'ordine lessicografico relativo all'unione di queste due basi. Di conseguenza, $\Delta \subseteq V^+$ e se si pone $\Pi := V^+ \cap \Phi$, si ha $\Delta \subseteq \Pi$.

2. **Unicità.** Se Δ è un sistema semplice contenuto in Π , allora deve essere l'insieme di tutti gli $\alpha \in \Pi$ che non si scrivono come somma di elementi di Π a coefficienti positivi.

Esistenza. Sia $\Delta \subseteq \Phi$ un sottoinsieme minimale tra quelli con la proprietà $\Pi \subseteq \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}^+}$ (esiste perché almeno Π soddisfa quella proprietà). Si suppone per ora che per ogni $\alpha, \beta \in \Delta$ distinti, $(\alpha, \beta) \leq 0$ (cioè che l'angolo non sia acuto). Se Δ non fosse costituito da vettori linearmente indipendenti, si può scrivere $0 = \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \alpha$ con $a_\alpha \neq 0$ per qualche α . Si spezza la somma in una con coefficienti positivi e un'altra con coefficienti negativi: $\sigma := \sum_{\beta \in \Delta_1} a_\beta \beta = \sum_{\gamma \in \Delta_2} -a_\gamma \gamma$; allora $0 \leq (\sigma, \sigma) = -\sum a_\beta a_\gamma (\beta, \gamma) \leq 0$, cioè $\sigma = 0$. Ma una combinazione lineare a coefficienti positivi di vettori positivi è positiva e quindi non può essere $\sigma = 0$.

Rimane da dimostrare la supposizione: per assurdo, se $(\alpha, \beta) > 0$ per qualche $\alpha \neq \beta \in \Delta$, si considera $s_\alpha(\beta)$. Innanzitutto è una radice, dato che β è una radice e Φ è invariante per le simmetrie. D'altra parte, $s_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha$, dove $c := \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} > 0$. Ora, se $s_\alpha(\beta) > 0$, si può scrivere come $\sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$, $c_\gamma \geq 0$ (per come era stato scelto Δ). Se $c_\beta < 1$, $s_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$, da cui $(1 - c_\beta)\beta = c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$, da cui, dividendo per $1 - c_\beta$, si ha una scrittura di β in termini degli altri elementi di Δ , assurdo per la minimalità di Δ . Se $c_\beta \geq 1$, $0 = (c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$, assurdo perché a secondo membro si ha una somma di vettori positivi. Il caso $s_\alpha(\beta) < 0$ è analogo. \square

Corollario 1.15. *Se $\alpha \neq \beta \in \Delta$ sono vettori di un sistema semplice, allora $(\alpha, \beta) \leq 0$.*

Definizione 1.16. Si definisce il *rango* di un sistema di radici Φ come la cardinalità di un suo sistema semplice (oppure, equivalentemente, come $\dim \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$).

Per usare i sistemi semplici per classificare i sistemi di radici, rimane da dimostrare che i sistemi semplici di un sistema di radici sono "simili".

Proposizione 1.17. *Dato $\alpha \in \Delta \subseteq \Pi$, si ha che $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$, cioè s_α permuta le radici positive diverse da α .*

Dimostrazione. Dato $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$, si dimostra che $s_\alpha(\beta) \in \Pi$: si scrive $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$ con $c_\gamma \geq 0$; chiaramente, $\beta \notin \langle \alpha \rangle$, cioè esiste $\delta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ tale che $c_\delta > 0$. Ora, $s_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha$ e nella scrittura in termini della base compare

$c_\delta \delta > 0$; ma la scrittura in termini della base è unica, perciò tutti gli addenti sono positivi e anche $s_\alpha(\beta)$ lo è. Infine, $s_\alpha(\beta) \neq \alpha$, altrimenti applicando ancora s_α si avrebbe $\beta = -\alpha$, assurdo. Si ha una mappa iniettiva $s_\alpha: \Pi \setminus \{\alpha\} \rightarrow \Pi \setminus \{\alpha\}$, ma è una mappa di un insieme finito in sé, quindi è anche suriettiva. \square

Teorema 1.18. *Due sistemi positivi Π e Π' sono coniugati tramite W . In particolare, anche i sistemi semplici sono coniugati.*

Dimostrazione. Sia $r := |\Pi \cap -\Pi'|$ e si procede per induzione su r . Se $r = 0$, Π e $-\Pi'$ sono disgiunti, cioè $\Pi = \Pi'$. Se l'asserto vale per ogni valore minore di r e $|\Pi \cap -\Pi'| = r$, si nota che $\Delta \not\subseteq \Pi'$, altrimenti Π e Π' coinciderebbero, perciò esiste $\alpha \in \Delta \cap -\Pi'$. Allora $|s_\alpha(\Pi) \cap -\Pi'| = |(\Pi \setminus \{\alpha\} \cup \{-\alpha\}) \cap -\Pi'| = r - 1$. Per il passo induttivo, dato che $s_\alpha(\Pi)$ è ancora un sistema semplice, esiste $w' \in W$ tale che $w'(s_\alpha(\Pi)) = \Pi'$; ponendo $w := w's_\alpha$, si ha la tesi. \square

Viceversa, se $w \in W$ e Δ è il sistema semplice relativo al sistema positivo Π , allora anche $w\Pi$ è un sistema positivo (relativo all'ordine $u <_w v \Leftrightarrow w^{-1}u \leq w^{-1}v$) e $w\Delta \subseteq w\Pi$ è il sistema semplice relativo a $w\Pi$.

Definizione 1.19. Dato $\beta \in \Phi$, $\beta = \sum_{\delta \in \Delta} a_\delta \delta$, si definisce l'altezza di β come $h(\beta) := \sum_{\delta \in \Delta} a_\delta$.

Dalla definizione segue immediatamente che se $\delta \in \Delta$ allora $h(\delta) = 1$.

Teorema 1.20. *Dato un sistema di radici Φ e un sistema semplice Δ , $W := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ è generato dalle simmetrie rispetto alle radici semplici.*

Dimostrazione. Sia $W' := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \leq W$; dato $\beta \in \Pi$, si considera $W'\beta \cap \Delta$; questo è non vuoto: $W'\beta \cap \Pi$ è non vuoto (β vi appartiene), quindi si può scegliere al suo interno una radice γ di altezza minima e si dimostra che $\gamma \in \Delta$; infatti, se $\gamma = \sum c_\alpha \alpha$, si ha $0 < (\gamma, \gamma) = \sum c_\alpha (\gamma, \alpha)$, da cui si deduce che esiste una radice semplice α tale che $(\gamma, \alpha) > 0$; per assurdo, se $\alpha \neq \gamma$, $s_\alpha(\gamma)$ è una radice positiva che appartiene a $s_\alpha W'\beta = W'\beta$ e ha altezza $h(\gamma) - 2\frac{(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} < h(\gamma)$, ma questo è assurdo per la minimalità di γ , quindi $\gamma = \alpha \in \Delta$.

Ora si vuole dimostrare che $W'\Delta = \Phi$. È ovvio che $W'\Delta \subseteq \Phi$; per l'altra inclusione, sia $\beta \in \Phi$. Se β è positiva, $W'\beta \cap \Delta \neq \emptyset$, perciò esistono $\alpha \in \Delta$ e $w \in W'$ tali che $\beta = w\alpha$, da cui $\beta \in W'\Delta$. Se β è negativa, si trova che $-\beta = w\alpha \in W'\Delta$, ma allora $\beta = w(-\alpha) = ws_\alpha(\alpha) \in W'\Delta$.

Il gruppo W è generato da s_β con $\beta \in \Phi$; per quanto detto, $\beta = w\alpha$ con $w \in W'$ e $\alpha \in \Delta$, cioè $s_\beta = s_{w\alpha} = ws_\alpha w^{-1} \in W'$. \square

Corollario 1.21. *Per ogni radice, esiste un sistema semplice che la contiene.*

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del teorema, si ha che se $\beta \in \Phi$, esiste $w \in W$ e $\alpha \in \Delta$ tali che $\beta = w\alpha$; ma $w\Delta$ è ancora un sistema semplice, e contiene β . \square

Si è passati da un sistema di generatori composto da $|\Phi|/2$ elementi a uno con $|\Delta|$ elementi. Si vorrebbe però una presentazione del gruppo, cioè si vorrebbero scoprire le relazioni tra i generatori s_α con $\alpha \in \Delta$. Si scoprirà che le uniche relazioni sono quelle della forma $(s_\alpha s_\beta)^m = 1$, che si giustificano osservando che $s_\alpha s_\beta$ è una rotazione nel piano $\langle \alpha, \beta \rangle$, di un certo angolo che deve essere razionale con π .

09/10/2007
Quarta lezione

1.2 Lunghezza

Definizione 1.22. Dato $w \in W$, si definisce la *lunghezza* di w come il minimo numero di simmetrie semplici che servono per scrivere w e si denota con $l(w)$. Una scrittura per cui la lunghezza è $l(w)$ si dice *ridotta*.

Proposizione 1.23. *Si hanno le seguenti proprietà:*

1. $l(w) = 1$ se e solo se $w = s_\alpha$ con $\alpha \in \Delta$;
2. $l(w^{-1}) = l(w)$;
3. $\det w = (-1)^{l(w)}$;
4. $l(s_1 \cdots s_r) \equiv r \pmod{2}$;
5. $l(ww') \leq l(w) + l(w')$ e $l(ww') \equiv l(w) + l(w') \pmod{2}$;
6. $l(ws_\alpha) = l(w) \pm 1$.

Definizione 1.24. Si definisce con $n(w)$ il numero di radici positive rese negative da w .

Si dimostrerà in seguito che $n(w) = l(w)$. Per ora, si osserva che $n(w) = |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)|$, quindi

$$n(w^{-1}) = |\Pi \cap w(-\Pi)| = |w^{-1}\Pi \cap (-\Pi)| = |-w^{-1}(\Pi) \cap \Pi| = n(w).$$

Lemma 1.25. *Presi $\alpha \in \Delta$ e $w \in W$:*

1. se $w(\alpha) \in \Pi$, allora $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$;
2. se $w(\alpha) \in -\Pi$, allora $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$;
3. se $w^{-1}(\alpha) \in \Pi$, allora $n(s_\alpha w) = n(w) + 1$;
4. se $w^{-1}(\alpha) \in -\Pi$, allora $n(s_\alpha w) = n(w) - 1$.

Dimostrazione. Per brevità, si pone $\Pi(w) := \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$, da cui $n(w) = |\Pi(w)|$. Si dimostrerà che $\Pi(ws_\alpha) = s_\alpha\Pi(w) \sqcup \{\alpha\}$, il che implica la tesi. Innanzitutto, $ws_\alpha(\alpha) = -w(\alpha)$, da cui $\alpha \in \Pi(ws_\alpha)$; se $\beta \in \Pi$ è un elemento tale che $w(\beta) \in -\Pi$, allora $ws_\alpha(s_\alpha\beta) = w(\beta) \in -\Pi$ e rimane da dimostrare che $s_\alpha(\beta) \in \Pi$, cioè che $\beta \neq \alpha$, ma questo viene dal fatto che $w(\beta) \in -\Pi$, mentre $w(\alpha) \in \Pi$. Infine, è un'unione disgiunta perché se $\alpha \in s_\alpha\Pi(w)$, allora $-\alpha \in \Pi(w) \subseteq \Pi$, assurdo. Per l'altra inclusione, si prende $\beta \in \Pi(ws_\alpha) \setminus \{\alpha\}$ e si dimostra che $\beta \in s_\alpha\Pi(w)$, cioè si deve dimostrare che $s_\alpha(\beta)$ è positivo e viene mandato in una radice negativa da w . È positiva perché $\beta \neq \alpha$, quindi s_α ne mantiene la positività; inoltre $w(s_\alpha(\beta)) \in -\Pi$ perché $\beta \in \Pi(ws_\alpha)$.

Per il secondo caso, con ragionamenti simili si mostra che se $w\alpha \in -\Pi$, allora $s_\alpha\Pi(ws_\alpha) = \Pi(w) \setminus \{\alpha\}$ e $\alpha \in \Pi(w)$. Il terzo e il quarto punto si possono dedurre dai primi due. \square

Corollario 1.26. *Per ogni $w \in W$, $n(w) \leq l(w)$.*

Dimostrazione. Sia $w = s_1 \cdots s_r$ una scrittura minimale; da $n(1) = 0$, si prosegue moltiplicando a destra per s_i , il che per il lemma incrementa n al più di uno. \square

Teorema 1.27 (condizione di cancellamento). *Siano Δ un sistema semplice, $w := s_1 \cdots s_r$ (dove s_i denota s_{α_i} con α_i semplice); se $n(w) < r$, allora esistono $1 \leq i < j \leq r$ tali che:*

1. $\alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$;
2. $s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$;
3. $w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_r$.

Dimostrazione.

1. Partendo dall'identità e moltiplicando a destra una simmetria per volta, si ha che n cresce quando $s_1 \cdots s_{j-1}(\alpha_j) > 0$, mentre decresce altrimenti. Visto che $n(\alpha) < r$, esiste un passo in cui $s_1 \cdots s_{j-1}(\alpha_j) < 0$; si fissi j come l'indice di uno di questi passi. Ora, si considera la successione $\alpha_j, s_{j-1}(\alpha_j), \dots, s_1 \cdots s_{j-1}(\alpha_j)$: il primo termine è positivo, mentre l'ultimo è negativo, quindi esiste un indice i tale che $s_{i+1} \cdots s_{j-1}(\alpha_j) > 0$ e $s_i \cdots s_{j-1}(\alpha_j) < 0$. La radice $s_{i+1} \cdots s_{j-1}(\alpha_j)$ è positiva ed è resa negativa da s_i , perciò deve essere α_i .
2. Si pone $w' := s_{i+1} \cdots s_{j-1}$; allora $w'(\alpha_j) = \alpha_i$, quindi $w' s_j w'^{-1} = s_{w' \alpha_j} = s_i$, da cui $w' s_j = s_i w'$.
3. Dal secondo punto, si ottiene $s_{i+1} \cdots s_{j-1} = s_i \cdots s_j$ moltiplicando a sinistra per s_i entrambi i membri. \square

Corollario 1.28. *La lunghezza di $w \in W$ è uguale a $n(w)$, cioè $n(w) = l(w)$.*

Dimostrazione. Si sa già che $n(w) \leq l(w)$; per assurdo, se $n(w) < l(w) = r$, sia $s_1 \cdots s_r$ una scrittura minimale per w ; dato che $n(w) < r$, per il teorema si potrebbe trovare una scrittura con $r - 2$ simmetrie, assurdo. \square

Corollario 1.29. *Data una qualunque espressione $w = s_1 \cdots s_r$, si può ottenere un'espressione ridotta omettendo coppie di simmetrie semplici come nel teorema.*

Proposizione 1.30. *Se $s_1 \cdots s_r$ è una scrittura ridotta per w , allora si può caratterizzare $\Pi(w)$. Infatti, sia $\beta_i := s_r \cdots s_{i+1}(\alpha_i)$; allora $\Pi(w) = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ (in particolare β_i sono distinte).*

Dimostrazione. Sia $\beta \in \Pi(w)$; allora $\beta > 0$ e $w(\beta) < 0$; come già fatto, si trova un indice i tale che $s_{i+1} \cdots s_r(\beta) > 0$ e $s_i \cdots s_r(\beta) < 0$; allora $s_{i+1} \cdots s_r(\beta) = \alpha_i$, cioè $\beta = s_r \cdots s_{i+1}(\alpha_i) = \beta_i$. Il viceversa viene da questioni di cardinalità: sia $\Pi(w)$ che $\{\beta_i\}$ hanno r elementi. \square

Proposizione 1.31 (condizione di scambio). *Sia $w := s_1 \cdots s_r$; se $l(ws_{r+1}) < l(w)$, allora esiste i tale che $ws_{r+1} = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r$; inoltre, si può scrivere $w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r s_{r+1}$. In particolare, w ha un'espressione ridotta che finisce per s_{r+1} se e solo se $l(ws_{r+1}) < l(w)$.*

Dimostrazione. Se $l(ws_{r+1}) < l(w)$, allora $w(\alpha_{r+1}) < 0$. Ripetendo la dimostrazione del teorema, si può scegliere i per cui $ws_{r+1} = s_1 \cdots s_{r+1} = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r s_{r+1}$. \square

Osservazione 1.32. L'azione di W sui sistemi positivi (equivalentemente, su quelli semplici) è semplicemente transitiva (cioè se $w\Pi = \Pi$, allora $w = \text{Id}$).

Dimostrazione. Sono equivalenti: $w(\Pi) = \Pi$; $w(\Delta) = \Delta$; $n(w) = 0$; $l(w) = 0$; $w = \text{Id}$. Infatti, sono chiaramente equivalenti la prima con la seconda, la terza con la quarta e la quarta con la quinta. Infine, è ovvia anche l'equivalenza tra la terza e la prima. \square

Dato un sistema positivo Π , anche $-\Pi$ è un sistema positivo, per l'ordine opposto; quindi esiste $w_0 \in W$ tale che $w_0(\Pi) = -\Pi$ per la coniugazione dei sistemi positivi. La lunghezza di w_0 è necessariamente $|\Pi| = |\Phi|/2$, e w_0 è l'elemento più lungo: l'unicità è data dalla semplice transitività dell'azione di W . In particolare, da $l(w_0^{-1}) = l(w_0)$, si ricava $w_0 = w_0^{-1}$, cioè w_0 ha ordine 2.

Teorema 1.33. *Posto $m_{\alpha,\beta} = o(s_\alpha s_\beta)$ (in particolare $m_{\alpha,\alpha} = 1$), una presentazione¹ di W è $\langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta, (s_\alpha s_\beta)^{m_{\alpha,\beta}} = 1 \rangle$.*

Dimostrazione. Chiaramente, le relazioni $(s_\alpha s_\beta)^{m_{\alpha,\beta}} = 1$ sono verificate in W , perciò si deve solo dimostrare che se $w := s_1 \cdots s_r = 1$, allora $s_1 \cdots s_r$ si può scrivere come combinazione di $(s_\alpha s_\beta)^{m_{\alpha,\beta}}$. Innanzitutto, da $\det s_i = -1$, si ha che r deve essere pari; si dimostrerà la tesi per induzione sugli r pari. Se $r = 2$, $w = s_1 s_2 = 1$, da cui $s_2 = s_1^{-1}$ e $w = s_1^2$, che è della forma voluta. Ora, se l'asserto vale per ogni $w' = s_1 \cdots s_k$ con $k < r$ e $w = s_1 \cdots s_r$: si osserva che

$$1 = s_i \cdots s_r w s_r \cdots s_i = s_i \cdots s_r s_1 \cdots s_{i-1};$$

dato che queste trasformazioni cicliche si ottengono per coniugio, è equivalente dimostrare che questa trasformazione è scrivibile in termini delle relazioni (se lo è la seconda, il suo coniugio per un qualsiasi elemento appartiene al normalizzatore del sottogruppo generato dalle relazioni, che è ciò che si vuole). Se $r = 2q$, da una trasformazione ciclica si può ricavare $s_1 \cdots s_{q+1} = s_r \cdots s_{q+2}$; in particolare, la scrittura a sinistra non è ridotta (a destra, lo stesso elemento è scritto con due simmetrie in meno), perciò, per il teorema 1.27 esistono degli indici $i, j \leq q+1$ tali che $s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$, o equivalentemente

$$\tilde{w} := s_{j-1} \cdots s_i s_j \cdots s_{i+1} = 1;$$

se questa scrittura ha meno di r simmetrie, è ottenibile dalle relazioni per ipotesi induttiva e così anche la precedente (che si ottiene moltiplicando il primo membro per \tilde{w}). Usando questa, basta dimostrare che $s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_r = 1$ deriva dalle relazioni, invece che $s_1 \cdots s_r = 1$; ma questo è vero ancora per ipotesi induttiva.

Rimane il caso in cui \tilde{w} abbia un numero di simmetrie maggiore o uguale a r , cioè $2(j-1-i+1) = 2(j-i) \geq r$. Intanto, $2(j-i) \leq 2(q+1-1) = r$, quindi non ci sono più di r simmetrie, e in questo caso $i = 1$ e $j = q+1$, da cui la relazione diventa $s_2 \cdots s_{q+1} = s_1 \cdots s_q$. Permutando ciclicamente, si può rifare tutto il ragionamento per $s_2 \cdots s_r s_1 = 1$: se non si finisce nemmeno con questo ragionamento, allora si ricava $s_3 \cdots s_{q+2} = s_2 \cdots s_{q+1}$. Come prima, si

¹Una presentazione è una scrittura di un gruppo in termini di generatori x_1, \dots, x_n e di elementi y_j del nucleo della mappa $\pi: F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow G$ (dove $F(x_1, \dots, x_n)$ è il gruppo libero generato da x_1, \dots, x_n), tali che il normalizzato del sottogruppo generato dagli y_j è il nucleo.

può riscrivere come $s_3 s_2 s_3 \cdots s_{q+2} s_{q+1} \cdots s_4 = 1$: se questa scrittura ha meno di r simmetrie, si è finito, altrimenti deve valere $s_2 \cdots s_{q+1} = s_3 s_2 \cdots s_q$.

Confrontando questa con quella ottenuta in precedenza, si ha $s_1 s_2 \cdots s_q = s_3 s_2 \cdots s_q$: la dimostrazione non è finita solo nel caso $s_1 = s_3$. Ripetendo tutto il ragionamento per le permutazioni cicliche, si ha che la dimostrazione non termina se e solo se $s_1 = s_3 = \cdots = s_{r-1}$ e $s_2 = s_4 = \cdots = s_r$, cioè $w = (s_1 s_2)^{r/2}$, che è rappresentabile con le relazioni. \square

Definizione 1.34. Si definisce un *gruppo di Coxeter* come un gruppo $\langle S \mid (st)^{m_{s,t}} = 1 \rangle$, dove S è finito, $m_{s,s} = 1$ e $m_{s,t} \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$

I gruppi finiti generati da riflessioni sono gruppi di Coxeter finiti. In realtà, i gruppi di quel tipo sono esattamente i gruppi di Coxeter finiti. I gruppi di Coxeter in generale (anche non finiti) si usano nello studio delle algebre di Lie di Kac-Moody, che possono essere anche di dimensione infinita.

1.3 Sottogruppi parabolici

Sia Δ un sistema semplice per Φ , e W il relativo gruppo di simmetrie. Ora, se $S := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, si può considerare un sottoinsieme $I \subseteq S$, con associato il relativo sottoinsieme di radici Δ_I ; si denota con W_I il gruppo generato da I e con Φ_I il sottoinsieme $\Phi \cap V_I$ dove $V_I := \langle \Delta_I \rangle_{\mathbb{R}}$; W_I è detto *sottogruppo parabolico* di W .

Se Δ' è un altro sistema semplice, esiste $w \in W$ tale che $w\Delta = \Delta'$; posto $I' := wI$, si ha che $wW_I w^{-1}$ è il sottogruppo parabolico associato a I' . Si osserva che $W_\emptyset = 1$ e $W_S = W$.

Proposizione 1.35.

1. Preso $I \subseteq S$, Φ_I è un sistema di radici, con Δ_I come sistema semplice e W_I è il gruppo generato dalle riflessioni rispetto alle radici in Φ_I .
2. Se l_I è la lunghezza degli elementi di W_I , l_I coincide con $l|_{W_I}$.
3. Definito $W^I := \{w \in W \mid \forall s \in I, l(ws) > l(w)\}$, il sottogruppo dei rappresentanti minimali, dato $w \in W$, esistono unici $u \in W^I$ e $v \in W_I$ per cui $w = uv$; inoltre, $l(w) = l(u) + l(v)$ e u è l'unico elemento di lunghezza minima in wW_I .

Dimostrazione.

1. Si considera W_I ; questo fissa V_I , perché è generato da simmetrie per vettori di V_I , quindi Φ_I viene mandato in Φ_I , perché $W_I \leq W$. Allora Φ_I è un sistema di radici e W_I è un gruppo finito generato da riflessioni.
2. Si considera la lunghezza come il numero di radici positive mandate in radici negative. Sia $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_I$, allora esiste $\gamma \notin \Delta_I$ che appare in α con coefficiente positivo; preso $\beta \in \Delta_I$, $s_\beta(\alpha) = \alpha - c\beta > 0$, perché il coefficiente di γ rimane positivo. Allora per tutto il gruppo W_I , α rimane positivo, quindi gli elementi che vengono resi negativi da W_I sono solo radici di Φ_I e questo conclude la dimostrazione.

3. Siano $w \in W$ e u di lunghezza minima in wW_I ; in particolare, $w = uv$ dove $v \in W_I$. Preso $s \in I$, si ha che $l(us) \geq l(u)$ (per la minimalità di u) e poiché $l(us) \neq l(u)$, $u \in W^I$. Si prendono delle scritte ridotte di u e v : $u = s_1 \cdots s_q$ e $v = s'_1 \cdots s'_r$; da $v \in W_I$, per il secondo punto si ha che $r = l(v) = l_I(v)$, cioè si può scegliere la scrittura in modo che $s'_i \in I$ per ogni i . Ora, $l(w) \leq l(u) + l(v)$, ma vale l'uguaglianza: se la scrittura non fosse ridotta, si avrebbe una cancellazione di due simmetrie, che non possono essere entrambe in u o in v perché andrebbe contro la minimalità delle scritte; se fossero una in u e una in v , poiché $s'_i \in I$, si avrebbe un elemento di wW_I di lunghezza minore a quella di u , e ciò va contro la scelta di u . Infine, se $\eta \in wW_I = uW_I$ è un altro elemento minimale, si può scrivere $\eta = uv'$ con $v' \in W_I$ e come fatto in precedenza, $l(\eta) = l(u) + l(v')$; ma allora per la minimalità $l(v') = 1$, cioè $v' = e$ e $\eta = u$. \square

Definizione 1.36. Fissato un sistema semplice, si pone a_n come il numero di elementi di W di lunghezza n ; il polinomio di Poincaré è $W(t) := \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{w \in W} t^{l(w)}$.

Esempio 1.37. Se il rango è 1, esiste una sola radice semplice; allora $W = \{e, s\}$ e $W(t) = 1 + t$.

Esempio 1.38. Per S_3 , un sistema semplice è dato da $s_1 := (1, 2)$ e $s_2 := (2, 3)$. Gli elementi di W di lunghezza 2 sono $s_1 s_2$ e $s_2 s_1$, quello di lunghezza 3 è $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$; perciò $W(t) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$.

Se $X \subseteq W$, si definisce $X(t) := \sum_{w \in X} t^{l(w)}$. In particolare, per il secondo punto della proposizione, i due modi di vedere $W_I(t)$ (come gruppo in sé o come sottogruppo di W) coincidono; per il terzo punto, $W(t) = W^I(t)W_I(t)$.

Teorema 1.39. Vale

$$\sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} \frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} W^I(t) = t^N.$$

Dimostrazione. La prima uguaglianza è una diretta conseguenza di $W(t) = W^I(t)W_I(t)$. Per la seconda, sia $w \in W$; w contribuisce a $W^I(t)$ se e solo se $l(ws) > l(w)$ per ogni $s \in I$. Posto $K_w := \{s \in S \mid l(ws) > l(w)\}$, w contribuisce a $W^I(t)$ se solo se $I \subseteq K_w$. In particolare, il termine $t^{l(w)}$ compare con il coefficiente $\sum_{I \subseteq K_w} (-1)^{|I|}$.

Se $K_w = \emptyset$, $l(ws) < l(w)$ per ogni $s \in S$, cioè w è l'elemento più lungo, di lunghezza N ; poiché $I = \emptyset$, il segno è positivo; allora w contribuisce con un termine t^N .

Se $K_w \neq \emptyset$, il contributo è 0. Infatti, sia $s \in K_w$; allora

$$\begin{aligned} \sum_{I \subseteq K_w} (-1)^{|I|} &= \sum_{I \subseteq K_w \setminus \{s\}} (-1)^{|I|} + \sum_{I \subseteq K_w \setminus \{s\}} (-1)^{|I \cup \{s\}|} = \\ &= \sum_{I \subseteq K_w \setminus \{s\}} (-1)^{|I|} - \sum_{I \subseteq K_w \setminus \{s\}} (-1)^{|I|} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Valutando questa formula per $t = 1$ si ottiene $\sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} |W| / |W_I| = 1$.

Esempio 1.40. Si calcola il polinomio di Poincaré di $W = D_m$; W ha rango 2 e $2m$ radici, quindi la lunghezza massima è m . Sia $S = \{s_\alpha, s_\beta\}$. Per il teorema, si ha

$$\begin{aligned} t^m &= W(t) \left(\frac{1}{W_\emptyset(t)} + \frac{-1}{W_{\{s_\alpha\}}(t)} + \frac{-1}{W_{\{s_\beta\}}(t)} + \frac{1}{W_S(t)} \right) = \\ &= W(t) \left(1 + \frac{-1}{1+t} + \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{W(t)} \right) = W(t) \frac{t-1}{t+1} + 1, \end{aligned}$$

da cui $W(t) = 1 + 2t + 2t^2 + \dots + 2t^{m-1} + t^m$.

1.4 Domini fondamentali

Definizione 1.41. Il sottoinsieme $X \subseteq V$, è detto *dominio fondamentale* per l'azione di W se per ogni $v \in V$ esiste unico $x \in X$ tale che $x \sim_W v$, cioè se X è un sistema di rappresentanti per le orbite di V sotto l'azione di W .

Si definisce l'iperpiano H_α come l'iperpiano ortogonale alla radice α ; si definiscono anche i semispazi $A_\alpha := \{v \in V \mid (\alpha, v) > 0\}$ e $A'_\alpha := \{v \in V \mid (\alpha, v) < 0\} = -A_\alpha$. Fissato un sistema semplice Δ , si definiscono $C := \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ e $D := \bigcap_{\alpha \in \Delta} (A_\alpha \cup H_\alpha)$; C è detta *camera dominante di Weyl*; C e D sono *coni* in \mathbb{R}^n , cioè sono chiusi per moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Lemma 1.42. Dato $v \in V$, esiste $u \in D$ coniugato a v per l'azione di W .

Dimostrazione. Si definisce un ordine parziale su V , detto *ordine dominante*: $v \leq u$ se e solo se $u - v \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}^+}$. Sia $X := \{y \in Wv \mid v \leq y\}$, dove Wv è l'orbita di v sotto l'azione di W ; da $v \in X$ si ha che $X \neq \emptyset$; inoltre X è finito perché l'orbita lo è. Quindi si può prendere un vettore u massimale in X , che si dimostrerà appartenere a D (da cui la tesi). Preso $\alpha \in \Delta$, $s_\alpha(u) = u - 2(u, \alpha)/(\alpha, \alpha)\alpha \in Wv$; se $(u, \alpha) < 0$, allora $s_\alpha(u) > u \geq v$, cioè $s_\alpha(u) \in X$, ma questo è assurdo per la massimalità di u ; allora $(u, \alpha) \geq 0$ per ogni $\alpha \in \Delta$, cioè $u \in D$. \square

Teorema 1.43. Fissato un sistema semplice Δ per Φ , D è fissato e:

1. se $w(u) = v$ con $w \in W$ e $u, v \in D$, allora $u = v$ e w è prodotto di simmetrie semplici che fissano u ; in particolare, $\text{Stab}(u) = \{e\}$ se $u \in C$;
2. D è un dominio fondamentale per W su V ;
3. se $v \in V$, allora $\text{Stab}(v)$ è generato dalle simmetrie che contiene;
4. se $U \subseteq V$, allora $\text{Fix}(U)$ è generato dalle simmetrie che contiene.

Dimostrazione.

1. Per induzione su $l(w)$. Se $l(w) = 0$, $w = e$ e in particolare l'asserto è soddisfatto. Se vale per ogni elemento di lunghezza minore di $l(w)$, si osserva che deve esistere una radice semplice che diventa negativa tramite l'azione di w , perché altrimenti tutte le radici positive rimarrebbero positive e questo implicherebbe che $w = e$. Sia quindi $\alpha \in \Delta$ tale che $w(\alpha) < 0$, allora $l(ws_\alpha) = n(ws_\alpha) = n(w) - 1 = l(w) - 1$; il prodotto scalare $(v, w(\alpha))$ è

17/10/2007
Ottava lezione

non positivo perché $w(\alpha)$ è negativa, mentre v ha prodotto scalare non negativo con tutte le radici positive. Allora

$$0 \geq (v, w(\alpha)) \geq (w^{-1}(v), \alpha) = (u, \alpha) \geq 0,$$

perché il prodotto scalare è invariante per elementi di W e $u \in D$. Di conseguenza, $(u, \alpha) = 0$, cioè $s_\alpha(u) = u$. Si considera $ws_\alpha(u) = w(u) = v$: la lunghezza di ws_α è minore di $l(w)$, perciò per ipotesi induttiva, $u = v$ e ws_α è prodotto di simmetrie semplici che fissano u ; infine, s_α fissa u e $w = (ws_\alpha)s_\alpha$. Se $u \in C \subseteq D$, non esistono simmetrie semplici che fissano u , quindi solo l'identità fissa u .

2. Deriva dal primo punto insieme al lemma 1.42.
3. Se $v \in V$, esiste w tale che $u := w(v) \in D$, allora $\text{Stab}(v) = w^{-1}\text{Stab}(u)w$; per il primo punto, $\text{Stab}(u)$ è generato dalle simmetrie semplici che contiene, e il coniugato di una simmetria semplice è un'altra simmetria (non necessariamente semplice).
4. Si ha $\text{Fix}(U) = \text{Fix}(\langle U \rangle)$; se (u_1, \dots, u_r) è una base di U , allora $\text{Fix}(U)$ è anche uguale a $\bigcap_{i=1}^r \text{Stab}(u_i)$; si procede per induzione su r . Se $U = \langle u_1 \rangle$, allora $\text{Fix}(U) = \text{Stab}(u_1) = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi_1 \subseteq \Phi \rangle$ per il terzo punto, dove Φ_1 è un qualche sottoinsieme di Φ che, senza perdita di generalità, soddisfa $-\Phi_1 = \Phi_1$. Allora $\text{Stab}(u_1) = W_{\Phi_1}$: se $w \in \text{Stab}(u_i)$ e $\alpha \in \Phi_1$, si deve controllare che $w(\alpha) \in \Phi_1$, cioè che $s_{w(\alpha)} = ws_\alpha w^{-1}$ fissa u_1 , ma questo è vero. Allora, nel caso generale, $\text{Fix}(U) = \bigcap_{i=1}^r \text{Stab}_W(u_i) = \bigcap_{i=2}^r \text{Stab}_{W_{\Phi_1}}(u_i)$: si è diminuito il numero di intersezioni, ma cambiando gruppo; tuttavia, questo gruppo ha un sistema di radici contenuto in Φ , perciò l'induzione funziona: per ipotesi induttiva il secondo membro è generato dalle simmetrie che contiene, quindi anche $\text{Fix}(U)$. \square

Definizione 1.44. Le *camere di Weyl* sono le componenti connesse di $V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$. I *muri* sono gli iperpiani H_α con $\alpha \in \Delta$.

Si ha che C è una camera di Weyl, che le camere di Weyl sono coni in \mathbb{R}^n e gli angoli tra i muri sono del tipo π/k .

Proposizione 1.45. Si considera la mappa F con $F(I) := W_I$, dove I è un sottoinsieme di $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$; F è un isomorfismo di reticoli, cioè F è biunivoca tra i sottoinsiemi di S e i sottogruppi parabolici $F(I \cap J) = W_I \cap W_J$ e $F(I \cup J) = \langle W_I, W_J \rangle$.

Dimostrazione. La mappa è biunivoca per come sono stati definiti i sottogruppi parabolici. È morfismo di reticoli: la seconda condizione è facile: $W_{I \cup J} = \langle s_\alpha \mid s_\alpha \in I \cup J \rangle = \langle W_I, W_J \rangle$. Per la prima, si deve dimostrare che $W_{I \cap J} = W_I \cap W_J$. È evidente che $W_{I \cap J} \subseteq W_I \cap W_J$; per l'altra inclusione, se $w \in W_I \cap W_J$, w fissa punto a punto $V_I^\perp + V_J^\perp = (V_I \cap V_J)^\perp = V_{I \cap J}^\perp$; per il teorema, è prodotto di simmetrie che fissano $V_{I \cap J}^\perp$ punto a punto, che sono quelle di $I \cap J$. \square

Osservazione 1.46. A priori, non è detto che le uniche simmetrie che appartengono a W siano quelle relative ai vettori in Φ , ma in realtà è vero: infatti, se $s_\beta \in W$, allora s_β è la simmetria rispetto a qualche $\gamma \in \Phi$.

Dimostrazione. Per quanto detto, $\text{Fix}(H_\beta) \leq W$ è non vuoto e generato dalle simmetrie s_γ che fissano H_β , ma s_γ fissa H_β se e solo se $\beta = \lambda\gamma$, cioè $s_\beta = s_\gamma$. \square

1.5 Complesso di Coxeter

Sia C_I , per $I \subseteq S$, l'insieme

19/10/2007
Nona lezione

$$\{v \in V \mid \forall \alpha \in \Delta_I, (v_i, \alpha) = 0, \forall \alpha \in \Delta \setminus \Delta_I, (v_i, \alpha) > 0\}.$$

Si osserva che D è l'unione disgiunta di C_I per $I \subseteq S$. Sia $\mathcal{C} := \{wC_I \mid w \in W, I \subseteq S\}$; allora $V = \bigcup_{wC_I \in \mathcal{C}} wC_I$; \mathcal{C} è detto *complesso di Coxeter*.

Proposizione 1.47. *Lo stabilizzatore di C_I è W_I ed è uguale allo stabilizzatore di C_I punto a punto.*

Dimostrazione. Se $v \in C_I$, $w \in W$, e $u := w(v) \in C_I$, poiché $C_I \subseteq D$, $u = v$, cioè $\text{Stab}(C_I) = \text{Fix}(C_I)$. Inoltre $\text{Fix}(C_I)$ è generato dalle simmetrie semplici che contiene, cioè è $\langle s_\alpha \in S \mid s_\alpha|_{C_I} = \text{Id}_{C_I} \rangle$ e queste sono le simmetrie s_α tali che $(\alpha, v) = 0$ per ogni $v \in C_I$, cioè $\text{Fix}(C_I) = \langle s_\alpha \in I \rangle = W_I$. \square

Corollario 1.48. *I sottogruppi parabolici sono i gruppi di isotropia degli elementi di \mathcal{C} .*

Osservazione 1.49. Si osserva che:

1. $wC_I \cap w'C_I \neq \emptyset$ se e solo se $wW_I = w'W_I$;
2. $wC_I \cap w'C_J = \emptyset$ se $I \neq J$.

Dimostrazione. Si ha $wC_I \cap w'C_J = w(C_I \cap \eta C_J)$, dove $\eta = w^{-1}w'$; poiché $C_I, C_J \subseteq D$, se c'è un elemento nell'intersezione vuol dire che questo elemento è fissato da η . Ora, la prima proprietà: $v \in w(C_I \cap \eta C_J)$ se e solo se $\eta \in \text{Stab}(C_I) = W_I$; la seconda: per quanto detto, $w(C_I \cap \eta C_J) \subseteq w(C_I \cap C_J) = \emptyset$ se $I \neq J$. \square

Il nome complesso di Coxeter è giustificato dal fatto che si possono vedere i wC_I , con $|I| = |S| - 1$ come i vertici di un complesso, e (w_1C_I, \dots, w_rC_I) è una faccia se $\bigcap w_iC_I \neq \emptyset$.

Si considerano ora degli iperpiani distinti $H_1, \dots, H_r \subseteq V$; per ogni iperpiano si sceglie arbitrariamente un semispazio positivo H_i^+ e un semispazio negativo H_i^- e l'iperpiano stesso H_i^0 ; si considera

$$\mathcal{K} := \left\{ K = \bigcap_{i=1}^r H_i^{\varepsilon_i} \mid \varepsilon_i \in \{+, 0, -\} \right\}.$$

Si definisce $\dim K := \dim \langle K \rangle_{\mathbb{R}}$; inoltre K è aperto in $\langle K \rangle_{\mathbb{R}}$.

Lemma 1.50. *Sia $h_i := |\{K \in \mathcal{K} \mid \dim K = i\}|$; allora $\sum_i (-1)^i h_i = (-1)^n$.*

Dimostrazione. Per induzione su r . Se $r = 1$, si ha un unico iperpiano, quindi $\mathcal{K} = \{H_1^+, H_1^0, H_1^-\}$, perciò la somma dà $(-1)^{n-1} + 2(-1)^n = (-1)^n$. Se l'asserito vale per ogni r -upla di iperpiani, si considerano H_1, \dots, H_r, H ; sia $K \in \mathcal{K}^r$, dove \mathcal{K}^r è relativo agli iperpiani H_1, \dots, H_r ; se $K \cap H = \emptyset$, K non contribuisce a \mathcal{K} , quindi sia $x \in K \cap H$. Da $K \subseteq \langle K \rangle_{\mathbb{R}}$ aperto, si può prendere un intorno

aperto U di x in K rispetto a L ; di conseguenza, K interseca sia H^0 , che H^+ che H^- ; quindi da un oggetto di dimensione k si è passati a due oggetti di dimensione k e uno di dimensione $k - 1$, quindi la somma non cambia. \square

Si definisce $f_I(w) := |\{vC_I \mid w \in \text{Stab}(vC_I)\}|$.

Proposizione 1.51. *Il determinante di w è $\sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} f_I(w)$.*

23/10/2007
Decima lezione

Dimostrazione. Sia $V' := \text{Fix}(w)$ il sottospazio vettoriale di dimensione c di V che non è altro che l'autospazio relativo all'autovalore 1 per w . Si ha che $w \in \text{Stab}(vC_I)$ se e solo se $vC_I \subseteq V'$.

Ora, si considera il complesso $\mathcal{K} := \{vC_I \cap V' \mid vC_I \in \mathcal{C}\}$; la dimensione di vC_I è $n - |I|$, dove $n := \dim V$, il numero di elementi di \mathcal{K} di dimensione i è $\sum_{|I|=n-i} f_I(w)$. Allora, grazie al lemma 1.50,

$$(-1)^c = \sum_{|I|=n-i} (-1)^i \sum_{I \subseteq S} f_I(w) = \sum_{I \subseteq S} (-1)^{n-|I|} f_I(w).$$

Dato che w è una trasformazione ortogonale, i suoi possibili autovalori sono 1 (con molteplicità c), b coppie di autovalori complessi coniugati con modulo 1 e -1 con molteplicità $n - c - 2b$. Allora,

$$\det w = (-1)^{n-c-2b} = (-1)^{n-c} = \sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} f_I(w). \quad \square$$

2 Classificazione

Sia Δ un sistema positivo per Φ e W il corrispondente gruppo generato dalle riflessioni. Si costruisce un grafo che ha come vertici gli elementi di Δ e i cui archi sono pesati tramite $m_{\alpha,\beta}$ (l'ordine di $s_\alpha s_\beta$). Se $m_{\alpha,\beta} = 2$ l'arco non si disegna (significa che le simmetrie commutano). Il grafo determina la classe di isomorfismo di W perché esprime la presentazione di W . Scegliendo Δ' invece di Δ , poiché Δ' e Δ sono coniugati, gli ordini non cambiano e il grafo rimane lo stesso.

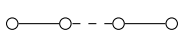
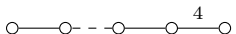
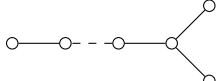

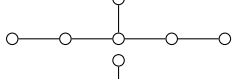
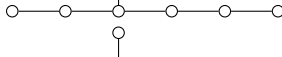

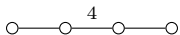
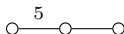

Esercizio 2.1. Costruire il grafo di D_m e di S_{n+1} .

Proposizione 2.2. *Se due sistemi di radici hanno lo stesso grafo, allora i gruppi sono isomorfi tramite un'isometria dello spazio in cui vivono (a meno di considerare gruppi essenziali).*

Dimostrazione. Si è già visto che sono isomorfi, perché la presentazione è determinata dal grafo. Si ha una corrispondenza biunivoca tra i vertici di un grafo e quelli di un altro, cioè si ha una mappa $\varphi: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ che preserva gli ordini: $m_{\alpha,\beta} = m_{\varphi(\alpha),\varphi(\beta)}$. Dato che Δ_i è una base di V_i , si può estendere a un isomorfismo $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$. A partire dagli ordini, si recupera l'angolo tra ogni coppia di radici, che quindi viene preservato da φ . Inoltre, si può supporre $|\alpha| = 1$ per ogni radice. Di conseguenza, $(\alpha, \beta) = \cos \vartheta_{\alpha,\beta} = \cos(\pi - \pi/m_{\alpha,\beta}) = -\cos \pi/m_{\alpha,\beta} = -\cos \pi/m_{\varphi(\alpha),\varphi(\beta)} = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ e il prodotto scalare, fissato sulle basi, è lo stesso ovunque. \square

Definizione 2.3. Un gruppo W si dice *irriducibile* se il grafo corrispondente \mathcal{G} è connesso.

Tabella 1: Grafi con matrici definite positive.

A_n		$n \geq 1$
B_n		$n \geq 3$
D_n		$n \geq 4$
$I_2(m)$		$m \geq 3$
E_6		
E_7		
E_8		
F_4		
H_3		
H_4		

Proposizione 2.4. *Se un grafo \mathcal{G} è unione disgiunta di grafi $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_r$, relativi a sottoinsiemi S_1, \dots, S_r di simmetrie, allora $W = W_{S_1} \times \dots \times W_{S_r}$.*

Dimostrazione. Per induzione su r . Se $r = 1$ non c'è nulla da dimostrare; se vale per ogni gruppo il cui grafo ha al più $r - 1$ componenti e \mathcal{G} ha r componenti, si osserva che W_{S_j} è contenuto nel centralizzatore $Z(W_{S_i})$ per ogni $i \neq j$, dato che non essendo collegate, le simmetrie commutano; in particolare, W_{S_i} è un sottogruppo normale di W . Per ipotesi induttiva, $W_{S \setminus S_1}$ è isomorfo a $W_{S_2} \times \dots \times W_{S_r}$; per l'isomorfismo di reticoli visto in precedenza, $W_{S_1} \cap W_{S \setminus S_1} = W_{S_1 \cap (S \setminus S_1)} = \emptyset$, quindi $W \cong W_{S_1} \times W_{S \setminus S_1}$. \square

Definizione 2.5. Un *grafo di Coxeter* è un grafo con vertici finiti e archi etichettati con interi maggiori di 2 o ∞ .

A un grafo di Coxeter \mathcal{G} si associa una matrice $A := (a_{s,t})_{s,t \in S}$, dove $S := V(\mathcal{G})$, $a_{s,t} = -\cos \pi/m_{s,t}$, ponendo $m_{s,t}$ l'etichetta dell'arco da s a t se esiste, 1 se $s = t$, 2 se s e t non sono collegati. Chiaramente, A è una matrice simmetrica, quindi si può associare ad A una forma bilineare $(x, y) := x^t A y$ e una forma quadratica $x \mapsto x^t A x$. La matrice A è sempre definita positiva per grafi provenienti da un gruppo W , dato che le entrate sono i prodotti scalari (s, t) (è la matrice del prodotto scalare standard scritto sulla base Δ).

Alcuni grafi con matrici definite positive sono quelli elencati in tabella 1. Si mostrerà che questi sono tutti e soli i possibili grafi provenienti da gruppi W .

Per evitare troppi denominatori, si considera la matrice $2A$ anziché A . Per le convenzioni sulle matrici, $a_{s,s} = \cos \pi = 1$ e $a_{s,s'} = \cos \pi/2 = 0$ se s e s' non sono collegati. Si mostra che ogni grafo elencato corrisponde a una matrice definita positiva e per farlo basta mostrare che ogni minore principale ha determinante positivo.

24/10/2007
Undicesima lezione

- Il caso A_1 : la matrice corrispondente è $2A = (2)$ e il determinante è $d(A_1) = 2$, quindi la matrice è definita positiva.
- Il caso $I_2(m)$: la matrice è

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \cos \frac{\pi}{m} \\ -2 \cos \frac{\pi}{m} & 2 \end{pmatrix}$$

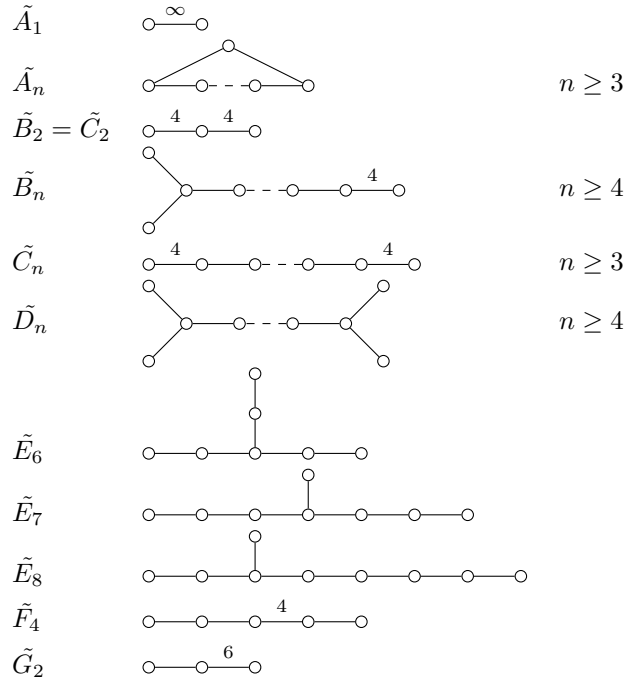
e il determinante $d(I_2(m)) = 4 \sin^2 \pi/m > 0$ (perché $m \geq 3$), quindi la matrice è definita positiva.

- Il caso generale: si può supporre che il nodo n sia collegato solo al nodo $n - 1$ con un arco di peso m uguale a 3 o 4; allora la n -esima riga della matrice $2A$ è $(0, \dots, 0, a, 2)$, e la n -esima colonna è $(0, \dots, 0, a, 2)^t$, dove $a = -2 \cos \pi/m$, cioè 1 se $m = 3$, $-\sqrt{2}$ se $m = 4$. Ora, ogni sottografo connesso di un grafo nella lista è ancora nella lista; posto d_k il determinante del k -esimo minore principale, sviluppando prima per riga e poi per colonna si ha $d_n = 2d_{n-1} - a^2 d_{n-2}$. Nel caso $m = 3$ si ha $d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}$; nel caso $m = 4$, $d_n = 2d_{n-1} - 2d_{n-2}$. Poiché accorciando il grafo il tipo può cambiare, si affrontano in ordine.

- Un sottografo di A_n è ancora un A_k ; si sono già visti $d(A_1) = 2$, $d(A_2) = d(I_2(3)) = 3$, da cui, poiché $m = 3$, per induzione si ricava $d(A_n) = n + 1$.
- Per B_n , togliendo l'ultimo nodo si ottiene A_{n-1} ; poiché $m = 4$, $d(B_n) = 2d(A_{n-1}) - 2d(A_{n-2}) = 2n - 2n - 1 = 2$.
- Per D_n , si può prendere un estremo della biforcazione, e togliendolo si ottiene A_{n-1} ; poiché $m = 3$, si ottiene $d(D_n) = 2d(A_{n-1}) - d(A_{n-3})d(A_1) = 2n - 2(n - 2) = 4$, dato che togliendo anche il penultimo si ottiene un grafo sconnesso, che dà una matrice diagonale a blocchi.
- Per E_6 , si ottiene $d(E_6) = 2d(D_5) - d(A_4) = 8 - 5 = 3$.
- Per E_7 , $d(E_7) = 2d(E_6) - d(D_5) = 6 - 4 = 2$.
- Per E_8 , $d(E_8) = 2d(E_7) - d(E_6) = 4 - 3 = 1$.
- Per F_4 , $d(F_4) = 2d(B_3) - d(A_2) = 4 - 3 = 1$.
- Per H_3 , $d(H_3) = 2d(I_2(5)) - 2d(A_1)$; bisogna calcolare il coseno di $\pi/5$. Per farlo, si considera $\alpha = \cos 2\pi/5$; $2\alpha = \xi + \xi^{-1}$ soddisfa $(2\alpha)^2 + 2\alpha - 1 = 0$. Di conseguenza, $2\alpha = -1/2 + \sqrt{5}/2$, perciò $\cos \pi/5 = 1/2 = \alpha/2 + 1/2 = 3/8 + \sqrt{5}/8$. In definitiva, $d(I_2(5)) = 4 \sin^2 \pi/5 = 5/2 - \sqrt{5}/2$ e $d(H_3) = (2 - \sqrt{5}) - 2 = 3 - \sqrt{5} > 0$.
- Per H_4 , $d(H_4) = 2d(H_3) - d(I_2(5)) = 7/2 - 3/2\sqrt{5} > 0$.

Ora si deve mostrare che non esistono altri grafi con matrici definite positive; successivamente si mostrerà che effettivamente i grafi visti provengono da gruppi finiti generati da riflessioni. Alcuni grafi con matrici solo semidefinite positive (che generano gruppi infiniti) sono elencati in tabella 2. Alcune osservazioni: a \tilde{A}_1 è associato il gruppo con due generatori di ordine 2 senza relazioni tra loro; G_2 è un'abbreviazione per $I_2(6)$; l'indice non è più il rango, ma il rango meno uno; se ϑ è la radice più alta, si dimostra che il grafo con la tilde è il

Tabella 2: Grafi con matrici semidefinite positive.



grafo senza in prodotto semidiretto con la traslazione di vettore ϑ (nonostante la costruzione, il gruppo che risulta è ancora generato da riflessioni, di cui una però è affine, cioè ha centro qualsiasi).

Inoltre, si osserva che togliendo un vertice e considerando una componente connessa, si ottiene un grafo di quelli precedenti. Questo significa che i determinanti di tutti i minori propri sono positivi, e rimarrà da dimostrare che l'ultimo determinante si annulla (che darà che la matrice è solo semidefinita positiva ma non definita positiva).

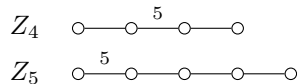
26/10/2007
Dodicesima lezione

- Per \tilde{A}_n , si ha $2a_{s,s} = 2$, $2a_{s,s+1} = -2 \cos \pi/3 = -1$; di conseguenza, la matrice è tridiagonale, con elementi sulla diagonale uguali a 2, sulle altre diagonali uguali a -1 e inoltre gli elementi $(1, n+1)$ e $(n+1, 1)$ sono -1 ; la matrice è singolare, per esempio perché la somma di tutte le righe è il vettore nullo.
- Per tutti gli altri tipi, si può considerare come prima un vertice n collegato solo al vertice $n-1$ con un arco di peso 3 o 4. Si fa il calcolo solo per \tilde{D}_n : $d(\tilde{D}_n) = 2d(D_n) - d(D_{n-2})d(A_1) = 8 - 8 = 0$.

Definizione 2.6. Un grafo è detto *di tipo positivo* se è definito positivo o semidefinito positivo.

Grazie alla formula induttiva, si può dimostrare che i grafi Z_4 e Z_5 in tabella 3 sono negativi (in particolare, sono positivi fino al passo $n-1$ ma l'ultimo

Tabella 3: Grafi con matrici non semidefinite positive.



determinante è negativo). Questa informazione servirà successivamente nella classificazione.

Definizione 2.7. Sia \mathcal{G} un grafo; un *sottografo* (proprio) di \mathcal{G} è un grafo diverso da \mathcal{G} e ottenuto da \mathcal{G} tramite le operazioni seguenti:

- togliere un vertice e i relativi archi;
- diminuire il peso di un arco.

Definizione 2.8. Una matrice A è detta *decomponibile* se esiste una decomposizione degli indici $\{1, \dots, n\}$ in due insiemi disgiunti I e J tali che $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \in I$ e $j \in J$.

Proposizione 2.9. Sia A una matrice simmetrica, reale, indecomponibile, semidefinita positiva, con $a_{i,j} \leq 0$ per ogni $i \neq j$; allora valgono:

1. $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x = 0\} = \ker A$ e $\dim N \leq 1$;
2. il più piccolo autovalore di A ha molteplicità 1 e ha un autovettore in \mathbb{R}^{+n} .

Dimostrazione.

1. Se $x \in \ker A$, chiaramente $x^t A x = 0$. Viceversa, poiché A è simmetrica e reale, esiste P ortogonale tale che $D = P^t A P$, dove $D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ con $d_i \geq 0$. Si vede che l'asserto vale per D : se $y^t D y = 0$, allora $0 = y^t D y = \sum d_i y_i^2$, da cui per ogni i , $y_i = 0$ o $d_i = 0$. Ma allora anche $\sum d_i y_i = 0$, cioè $y \in \ker D$. Preso $x \in \mathbb{R}^n$, si può scrivere $x = P y$; se $x^t A x = 0$, si ha $y^t P^t A P y = 0$, cioè $y^t D y = 0$, da cui per quanto detto si ottiene $D y = 0$. Da questo, $0 = P^t A P y = P^t A x = 0$ e poiché P^t è invertibile, $A x = 0$. Rimane da dimostrare che $\dim N \leq 1$: siano $x \in N \setminus \{0\}$ e $z_i := |x_i|$; allora $0 \leq z^t A z \leq x^t A x = 0$, cioè $z \in N$ (si è usato che $a_{i,j} \leq 0$ per $i \neq j$). Si vuole dimostrare che $z_i \neq 0$ per ogni i : sia $J = \{j \mid z_j \neq 0\}$; J è non vuoto (perché $x \neq 0$) e se per assurdo il suo complementare I non fosse vuoto, si ottiene $0 = \sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j = \sum_{j \in J} a_{i,j} z_j$; per $i \in I$, $j \neq i$, cioè i coefficienti sono tutti non positivi. Ma allora $a_{i,j} z_j = 0$ per ogni $j \in J$ e dato che $z_j \neq 0$, deve essere $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \in I$ e $j \in J$, assurdo per l'indecomponibilità di A . Si è trovato $z \in N$ con tutte le coordinate positive e inoltre si è visto che se $x \in N$, $x_i \neq 0$ per ogni i . Se $\dim N \geq 2$ e $x_1, x_2 \in N$, si può fare una combinazione lineare che dà un elemento di N con una coordinata nulla; ma allora tutte le coordinate sono nulle e ciò significa che x_1 e x_2 sono linearmente dipendenti.
2. Sia $d \geq 0$ il minimo autovalore di A e sia $A' := A - dI$. Questa matrice è equivalente tramite $O(n)$ a $D - dI$, che è semidefinita positiva perché d è il minimo autovalore; di conseguenza anche A' è semidefinita positiva e

si può applicare il primo punto a A' . L'autospazio di d è $\ker A' \neq 0$ e per quanto visto, $\dim \ker A' \leq 1$, da cui $\dim \ker A' = 1$. Inoltre sempre per il primo punto, esiste $x \in \ker A'$ con tutte le coordinate positive. \square

Corollario 2.10. *Se \mathcal{G} è un grafo di tipo positivo e $\mathcal{G}' \subsetneq \mathcal{G}$ allora \mathcal{G}' è definito positivo.*

Dimostrazione. Siano A la matrice di \mathcal{G} e A' la matrice di \mathcal{G}' ; si possono ordinare gli indici in modo che A' sia il minore principale di testa di A di dimensione k . Inoltre, si ha $m'_{i,j} \leq m_{i,j}$ e questo si riflette sulle entrate della matrice: se $m'_{i,j}$ è più piccolo, $-\cos \pi/m'_{i,j}$ è più grande, quindi anche $a'_{i,j} \geq a_{i,j}$. Per assurdo, si suppone che A' non sia definita positiva, cioè che esista $x = (x_1, \dots, x_k) \neq 0$ tale che $x^t A' x \leq 0$. Si considera il vettore $z := (|x_1|, \dots, |x_k|, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$; allora:

$$0 \leq \sum a_{i,j} |x_i| |x_j| \leq \sum a'_{i,j} |x_i| |x_j| \leq \sum a_{i,j} x_i x_j \leq 0:$$

Infatti, se $i = j$ non ci sono problemi togliendo i moduli, mentre se $i \neq j$, $a'_{i,j} \leq 0$, quindi non ci sono problemi. Allora tutti i segni sono di uguaglianza, da cui $z \in N(A)$. Ma allora $k = n$, altrimenti si avrebbe $x = 0$ per le proprietà di $N(A)$; inoltre $x_i \neq 0$ per ogni i , da cui, rivedendo le uguaglianze trovate, si deve avere $a_{i,j} = a'_{i,j}$, cioè $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$, assurdo perché \mathcal{G}' era un sottografo di \mathcal{G} , in particolare proprio. \square

Teorema 2.11. *I grafi connessi di tipo positivo sono solo quelli elencati nelle due liste.*

30/10/2007
Tredicesima lezione

Dimostrazione. Sia \mathcal{G} un grafo connesso di tipo positivo non presente nelle due liste; siano n il numero di vertici di \mathcal{G} e m il massimo tra le etichette degli archi.

1. Il numero di vertici deve essere maggiore di 2, perché i grafi di due o meno vertici sono già nelle liste (possono essere A_1, \tilde{A}_1 o $I_2(m)$).
2. Il grafo \tilde{A}_1 non può essere un sottografo di \mathcal{G} ; in particolare, $m < \infty$.
3. Il grafo \tilde{A}_n non può essere un sottografo di \mathcal{G} ; in particolare, non ci sono cicli.
4. Si suppone che $m = 3$, cioè che ci siano solo archi di peso 3; allora deve esserci un vertice da cui escono più di tre archi (un vertice siffatto è detto di diramazione), altrimenti il grafo sarebbe A_n .
5. Per $n > 4$, non ci possono essere due vertici di diramazione, altrimenti si troverebbe \tilde{D}_k come sottografo, per qualche k .
6. Inoltre, poiché \tilde{D}_4 non è un sottografo, ogni vertice di diramazione ha esattamente 3 archi uscenti (non di più).
7. Quindi si ha un grafo con un solo punto di diramazione; siano $a \leq b \leq c$ le lunghezze dei sottografi che si ottengono cancellando il punto di diramazione. Non può essere $a \geq 2$, altrimenti ci sarebbero almeno due vertici per ogni ramo, quindi \tilde{E}_6 sarebbe un sottografo; perciò $a = 1$.
8. Non può essere $b \geq 3$, altrimenti \tilde{E}_7 starebbe in \mathcal{G} ; perciò $b \in \{1, 2\}$.
9. Non può essere $b = 1$, altrimenti $\mathcal{G} = D_{a+b+c+1}$; perciò $b = 2$.

10. Non può essere $c \geq 5$, altrimenti $\tilde{E}_8 \subseteq \mathcal{G}$; perciò $c \leq 4$.
11. Non può essere nemmeno $2 \leq c \leq 4$, altrimenti $\mathcal{G} \in \{E_6, E_7, E_8\}$.
12. Si considera ora il caso $m > 3$; non possono esserci due archi di peso maggiore di 3, altrimenti abbassando eventualmente i pesi e considerando solo un segmento, si otterrebbe \tilde{C}_n .
13. Poiché \tilde{B}_n non è sottografo di \mathcal{G} , non ci sono nemmeno diramazioni; perciò \mathcal{G} è un segmento.
14. Si suppone ora $m = 4$; l'arco di peso 4 non può essere un estremo del segmento, altrimenti $\mathcal{G} = B_n$.
15. Poiché $\tilde{F}_4 \not\subseteq \mathcal{G}$, $n \leq 4$ (non può essere nemmeno 3 perché l'arco di peso 4 è interno).
16. Non può essere nemmeno $n = 4$, perché allora $\mathcal{G} = F_4$.
17. Per $m \geq 5$, $\tilde{G}_2 \not\subseteq \mathcal{G}$ implica che $m = 5$.
18. Da $Z_4 \not\subseteq \mathcal{G}$ (non è nemmeno semidefinito positivo), l'arco di peso 5 è estremo.
19. Da $Z_5 \not\subseteq \mathcal{G}$, $n \leq 4$.
20. Ma \mathcal{G} non può essere né H_3 né H_4 , assurdo. □

Questo teorema non esaurisce la classificazione: si devono trovare i gruppi che hanno come grafi quelli ammissibili. Si mostrerà che tutti questi gruppi esistono.

2.1 Gruppi cristallografici

Definizione 2.12. Un gruppo $G \leq \text{GL}(V)$ si dice *cristallografico* se esiste un reticolo² $L \subseteq V$ tale che $gL \subseteq L$ per ogni $g \in G$ (in particolare, $gL = L$).

Osservazione 2.13. Sia G un gruppo cristallografico; se $g \in G$, $\text{Tr}(g) \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Si scrive g come una matrice sulla base che genera il reticolo; allora tutte le entrate devono essere intere. □

Proposizione 2.14. Sia W un gruppo finito generato da riflessioni e cristallografico; se $\alpha \neq \beta \in \Delta$, allora $m_{\alpha, \beta} \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Dimostrazione. Sia $U := \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{R}}$; allora $\dim U = 2$ e $\rho := s_{\alpha} s_{\beta}$ è una rotazione di $\vartheta := 2\pi/m_{\alpha, \beta}$ nel piano U ed è l'identità in U^{\perp} . Allora, in una base compatibile con $V = U \oplus U^{\perp}$, la matrice di ρ è del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

²Un reticolo si può definire sia come uno \mathbb{Z} -modulo di rango massimo in V che come lo \mathbb{Z} -span di una base.

Per l'osservazione, $\text{Tr}(\rho) \in \mathbb{Z}$, cioè $\cos \vartheta \in 1/2\mathbb{Z}$; sicuramente $0 < \vartheta \leq \pi$; le possibilità sono:

$$\cos \vartheta = \begin{cases} -1 & \text{se } \vartheta = \pi, \text{ cioè } m_{\alpha,\beta} = 2; \\ -1/2 & \text{se } \vartheta = 4\pi/3, \text{ cioè } m_{\alpha,\beta} = 3; \\ 0 & \text{se } \vartheta = \pi/2, \text{ cioè } m_{\alpha,\beta} = 4; \\ 1/2 & \text{se } \vartheta = \pi/3, \text{ cioè } m_{\alpha,\beta} = 6. \end{cases} \quad \square$$

Tra i grafi visti, quelli relativi a gruppi cristallografici possono essere solo $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, I_2(2) = A_1 \times A_1, I_2(3) = A_2, I_2(4) = B_2, I_2(6) = G_2$. I gruppi finiti generati da riflessioni cristallografici sono detti *gruppi di Weyl*.

31/10/2007
Quattordicesima lezione

Definizione 2.15. Un sistema di radici si dice *cristallografico* se:

$$(R_3) \quad c_{\alpha,\beta} := 2(\alpha, \beta) / (\beta, \beta) \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } \alpha, \beta \in \Phi.$$

Osservazione 2.16. Se Φ è un sistema di radici, Φ è cristallografico se e solo se la condizione R_3 vale per ogni $\alpha, \beta \in \Delta$.

Dimostrazione. Se la proprietà vale per le radici semplici, si dimostra innanzitutto che $c_{\eta,\beta} \in \mathbb{Z}$ per ogni $\eta \in \Phi$ e $\beta \in \Delta$: si può trovare $w \in W$ tale che $\eta = w(\alpha) \in \Delta$ e $w = s_1 \cdots s_r$ con $\alpha_i \in \Delta$. Allora $c_{\eta,\beta} = c_{w\alpha,\beta}$ e $w(\alpha) = s_1 \cdots s_r(\alpha) = s_1 \cdots s_{r-1}(\alpha - c_{\alpha,\alpha_r}\alpha_r)$; ma $c_{\alpha,\alpha_r} \in \mathbb{Z}$ e iterando si ottengono sempre interi. Perciò $w(\alpha) = \sum_{\gamma \in \Delta} a_\gamma \gamma$ con $a_\gamma \in \mathbb{Z}$. Inoltre, il simbolo $c_{\eta,\beta}$ è lineare in η , perciò $c_{\eta,\beta} = \sum_{\gamma \in \Delta} a_\gamma c_{\gamma,\beta} \in \mathbb{Z}$. Si è anche dimostrato che tutti i coefficienti di una radice su un sistema semplice sono interi (o non negativi o non positivi). Ora, se $w \in W$, $c_{w(\alpha),w(\beta)} = c_{\alpha,\beta}$ perché w è composizione di matrici ortogonali; allora se $\varepsilon \in \Phi$, $c_{\eta,\varepsilon} = c_{w^{-1}(\eta),\beta} \in \mathbb{Z}$, dove $\beta = w^{-1}(\varepsilon) \in \Delta$. \square

In particolare, si osserva che il gruppo associato a un sistema cristallografico stabilizza il reticolo $\langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}}$, cioè è un gruppo cristallografico.

Si costruiscono ora dei sistemi di radici il cui gruppo ha come grafo ognuno di quelli della lista. In generale, si considera uno spazio vettoriale V , un reticolo L e dentro L si considera come Φ l'insieme di tutti i vettori di una certa lunghezza. Di conseguenza, per dire che Φ viene mandato in Φ basterà dire che L viene mandato in L .

- Per A_n , si considera $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definito da $V = \{ \sum a_i e_i \mid \sum a_i = 0 \}$; come reticolo si prende il reticolo standard $\langle e_i \rangle_{\mathbb{Z}} \cap V$ e come Φ si prendono i vettori di L di lunghezza $\sqrt{2}$. Allora $\Phi = \{ e_i - e_j \mid i \neq j \}$; si prende come Δ l'insieme dato dagli $\alpha_i := e_i - e_{i+1}$: innanzitutto sono una base di V e bisogna dimostrare che ogni radice si scrive come somma di α_i con coefficienti tutti non positivi o tutti non negativi, ma questo è evidente. Ora, se $|i - j| > 1$, s_{α_i} e s_{α_j} commutano perché sono ortogonali, quindi il grafo è (al più) un segmento e rimane da dimostrare che $m_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 3$: infatti, $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = -1$, da cui $\cos \vartheta = -1/2$ e $\vartheta = 2\pi/3$. Ora si controlla che sia cristallografico: $c_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 2 \cdot (-1)/2 = -1$. La matrice di Cartan è tridiagonale con diagonale uguale a 2, sottodiagonale e sopradiagonale uguali a -1.

02/11/2007
 Quindicesima lezione

- Per B_n , si prende $V := \mathbb{R}^n$, L il reticolo standard e Φ i vettori di L di norma 1 o $\sqrt{2}$: sono $\pm e_i$ e $\pm e_i \pm e_j$ per $i < j$. Come Δ si prende $\alpha_i := e_i - e_{i+1}$ per $1 \leq i < n$ e $\alpha_n := e_n$. I primi $n - 1$ termini sono identici al caso A_{n-1} e si dimostra facilmente che anche le radici aggiuntive si scrivono con coefficienti tutti positivi o tutti negativi. Per il grafo, l'unica cosa che cambia è $m_{\alpha_{n-1}, \alpha_n} = 4$.
- Per D_n , si prende $V := \mathbb{R}^n$, L il reticolo standard e come Φ l'insieme dei vettori di L di lunghezza $\sqrt{2}$, cioè $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid i < j\}$. Come radici semplici si prendono $\alpha_i := e_i - e_{i+1}$ per $1 \leq i < n$ e $\alpha_n := e_{n-1} + e_n$; procedendo come prima si verifica che il grafo è D_n .
- Per $G_2 = I_2(6)$, si considera il reticolo standard in \mathbb{R}^3 e il sottospazio vettoriale $V \leq \mathbb{R}^3$ definito da $\sum a_i = 0$; come Φ si prende l'insieme dei vettori in $L \cap V$ di lunghezza $\sqrt{2}$ o $\sqrt{6}$. Quelle di lunghezza $\sqrt{2}$ sono $e_i - e_j$ con $i \neq j$, mentre quelle di lunghezza $\sqrt{6}$ sono $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ con $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 6$ e $\sum a_i = 0$; cioè sono della forma $\pm(2e_i - e_j - e_k)$ con gli indici tutti distinti. Come radici semplici si scelgono $\alpha_1 := e_1 - e_2$ e $\alpha_2 := -2e_1 + e_2 + e_3$ e si deve controllare che i $c_{\alpha, \beta}$ siano in \mathbb{Z} ; basta farlo per le radici semplici e in effetti risulta $c_{\alpha_1, \alpha_2} = -1$ e $c_{\alpha_2, \alpha_1} = -3$.
- Per F_4 , si considera $V := \mathbb{R}^4$, con il reticolo $\langle e_1, \dots, e_4 \rangle_{\mathbb{Z}} + 1/2 \mathbb{Z}(e_1 + \dots + e_4)$; Φ sarà l'insieme dei vettori di L di lunghezza 1 o $\sqrt{2}$, cioè $\Phi = \{e_i \pm e_j, \pm e_i, 1/2(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}$. Come radici semplici si prendono $\alpha_1 := e_2 - e_3$, $\alpha_2 := e_3 - e_4$, $\alpha_3 := e_4$, $\alpha_4 := 1/2(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$.
- Per E_8 , si considera $V := \mathbb{R}^8$, con $L = L' + 1/2 \mathbb{Z}(e_1 + \dots + e_8)$, dove $L' := \{\sum c_i e_i \mid c_i \in \mathbb{Z}, 2 \mid \sum c_i\}$; Φ sarà l'insieme dei vettori di L di lunghezza $\sqrt{2}$ e risulta che $|\Phi| = 240$, infatti è costituito dai vettori $e_i \pm e_j$ e $1/2 \sum \pm e_i$ con un numero pari di segni positivi. Come radici positive si prendono $\alpha_1 := 1/2(e_1 - e_2 - \dots - e_7 + e_8)$, $\alpha_2 := e_1 + e_2$ e $\alpha_i := e_{i-1} - e_{i-2}$ per $3 \leq i \leq 8$.
- Per E_7 e E_6 si hanno risultati analoghi.

Si calcola il numero di radici per le famiglie infinite: A_n ha $(n + 1)!$ radici, B_n ne ha $2^n n!$, D_n ne ha $2^{n-1} n!$ e $I_2(m)$ ne ha $2m$.

Da quanto visto si desumono le seguenti proprietà.

- Per un sistema di radici cristallografico si hanno al più due lunghezze per le radici (lunga e corta).
- Tutte le radici della stessa lunghezza sono coniugate. Per dimostrarlo, si osserva che basta provarlo per le radici semplici (una radice qualsiasi è sempre coniugata a una radice semplice della stessa lunghezza); si suppone poi che ci sia una sola lunghezza; si considera il caso di due radici collegate da un arco di peso 3; si può fare il calcolo in D_3 e si verifica che sono coniugate (si manda α in β agendo prima con s_β e poi con s_α). Con questa osservazione, si è dimostrata la proprietà per A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 . Per B_n , si hanno due lunghezze (l'unica corta e l' n -esima); chiaramente le prime $n - 1$, quelle lunghe, sono coniugate. Per F_4 , si hanno due lunghezze, le lunghe sono le due a sinistra mentre le corte sono quelle a destra e si

06/11/2007
 Sedicesima lezione

può ripetere ancora lo stesso ragionamento. Per G_2 , si hanno due radici semplici di lunghezze diverse.

- Esiste una unica radice più alta che si denoterà con $\tilde{\alpha}$, e $\tilde{\alpha}$ è una radice lunga. Anche questo fatto si controlla con la classificazione.
- La radice più alta appartiene a D , perciò $\text{Stab}(\tilde{\alpha}) = \{s_\beta \mid \beta \in \Delta, \beta \perp \tilde{\alpha}\}$. Infine, $(\tilde{\alpha}, \beta) \geq 0$ per ogni $\beta \in \Delta$: infatti, $h(s_\beta(\tilde{\alpha})) = h(\tilde{\alpha} - 2^{(\beta, \tilde{\alpha})}/(\beta, \beta)\beta) \leq h(\tilde{\alpha})$, da cui si ottiene $(\tilde{\alpha}, \beta) \geq 0$.

Si considera ora E_6 ; si verifica che $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 = \omega_2$, dove $\omega_h \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$ è il duale di α_h , cioè ω_h è tale che $2^{(\omega_h, \alpha_h)}/(\alpha_h, \alpha_h) = \delta_{h,k}$ (cioè, ω_h è fissato da tutte le simmetrie tranne s_{α_h}). Poiché si è scritto $\tilde{\alpha}$ come ω_2 , è facile trovare lo stabilizzatore: $\text{Stab}(\tilde{\alpha}) = \text{Stab}(\omega_2) = \langle s_1, s_3, s_4, s_5, s_6 \rangle \cong A_5$, da cui $|\text{Stab}(\tilde{\alpha})| = 6!$. Per l'orbita, si osserva che esiste una unica lunghezza, da cui le radici sono tutte coniugate e la cardinalità dell'orbita è $|\Phi| = 72$ (per come si è costruito). Di conseguenza, $|W(E_6)| = 72 \cdot 6! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$.

Per E_7 , si calcola che $\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 = \omega_1$, da cui $\text{Stab}(\tilde{\alpha}) = \langle s_2, \dots, s_7 \rangle \cong D_6$; la cardinalità dello stabilizzatore è $2^5 \cdot 6!$ e quella dell'orbita ancora è la cardinalità di Φ , cioè 126; di conseguenza, $|W(E_7)| = 126 \cdot 2^5 \cdot 6! = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

Per E_8 , $\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 = \omega_8$, da cui $\text{Stab}(\tilde{\alpha}) = \langle s_1, \dots, s_7 \rangle \cong E_7$; inoltre la cardinalità dell'orbita è $|\Phi| = 280$ e $|W(E_8)| = 240 \cdot |W(E_7)| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Per F_4 , $\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = \omega_1$, da cui $\text{Stab}(\tilde{\alpha}) = \langle s_2, s_3, s_4 \rangle \cong B_3$. Stavolta però ci sono due lunghezze e l'orbita di $\tilde{\alpha}$ è l'insieme di tutte le radici lunghe, che per la costruzione sono 24; di conseguenza, $|W(F_4)| = 2^3 \cdot 3! \cdot 24 = 2^7 \cdot 3^2$.

Lemma 2.17. *Sia H l'anello dei quaternioni. Se $G \leq H$ è un gruppo finito di ordine pari, allora G è un sistema di radici di $H \cong \mathbb{R}^4$.*

Dimostrazione. Il gruppo è finito, quindi ogni elemento ha ordine finito. Sui quaternioni si può definire una norma: $\|\lambda\|^2 = \lambda\bar{\lambda}$, dove $\bar{a+ib+jc+kd} = a-bi-ci-di$; inoltre $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}/|\lambda|^2$. Se $\lambda, \mu \in H \cong \mathbb{R}^4$, $(\lambda, \mu) = 1/2(\lambda\bar{\mu} + \mu\bar{\lambda})$ (sono entrambe bilineari e coincidono sulla base). In particolare, la norma di λ è la stessa considerando λ sia come elemento di \mathbb{R}^4 che come elemento di H . Ora, se $|\mu| = 1$, $s_\mu(\lambda) = \lambda - 2^{(\lambda, \mu)}/(\mu, \mu)\mu = \lambda - 2^{1/2}(\lambda\bar{\mu} + \mu\bar{\lambda})\mu = -\mu\bar{\lambda}\mu$.

Siano ora $g, h \in G$, con $|g| = 1$; $s_g(h) = -g\bar{h}g = -gh^{-1}g$. Poiché il gruppo ha ordine pari, c'è un elemento di ordine 2, ma l'unico quaternionone di ordine 2 è -1 ; di conseguenza, il gruppo è chiuso per simmetrie. Chiaramente, se $g \in G$, anche $-g \in G$, e poiché hanno tutti norma unitaria, sono gli unici multipli di g in G . \square

Rimanevano da costruire H_3 e H_4 . Per il primo, $|W(H_3)| = 120$ e $W(H_3)$ è il gruppo delle isometrie del dodecaedro. Per il secondo, si considerano $a := \cos \pi/5 = 1/4 + \sqrt{5}/4$ e $b := \cos 2\pi/5 = -1/4 + \sqrt{5}/4$. Alcune relazioni tra a e b sono le seguenti:

$$\begin{aligned} 2a &= 2b + 1 & 4ab &= 1 \\ 4a^2 &= 2a + 1 & 4b^2 &= -2b + 1. \end{aligned}$$

Posto $X := \{1, 1/2(1+i+j+k), a + 1/2i + bj\} \subseteq H$, si prende come Φ l'insieme dei vettori ottenuti da X con cambiamenti arbitrari di segno delle coordinate e permutazioni pari delle coordinate. Per il lemma, se Φ è un sottogruppo di H^* , allora è un sistema di radici; in effetti, si dimostra che Φ è un sottogruppo di ordine 120 e che $W := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ è irriducibile. Come radici semplici si prendono

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a - \frac{1}{2}i + bj & \alpha_2 &:= a + \frac{1}{2}i + bj \\ \alpha_3 &:= \frac{1}{2} + bi - aj & \alpha_4 &:= -\frac{1}{2} - ai + bk. \end{aligned}$$

Per calcolare l'ordine del gruppo, si osserva che le radici semplici hanno tutte lunghezza 1 (per il lemma) e sono tutte coniugate: guardando il grafo, le prime due perché formano un D_5 , in cui le radici semplici sono coniugate (come in ogni $D_{2\nu+1}$), le ultime 3 perché formano un A_3 , in cui ancora le radici sono coniugate. Allora c'è una unica orbita; di conseguenza, $|W(H_4)| = |O(k)| |\text{Stab}(k)|$; k compare solo in α_4 , cioè k è ortogonale alle prime 3 radici semplici e si verifica che le combinazioni lineari delle prime tre sono tutte e sole le radici ortogonali a k ; allora lo stabilizzatore è H_3 , da cui $|W(H_3)| = 120 \cdot |H_3| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

3 Invarianti polinomiali

Si considera un gruppo $G \leq \text{GL}(V)$ finito, con V uno spazio vettoriale di dimensione n ; l'algebra simmetrica $S := S(\check{V}) \cong K[x_1, \dots, x_n]$, dove x_i è la funzione che restituisce la coordinata i -esima. Il gruppo agisce su V mediante $(g \cdot f)(v) := f(g^{-1}v)$ e questa è un'azione per automorfismi di K -algebre. L'algebra S è graduata (l'usuale graduazione dei polinomi, con $\deg 0 := -\infty$) e l'azione di G mantiene il grado: infatti

$$\begin{aligned} (g^{-1}x_i)(v) &= x_i(gv) = x_i\left(\sum_{j,k} g_{j,k}v_k e_j\right) = \\ &= \sum_k g_{i,k}v_k = \sum_k g_{i,k}x_k(v) = \left(\sum_k g_{i,k}x_k\right)(v) \end{aligned}$$

e dato che manda i polinomi di primo grado nei polinomi di primo grado, mantiene tutti i gradi.

Definizione 3.1. Un polinomio $f \in S$ tale che $gf = f$ per ogni $g \in G$ si dice *invariante*. L'insieme $R := S^G := \{f \in S \mid (\forall g \in G) gf = f\}$ è detto *sottoalgebra degli invarianti*.

Se L è il campo dei quozienti di S , cioè $L := Q(S) = K(x_1, \dots, x_n)$, l'azione indotta di G su L (data da $gf/h := gf/gh$) è costituita di automorfismi di campi su K . Sicuramente, $Q(R) \subseteq L^G$ (frazioni di polinomi invarianti sono invarianti), ma è vero anche il viceversa: se f/h è invariante, allora $f/h = gf/gh$; si può assumere che $f \neq 0$, il che permette di dire che

$$\frac{f}{h} = \frac{f \prod_{g \in G \setminus \{I\}} gf}{h \prod_{g \in G \setminus \{I\}} gf}$$

e in questa scrittura è evidente che il numeratore è invariante, perciò lo è anche il denominatore.

Osservazione 3.2. L'estensione di campi L/L^G è finita e $\text{Gal}(L/L^G) = G$; in particolare, $\text{trdeg}(L^G/K) = n$, dato che $\text{trdeg}(L/K) = n$.

Dimostrazione. Innanzitutto bisogna mostrare che l'estensione è di Galois:

1. è separabile: se $\alpha \in L$, l'orbita di α secondo G è $\{g(\alpha) \mid g \in H\}$, dove $H \subseteq G$ è un sottoinsieme massimale di elementi di G tali che $h_1(\alpha) \neq h_2(\alpha)$; allora $\mu_\alpha(x) := \prod_{g \in H} (x - g(\alpha)) \in L^G[x]$ è un polinomio di grado $|H| \leq n$ senza radici multiple che si annulla in α , da cui α è separabile e inoltre si osserva che $[L^G[\alpha] : L^G] \leq n$;
2. è normale perché L è il campo di spezzamento di $\{\mu_\alpha \mid \alpha \in L\}$ su L^G .

Allora L/L^G è di Galois; sia $\alpha \in L$ un elemento per cui $[L^G[\alpha] : L^G] = m \leq n$ è massimale; allora $L^G[\alpha] = L$, altrimenti per il teorema dell'elemento primitivo si troverebbe un $\tilde{\alpha}$ con $[L^G[\tilde{\alpha}] : L^G] > m$; quindi $[L : L^G] \leq n$. Ora, chiaramente $G \leq \text{Gal}(L/L^G)$ e inoltre $n = |G| \leq |\text{Gal}(L/L^G)| = [L : L^G] \leq n$, da cui si ha l'uguaglianza. \square

3.1 Teorema di Chevalley

Osservazione 3.3. Sia $R^+ := \{f \in R \mid f(0) = 0\} = v_0^{-1}(0)$ e sia $I := R^+S = (f_1, \dots, f_r)S$ con $f_h \in R^+$ omogenei; allora R è generato da $(1, f_1, \dots, f_r)$ come K -algebra.

09/11/2007
Diciottesima lezione

Dimostrazione. Dato $f \in S$, si può prendere la media³

$$\bar{f} := |G|^{-1} \sum_{g \in G} gf \in R;$$

la mappa $f \mapsto \bar{f}$ è una proiezione di S in R , dato che se $f \in R$, $\bar{f} = f$. Inoltre, è una mappa di R -moduli: se $p \in R$, $q \in S$, allora

$$\overline{pq} = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(pq) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} (gp)(gq) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} p(gq) = p\bar{q}.$$

Se si vuole mostrare che $R = (1, f_1, \dots, f_r)$ come K -algebra, basta mostrare che ogni elemento omogeneo di R è un elemento dell'algebra generata. Se il grado di f è 0, non c'è nulla da dimostrare perché tra i generatori c'è 1; se $\deg f > 0$, si può spezzare f come $s_1f_1 + \dots + s_rf_r$, con $s_i \in S$; poiché f e f_i sono omogenei di grado n e n_i rispettivamente, si può assumere anche che s_i sia omogeneo di grado $n - n_i < n$. Facendo la media della relazione $f = \sum s_i f_i$, si ottiene $f = \bar{f} = \bar{s}_1 f_1 + \dots + \bar{s}_r f_r$; ma il grado della media è minore o uguale del grado originale, cioè $\deg \bar{s}_i \leq \deg s_i < n$; per induzione, \bar{s}_i appartiene alla K -algebra generata da $(1, f_1, \dots, f_r)$, quindi anche f vi appartiene. \square

Lemma 3.4. Sia $l \in K[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio omogeneo di grado 1; se f è un altro polinomio tale che $l(a_1, \dots, a_n) = 0 \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) = 0$, allora $l \mid f$ in $K[x_1, \dots, x_n]$.

³Si assume che $\text{ch } K$ non divida l'ordine del gruppo; in realtà si applicherà questa teoria a \mathbb{R} , perciò si può assumere che $\text{ch } K = 0$.

Dimostrazione. Si suppone che x_n compaia in l e si considerano l e f come polinomi in x_n ; per la divisione euclidea, $f = ql + r$; se $r \neq 0$, $\deg_{x_n} r = 0$, cioè $r \in K[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Poiché $r \neq 0$, esiste (a_1, \dots, a_{n-1}) tale che $r(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0$; ora, $l(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) = \alpha x_n + \beta$ con $\alpha \neq 0$. Se si pone $a_n = -\beta/\alpha$, $l(a_1, \dots, a_n) = 0$, da cui $0 = f(a_1, \dots, a_n) = \underline{ql(a_1, \dots, a_n)} + r(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0$, assurdo. \square

Sia ora $W = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ un gruppo finito generato da riflessioni essenziale, cioè tale che $V \cong \mathbb{R}^n = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$; allora $S = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ e come prima si pongono: R la sottoalgebra degli invarianti, R^+ l'ideale dei polinomi invarianti senza termini noti, $I := R^+S$. Sicuramente esiste un invariante di grado 2, il prodotto scalare $(x, x) = \sum x_i^2$ (gli elementi di W sono in particolare matrici ortogonali, quindi preservano il prodotto scalare). Invece, non ci sono invarianti di primo grado: se φ fosse un invariante di primo grado, $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ sarebbe una mappa il cui nucleo sarebbe un iperpiano invariante per l'azione di W , ma questo non è possibile perché il gruppo è essenziale.

Lemma 3.5. *Siano $f_1, \dots, f_r \in R$ con $f_1 \notin (f_2, \dots, f_r)R$, $g_1, \dots, g_r \in S$ omogenei tali che $\sum g_i f_i = 0$, allora $g_1 \in I = R^+S$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, si prova che $f_1 \notin (f_2, \dots, f_r)S$: per assurdo, sia $f_1 = \sum_{i=2}^r s_i f_i$; allora facendo la media, $f_1 = \overline{f_1} = \sum_{i=2}^r f_i \overline{s_i} \in (f_2, \dots, f_r)R$, assurdo. Ora si procede per induzione sul grado di g_1 . Se $\deg g_1 = -\infty$, $g_1 = 0 \in I$; se $\deg g_1 = 0$, $g_1 = \lambda \neq 0$, perciò si ha $f_1 = -1/\lambda (\sum_{i=2}^r g_r f_r)$, assurdo. Sia ora $\deg g_i > 0$ e sia $\alpha \in \Phi$; $(s_\alpha g_i - g_i)|_{H_\alpha} = 0$ perché s_α non agisce su H_α ; allora se l è il polinomio di grado 1 che ha come luogo di zeri H_α , si ha $s_\alpha g_i - g_i = l h_i$ per il lemma. Si applica s_α alla relazione tra i g_i e gli f_i (notando che gli f_i sono invarianti per s_α): $0 = s_\alpha g_1 f_1 + \dots + s_\alpha g_r f_r$, da cui

$$0 = (s_\alpha g_1 - g_1) f_1 + \dots + (s_\alpha g_r - g_r) f_r = \sum (h_i f_1 + \dots + h_r f_r);$$

poiché il grado di h_1 è strettamente inferiore al grado di g_1 , per ipotesi induttiva $h_1 \in I$. Allora anche $s_\alpha g_1 - g_1 = l h_1 \in I$, cioè $s_\alpha g_1 \equiv g_1 \pmod{I}$. Per l'arbitrarietà di s_α , $w g_1 \equiv g_1 \pmod{I}$, per ogni $w \in W$. Si fa la media: $\overline{g_1} = |W|^{-1} \sum_{w \in W} w g_1 \equiv |W|^{-1} \sum_{w \in W} g_1 \equiv g_1 \pmod{I}$. Poiché g_1 è omogeneo, il grado di $\overline{g_1}$ è $-\infty$ (cioè $g_1 = 0 \in I$ e si è concluso) o $\deg g_1 > 0$; in questo caso, poiché $\overline{g_1}$ è anche invariante, $\overline{g_1} \in R^+ \subseteq I$; ma $\overline{g_1} \equiv g_1 \pmod{I}$, perciò anche $g_1 \in I$. \square

Proposizione 3.6 (Euler). *Se f è omogeneo, $\sum_{i=1}^n x_i \partial f / \partial x_i = (\deg f) f$.*

Teorema 3.7 (Chevalley). *Sia $R := S^W$, dove W è un gruppo finito generato da riflessioni, $S := S(V) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$; allora esistono f_1, \dots, f_n omogenei, W -invarianti, algebricamente indipendenti, tali che $R = \langle 1, f_1, \dots, f_n \rangle$ come \mathbb{R} -algebra, cioè $R \cong \mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]$ come \mathbb{R} -algebra, dove $n = \dim V$.*

Dimostrazione. Sia $I := R^+S$; sia $(f_1, \dots, f_r)S = I$ una scrittura minimale con f_i omogenei e $\deg f_i = d_i$. In particolare, $R = \langle 1, f_1, \dots, f_r \rangle$ come \mathbb{R} -algebra. Se gli f_i sono algebricamente indipendenti, allora $n = \text{trdeg } Q^{(R)}/\mathbb{R} = r$.

Per assurdo, sia h un polinomio non nullo in y_1, \dots, y_r tale che $h(f_1, \dots, f_r) = 0$. Se $y_1^{e_1} \dots y_r^{e_r}$ è un termine di h , allora calcolato in f_1, \dots, f_r

ha grado $d := \sum_{i=1}^r e_i d_i$ (rispetto alle x_i). Se si deriva $h(f_1, \dots, f_r)$ rispetto a x_k si ottiene 0, dato che $h(f_1, \dots, f_r) = 0$. Quindi

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k} h(f_1, \dots, f_r) = \sum_{i=1}^r h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k},$$

dove $h_i = \partial h / \partial y_i (f_1, \dots, f_r)$. Il grado di $\partial f_i / \partial x_k$ è $d_i - 1$; il grado di h_i è $d - d_i$; quello che importa però è che $\partial / \partial x_k h(f_1, \dots, f_r)$ è ancora omogeneo.

Gli h_i sono ancora invarianti, mentre $\partial f_i / \partial x_k$ non necessariamente lo è; si prende il minimo $m \leq r$ in modo che $(h_1, \dots, h_m)R = (h_1, \dots, h_r)R$, perciò $h_j = \sum_{i=1}^m g_{j,i} h_i$ per $m < j \leq r$; poiché h_j è omogeneo di grado $d - d_j$ e h_i di grado $d - d_i$, si può supporre (a meno di togliere componenti inutili) che $g_{j,i}$ sia omogeneo di grado $d_i - d_j$; inoltre $g_{j,i} \in R$ e si può sostituire l'espressione di h_j nella precedente: si ha $0 = \sum_{i=1}^m h_i p_i$, dove

$$p_i := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^r g_{j,i} \right).$$

A questo punto si può applicare il lemma: h_1 non è combinazione lineare di (h_2, \dots, h_m) per la minimalità di m ; dal lemma si ha che $p_1 \in I$.

Da questo fatto,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^r g_{j,1} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \sum_{t=1}^r f_t q_{t,k};$$

moltiplicando per x_k e sommando su k , si può applicare la formula di Euler, notando che $g_{j,i}$ non dipende da k :

$$d_1 f_1 + \sum_{j=m+1}^r g_{j,1} d_j f_j = \sum_{t=1}^r f_t c_t,$$

dove c_t ha grado maggiore di 0, mentre d_1 è un numero; allora si può ricavare f_1 , che quindi apparterrà all'ideale $(f_2, \dots, f_r)S$, assurdo. \square

Esempio 3.8. Si considera A_n , con il gruppo S_{n+1} sullo spazio vettoriale $V = \{(a_1, \dots, a_{n+1}) \mid \sum a_i = 0\}$ (se non si mette la condizione della somma, $x_1 + \dots + x_{n+1}$ sarebbe un polinomio invariante di primo grado). In questo caso allora $x_{n+1} = -(x_1 + \dots + x_n)$. Sia $f_i := x_1^{i+1} + \dots + x_{n+1}^{i+1}$; si dimostrerà un criterio che dice che f_1, \dots, f_n sono algebricamente indipendenti se e solo se il loro determinante jacobiano è non nullo. In questo caso, si trasforma la matrice jacobiana in modo da ottenere una matrice di Vandermonde:

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} &= \det \left((i+1)(x_j^i - x_{n+1}^i) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \\ &= (-1)^n \det \left((i+1)(x_j^i - x_{n+1}^i) \right)_{0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1} = \\ &= (-1)^n \det \left(i x_j^{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = (-1)^n (n+1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

Questi fattori sono tutti non nulli, quindi il determinante è non nullo.

Proposizione 3.9. *Siano $f_1, \dots, f_n \in K[x_1, \dots, x_n]$ polinomi e sia J la loro matrice jacobiana. Allora $\det J \neq 0$ se e solo se f_1, \dots, f_n sono algebricamente indipendenti.*

Dimostrazione.

(\Rightarrow) Se $\det J \neq 0$, si suppone per assurdo che f_1, \dots, f_n siano algebricamente dipendenti; allora esiste $h \neq 0$ in $K[y_1, \dots, y_n]$ tale che $h(f_1, \dots, f_n) = 0$; si può assumere che h abbia grado minimo tra i polinomi con tale proprietà. Si deriva h rispetto a x_k : posto $t_j := \partial h / \partial y_j(f_1, \dots, f_n)$, si ha

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k} h(f_1, \dots, f_n) = \sum_{j=1}^n t_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k}.$$

Di sicuro, esiste j_0 tale che $\partial h / \partial y_{j_0} \neq 0$, ma per la minimalità di h , anche $\partial h / \partial y_{j_0}(f_1, \dots, f_n) \neq 0$: si è trovato che $t_{j_0} \neq 0$. Ma allora il sistema $J(x_1, \dots, x_n)^t = 0$ ha una soluzione non banale, da cui $\det J = 0$, assurdo.

(\Leftarrow) Il grado di trascendenza di $K(x_1, \dots, x_n)/K$ è n , per cui x_i, f_1, \dots, f_n sono necessariamente algebricamente dipendenti. Allora esiste $h_i \neq 0$ in $K[y_0, \dots, y_n]$ tale che $h_i(x_i, f_1, \dots, f_n) = 0$ e ancora si può supporre la minimalità del grado di h_i . Sicuramente $\partial h_i / \partial y_0 \neq 0$ (altrimenti gli f_j sarebbero algebricamente dipendenti); in particolare $\deg_{y_0} h_i > 0$. Ripetendo il procedimento fatto prima, ponendo $t_{i,j} := \partial h_i / \partial y_j(x_1, f_1, \dots, f_n)$, si ha

$$0 \neq \frac{\partial}{\partial x_k} h_i(x_i, y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n t_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \frac{\partial h_i}{\partial y_0}(x_1, f_1, \dots, f_n) \delta_{i,k}.$$

Per quanto visto, $\partial h_i / \partial y_0(x_1, f_1, \dots, f_n) \neq 0$. Allora

$$(t_{i,j})_{i,j} J = \left(-\frac{\partial h_i}{\partial y_0}(x_i, f_1, \dots, f_n) \delta_{i,k} \right)_{i,k}$$

è una matrice diagonale con tutti gli elementi sulla diagonale diversi da zero, perciò $\det J \neq 0$. \square

Proposizione 3.10. *Se f_1, \dots, f_n e g_1, \dots, g_n sono invarianti elementari, di gradi rispettivamente d_i e e_i , allora a meno di permutazioni, $d_i = e_i$.*

Dimostrazione. L'algebra degli invarianti è $K[f_1, \dots, f_n] = K[g_1, \dots, g_n]$; in particolare, si può considerare la derivata di f_i rispetto a f_j (che sarà $\delta_{i,j}$). Però si può anche scrivere f_i come funzione polinomiale di g_1, \dots, g_n ; allora

$$\delta_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial f_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial f_j};$$

in particolare,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial g_k} \right)_{i,k} \left(\frac{\partial g_k}{\partial f_j} \right)_{k,j} = I.$$

Allora $\det (\partial f_i / \partial g_k)_{i,k} \neq 0$; a meno di permutare gli indici di g_1, \dots, g_n tramite $\pi \in S_n$, $\prod_{t=1}^n \partial f_i / \partial g_i \neq 0$ per ogni i , che significa che nella scrittura di f_i su

g_1, \dots, g_n si ha un termine $ag_1^{h_1} \dots g_n^{h_n}$, con $h_i > 0$. Poiché tutti i polinomi in gioco sono omogenei, $d_i = \sum_{k=1}^n h_k e_k \geq e_i$. Non si può fare lo stesso ragionamento al contrario, perché si è fissata una permutazione; tuttavia, il ragionamento al contrario si può fare per la relazione $\sum d_i \geq \sum e_i$, che non vede l'azione della permutazione; in definitiva, $d_i \geq e_i$ e $\sum e_i \geq \sum d_i$, da cui $e_i = d_i$. \square

Sia G un gruppo finito che agisce su uno spazio vettoriale E di dimensione finita.

Osservazione 3.11. La dimensione di E^G è uguale alla traccia di p , dove $p := |G|^{-1} \sum_{g \in G} g$ è la media delle azioni degli elementi del gruppo.

Dimostrazione. La mappa p è una proiezione da E in E^G :

- se $v \in E$, $hp(v) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} hg(v) = |G|^{-1} \sum_{g' \in G} g'(v) = p(v)$, perciò $\text{Im}(p) \subseteq E^G$;
- se $v \in E^G$, $p(v) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g(v) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} v = v$, cioè $p|_{E^G} = \text{Id}_{E^G}$.

Perciò, in una qualche base, $p = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, da cui la tesi. \square

Osservazione 3.12. Se $w \in G$ e G è un sottogruppo finito di $\text{GL}(V)$, allora w è diagonalizzabile e i suoi autovalori sono radici dell'unità.

Dimostrazione. Sia M_w la matrice dell'azione di w in forma di Jordan; un qualsiasi blocco di Jordan non banale ha ordine ∞ , perciò tutti i blocchi di Jordan devono essere di dimensione unitaria, cioè w è diagonalizzabile; poiché $M_w^k = I$, si ha la condizione sugli autovalori. \square

Osservazione 3.13. Sia λ un autovalore; allora $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$ è un autovalore, perché il polinomio caratteristico di M_w è in $\mathbb{R}[x]$.

Sia ora W un gruppo che agisce su $S(\check{V})$ (l'algebra dei polinomi su V). Per l'osservazione precedente, gli autovalori per l'azione su V e su \check{V} coincidono. Su \mathbb{C} , si decompone il polinomio caratteristico come $\det(I - tw) = (1 - tc_1) \dots (1 - tc_n)$. In $\mathbb{C}[[t]]$,

$$\frac{1}{\det(I - tw)} = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_n = k} c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} \right) t^k = \sum_{k \geq 0} a_k(w) t^k.$$

Osservazione 3.14. Vale $|W|^{-1} \sum_{w \in W} (\det(I - tw))^{-1} = \prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i})$, dove d_i sono i gradi degli invarianti elementari.

Dimostrazione. Sia $w \in W$; si estendono gli scalari da \mathbb{R} a \mathbb{C} , considerando una base (z_1, \dots, z_n) di $\check{V}_{\mathbb{C}}$ e la corrispondente base $(\check{z}_1, \dots, \check{z}_n)$ di $V_{\mathbb{C}}$. L'azione è data da $w\check{z}_i = c_i^{-1}\check{z}_i$, perciò presi e_i gradi qualsiasi, $z_1^{e_1} \dots z_n^{e_n}$ è un autovettore di autovalore $c_1^{e_1} \dots c_n^{e_n}$: i monomi sono tutti autovettori.

Se S è l'algebra simmetrica, S_k è generata dai monomi $z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ con $\sum k_i = k$ e $\text{Tr } w|_{S_k} = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} = a_k(w)$.

Ora, poiché w mantiene il grado,

$$\dim R_k = \dim S_k^w = \text{Tr} \left(|W|^{-1} \sum_{w \in W} w \right) = |W|^{-1} \sum_{w \in W} a_k(w).$$

Se $R = \mathbb{R}[f_1, \dots, f_n]$, con $\deg f_i =: d_i$, si cercano i monomi $f_1^{k_1} \dots f_n^{k_n}$ con $d_1 k_1 + \dots + d_n k_n = k$, che genereranno R_k . Per questi, vale la relazione $\prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i})^{-1} = \sum_{k \geq 0} \dim R_k t^k$; ma quest'ultimo, per quanto detto, è uguale a

$$\sum_{k \geq 0} \left(|W|^{-1} \sum_{w \in W} a_k(w) \right) t^k = |W|^{-1} \sum_{w \in W} (\det(I - tw))^{-1}. \quad \square$$

Osservazione 3.15. Se $w \in W$, $\det(I - tw) = (1 - t)^n$ se e solo se $w = \text{Id}$; $\det(I - tw) = (1 - t)^{n-1}(1 + t)$ se e solo se $w = s_\alpha$ con $\alpha \in \Phi^+$.

Osservazione 3.16. Posto $N := |\Phi^+| = 1/2 |\Phi|$, si ha $d_1 \dots d_n = |W|$ e $d_1 + \dots + d_n = n + N$.

Dimostrazione. Moltiplicando per $1 - t^n$ l'espressione

$$|W|^{-1} \sum_{w \in W} (\det(I - tw))^{-1} = \prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i}),$$

si ottiene

$$|W|^{-1} \left(1 + N \frac{1-t}{1+t} + (1-t^2)g(t) \right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{d_i-1}},$$

dove il primo termine tra parentesi viene dall'identità, il secondo dalle riflessioni e il terzo, con $g(t) \in \mathbb{R}[t]$ senza poli in $t = 1$, dal resto; sostituendo $t = 1$, si ottiene $|W|^{-1} = (\prod d_i)^{-1}$. Per l'altra espressione, si deriva rispetto a t e si valuta ancora in 1. \square

Esempio 3.17. Si considera il gruppo diedrale; ci sono due invarianti che soddisfano $d_1 d_2 = 2m$ e $d_1 + d_2 = 2 + m$; di conseguenza, $d_1 = 2$ e $d_2 = m$. L'invariante di grado 2 è $x^2 + y^2$; per l'altro, si considera la rotazione di $\vartheta := 2\pi/m$: su \mathbb{R} questa matrice non si diagonalizza, ma su \mathbb{C} è congruente a $\text{diag}(\xi, \xi^{-1})$ (sulla base $(\tilde{z}_1 := x + iy, \tilde{z}_2 := x - iy)$).

Un autovettore si ottiene moltiplicando tra loro i due elementi della base \tilde{z}_i , ottenendo $x^2 + y^2$, di autovalore 1. L'altro è dato da $\begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, corrispondente a $\tilde{z}_1^m + \tilde{z}_2^m \in \mathbb{R}[x, y]$. Per verificare che siano indipendenti, si può usare il criterio jacobiano su \mathbb{C} (il cui risultato sarà lo stesso che quello fatto su \mathbb{R}); il determinante jacobiano risulta $m(\tilde{z}_2^m - \tilde{z}_1^m) \neq 0$.

Teorema 3.18 (Shephard-Todd). *Siano V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione n , $G \leq \text{GL}(V)$ un gruppo finito e $S := S(\check{V}) \cong \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ l'algebra simmetrica. Se S è generata come \mathbb{R} -algebra da n polinomi omogenei algebricamente indipendenti, allora G è generato dalle simmetrie che contiene.*

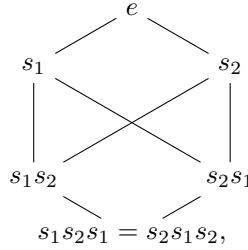
Dimostrazione. Sia H il sottogruppo generato dalle riflessioni di G ; per il teorema di Chevalley, $S^H = \langle 1, f_1, \dots, f_n \rangle$ come \mathbb{R} -algebra; allora $S^G = \langle 1, g_1, \dots, g_n \rangle \leq S^H$ e perciò $g_i = g_i(f_1, \dots, f_n)$. Siano $d_i := \deg f_i$ e $e_i := \deg g_i$; poiché g_i e f_i sono omogenei, si può assumere che $\sum k_j d_j = e_i$. Ora, $\partial g_i / \partial x_k = \sum_j \partial g_i / \partial f_j \partial f_j / \partial x_k$, cioè $J(g) = AJ(f)$; ma $\det J(g) \neq 0$ perché i g_i sono algebricamente indipendenti, quindi $\det A \neq 0$ e a meno di riordinare, si può supporre $\partial g_1 / \partial f_1 \dots \partial g_n / \partial f_n \neq 0$, da cui $e_i \geq d_i$.

Nell'osservazione 3.16, l'unica richiesta è che l'algebra sia generata da n polinomi algebricamente indipendenti, quindi si può applicare in questo caso: si ottiene che $\sum(d_i-1) = N = \sum(e_i-1)$, dove N è il numero di riflessioni in G (che è lo stesso del numero di riflessioni in H). Di conseguenza $\sum d_i = \sum e_i$, e poiché $e_i \geq d_i$, $e_i = d_i$. Ma per la stessa osservazione, $|H| = d_1 \cdots d_n = e_1 \cdots e_n = |G|$, da cui $H = G$. \square

3.2 Ordine di Bruhat

Esempio 3.19. Gli elementi di S_3 si possono ordinare come in figura 1, ponendo $w' \leq w$ se e solo se w' è una sottoparola di w .

Figura 1: Ordine di Bruhat per S_3 .



Definizione 3.20. Siano W un gruppo finito generato da riflessioni, S l'insieme delle riflessioni che contiene, T l'insieme delle riflessioni relative alle radici (positive). Se $w, w' \in W$, si scrive $w \rightarrow w'$ se esiste $t \in T$ tale che $w' = wt$ e $l(w') > l(w)$; si scrive $w < w'$ se esistono $w =: w_0, w_1, \dots, w_n := w'$ tali che $w_i \rightarrow w_{i+1}$ ($<$ è la chiusura transitiva di \rightarrow); si scrive $w \leq w'$ se $w < w'$ o $w = w'$. L'ordine di Bruhat è la relazione \leq .

Osservazione 3.21. La relazione \leq è un ordine.

Dimostrazione. La relazione è ovviamente riflessiva e transitiva; per l'antisimmetria, se $w' \leq w \leq w'$ e $w \neq w'$, allora $w' < w$, da cui $l(w') < l(w)$, ma questo va contro $w \leq w'$, assurdo. \square

Osservazione 3.22. La definizione è simmetrica rispetto a dove si moltiplica per t : sia \mapsto la relazione per cui $w \mapsto w'$ se e solo se $w' = tw$ e $l(w') > l(w)$; allora $w \mapsto w'$ implica $w \rightarrow w'$.

Dimostrazione. Se $t = s_\alpha$, $w' = s_\alpha w$; posto $t_\alpha := s_{w^{-1}(\alpha)}$, si ha

$$wt_\alpha = ww^{-1}s_\alpha w = s_\alpha w = w'.$$

Chiaramente, funziona la stessa dimostrazione anche al contrario. La simmetria risulta perché si richiede $t \in T$: se fosse $t \in S$, ciò non sarebbe più vero (e si otterrebbe quello che si chiama *ordine debole di Bruhat*). \square

Esercizio 3.23. Sono equivalenti $v < w$ e $v^{-1} < w^{-1}$.

Soluzione. Sia $v = v_0 \xrightarrow{t_0} v_1 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_{n-1}} v_n = v$ una successione che realizza $v < w$, cioè tale che $l(v_{i+1}) > l(v_i)$, $v_{i+1} = v_i t_i$ e $t_i \in T$; allora $v_{i+1}^{-1} = t_i^{-1} v_i^{-1}$, ma $t_i^{-1} \in T$ e si è dimostrato che non importa l'ordine con cui si moltiplica. Infine, è ovvio che $l(v_i) = l(v_i^{-1})$. \square

Esercizio 3.24. Per il gruppo diedrale $I_2(m)$, $v < w$ se e solo se $l(v) < l(w)$.

Soluzione. Sia $L_n := \{z \in W \mid l(z) = n\}$. Chiaramente, $L_0 = \{e\}$; per determinare un elemento di L_n basta scegliere la riflessione con cui inizia una sua scrittura ridotta (tra s_1 e s_2), dopo la quale devono necessariamente comparire le due riflessioni alternate. Quindi $|L_n| \leq 2$ (le due scritture potrebbero coincidere o avere lunghezza minore). Inoltre si vede facilmente che $|L_n| = 1$ per $n \in \{0, m\}$, $|L_n| = 2$ per $0 < n < m$ e $L_n = \emptyset$ per $n > m$. Infine, si dimostra che per ogni $w \in L_n$ e $w' \in L_{n+1}$, $w < w'$. \square

21/11/2007
Ventitreesima lezione

Lemma 3.25. *Siano $w \in W$, $s \in T$; allora $l(ws) > l(w)$ se e solo se $w(\alpha_s) > 0$, dove α_s è la radice (positiva) relativa alla simmetria s .*

Dimostrazione. Poiché $l(w) \neq l(ws)$ (hanno parità diversa), basta dimostrare solo una implicazione, l'altra sarà simmetrica per contrapposizione. Quindi si dimostra per induzione sulla lunghezza di w che $l(ws) > l(w)$ implica $w(\alpha_s) > 0$. Se $l(w) = 0$, $w = \text{Id}$ e $\alpha_s > 0$. Se la lunghezza di w è maggiore di 0 e $l(ws) > l(w)$, esiste $t \in S$ tale che $l(tw) = l(w) - 1$ (se $s_1 \dots s_r$ è una scrittura ridotta per w , basta prendere $t = s_1$). Per tw vale

$$l(tws) \geq l(ws) - 1 \geq l(w) - 1 = l(tw).$$

Quindi per ipotesi induttiva rispetto a tw , che ha lunghezza più piccola, $tw(\alpha_s) \geq 0$; se $w(\alpha_s) < 0$, $w(\alpha_s)$ deve essere $-\alpha_t$ (perché t trasforma la radice negativa $w(\alpha_s)$ in una radice positiva); allora si avrebbero le seguenti:

$$\begin{aligned} \alpha_t &= tw(\alpha_s), \\ t &= s_{tw(\alpha_s)} = tws(tw)^{-1}, \\ t &= twsw^{-1}t, \\ ws &= tw; \end{aligned}$$

in particolare, $l(w) < l(ws) = l(tw) < l(w)$, assurdo. \square

Teorema 3.26 (condizione forte di scambio). *Siano $w = s_1 \dots s_r$ con $s_i \in S$ e $t \in T$ tale che $l(wt) < l(w)$; allora esiste i per cui $wt = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_r$; inoltre, se la scrittura iniziale è ridotta, i è unico.*

Dimostrazione. Sia $t = s_\alpha$, con $\alpha > 0$; per il lemma precedente, $l(wt) < l(w)$ implica $w(\alpha) < 0$. Si pone $\alpha_i := s_{i+1} \dots s_r(\alpha)$; ora, $\alpha > 0$, mentre $\alpha_0 < 0$, per cui esiste $i \leq r$ tale che $\alpha_i > 0$ e $\alpha_{i-1} < 0$; s_i fa diventare negativa la radice positiva α_i , perciò $s_i = s_{\alpha_i}$. Coniugando,

$$s_{i+1} \dots s_r t s_r \dots s_{i+1} = s_{s_{i+1} \dots s_r(\alpha)} = s_i;$$

allora $s_{i+1} \dots s_r t = s_i s_{i+1} \dots s_r$ e

$$w = s_1 \dots s_{i-1} s_i \dots s_r = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_r t,$$

da cui $s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r = wt$.

Se la scrittura iniziale è ridotta, e per assurdo ci fossero due indici $i < j$ tali che $s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r = wt = s_1 \cdots \hat{s}_j \cdots s_r$, semplificando i tratti comuni si ottiene $s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$; spostando s_i , $s_i \cdots s_j = s_{i+1} \cdots s_j$, ma questo contraddirebbe la minimalità della stringa iniziale. \square

Lemma 3.27. *Siano $w' \leq w$ (per l'ordine di Bruhat) e $s \in S$; allora si verifica almeno una tra $w's \leq w$ o $w's \leq ws$.*

Dimostrazione. Se $w' \leq w$, con $w' = w_0 \rightarrow \cdots \rightarrow w_n = w$, si dimostra per induzione che $w_0s \leq w_n$ o $w_0s \leq w_ns$.

Il passo base è il seguente: se $w' \rightarrow w$, vale almeno una tra $w's \leq w$ o $w's \leq ws$. Si suppone $w = w't$, con $t \in T$, e $l(w) > l(w')$; se $s = t$, allora $ws = w'$, da cui $ws \leq w'$. Se $s \neq t$, si hanno due casi:

1. $l(w's) = l(w') - 1$, che implica $w's \rightarrow w' \rightarrow w$ e si è finito;
2. $l(w's) = l(w') + 1$; in questo caso, si dimostra che $w's < ws$: $sts \in T$ (è il coniugato di una simmetria) e $(w's)sts = w'ts = ws$; allora $w's \rightarrow ws$ se e solo se $l(w's) < l(ws)$; per assurdo, si suppone $l(w's) > l(ws)$ e si prende una scrittura ridotta $w' = s_1 \cdots s_r$; allora $w's = s_1 \cdots s_r s$ e questa è ancora ridotta perché $l(w's) = l(w') + 1$; poiché si è supposto $l(w's) < l(ws)$, da $ws = (w's)(sts)$ si ottiene $l(w's(sts)) < l(w's)$; per la condizione forte di scambio applicata a $w's$, esiste i tale che $w's(sts) = ws = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r s$ (non è possibile togliere s , altrimenti $ws = w' = wt$ e $t = s$); allora $l(w) < l(w')$, assurdo.

Supponendo ora che $w_i s \leq ws$ o $w_i s \leq w$, si considera w_{i-1} : per il passo base, si hanno due casi; nel primo, $w_{i-1}s \leq w_i \leq w$, nel secondo $w_{i-1}s \leq w_i s$ che a sua volta, per ipotesi induttiva, è minore o uguale a ws o a w . \square

Definizione 3.28. Se $w := s_1 \cdots s_r$ è una scrittura ridotta, allora $s_{i_1} \cdots s_{i_q}$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq r$ si dice *sottoparola* di w .

Teorema 3.29. *Sia $w := s_1 \cdots s_r$ una scrittura ridotta; allora $w' \leq w$ se e solo se w' è una sottoparola di w .*

Dimostrazione.

(\Rightarrow) Se $w' \rightarrow w$, $w = w't$ e $l(w') < l(w)$; scrivendo $wt = w'$, per la condizione forte di scambio, $w' = wt = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r$ è una sottoparola di w . Se $w' := w_0 \rightarrow \cdots \rightarrow w_n := w$, si applica la condizione forte di scambio ripetutamente, togliendo una simmetria per volta.

(\Leftarrow) Sia $w := s_{i_1} \cdots s_{i_q}$; si dimostra che $w' \leq w$ per induzione su r : se $r = 0$, $w = e$, $w' = e$ e in particolare $w' \leq w$; se $r \geq 1$, si distinguono due casi: se $i_q < r$, w' è una sottoparola di $s_1 \cdots s_{r-1}$ e per ipotesi induttiva $w' \leq s_1 \cdots s_{r-1} < w$; se $i_q = r$, $w's_r = s_{i_1} \cdots s_{i_{q-1}}$ è sottoparola di $s_1 \cdots s_{r-1}$, quindi per ipotesi induttiva $w's_r \leq ws_r$, cioè $s_{i_1} \cdots s_{i_{q-1}} \leq s_1 \cdots s_{r-1}$; ma allora per il lemma, $s_{i_1} \cdots s_{i_{q-1}} s_{i_q}$ è minore o uguale di $s_1 \cdots s_{r-1}$ o di $s_1 \cdots s_{r-1} s_r$, cioè $w' \leq w$ o $w' \leq ws_r \leq w$. \square

Definizione 3.30. Si dice che w' è *adiacente* a w se $w' < w$ e $w' \leq \eta \leq w$ implica $\eta \in \{w', w\}$. In questo caso, si scrive $w' \triangleleft w$.

23/11/2007

Ventiquattresima lezione

Osservazione 3.31. Sia $I \subseteq S$ e W_I un sottogruppo parabolico di W ; allora si può definire un ordine di Bruhat \leq_I su W_I , che sarà uguale alla restrizione dell'ordine di Bruhat \leq su W .

Dimostrazione. Se $w', w \in W_I$, si può prendere una scrittura ridotta $s_1 \cdots s_r$ di w con simmetrie $s_i \in I$; allora $w' \leq w$ se e solo se w' è una sottoparola di w se e solo se $w' \leq_I w$. \square

Lemma 3.32. *Sia $w' < w$, con $l(w) = l(w') + 1$; se $s \in S$ è tale che $w' < w's \neq w$, allora $w < ws$ e $w's < ws$.*

Dimostrazione. Per il lemma 3.27, $w's \leq w$ o $w's \leq ws$. Non può verificarsi la prima: $l(w's) = l(w') + 1$ (non può essere $l(w') - 1$ perché $w' < w's$) cioè $l(w's) = l(w)$; allora l'unica possibilità è che $w's = w$, ma questo è escluso per ipotesi. Allora deve verificarsi la seconda possibilità, cioè $w's \leq ws$; si può omettere l'uguaglianza perché $l(w's)$ e $l(ws)$ hanno parità diverse.

Si è dimostrata la seconda relazione, cioè che $w's < ws$. Per la prima, poiché da w a ws si moltiplica per una simmetria semplice, per mostrare che $w < ws$ è sufficiente dimostrare che $l(w) < l(ws)$; in effetti, $l(w) = l(w') + 1 = l(w's) < l(ws)$. \square

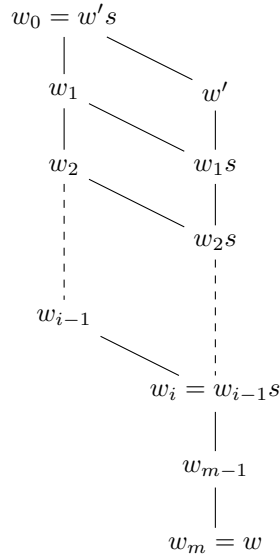
Esempio 3.33. Si descrive l'ordine di Bruhat per S_n , in due modi. Nel primo modo, $\sigma \leq \tau$ se si ottiene τ a partire da σ mediante composizione con trasposizioni (h, k) dove $h < k$ e $\sigma(h) < \sigma(k)$. Nel secondo modo, si indica con $[a_1, \dots, a_k]$ la lista $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ ordinata in modo crescente e per le liste di interi si pone $(a_1, \dots, a_k) \leq (b_1, \dots, b_k)$ se e solo se $a_i \leq b_i$ per ogni i ; allora $\sigma \leq \tau$ se e solo se $[\sigma(1), \dots, \sigma(k)] \leq [\tau(1), \dots, \tau(k)]$ per ogni $k \leq n$.

Proposizione 3.34. *Sia $w' < w$; allora esiste una catena $w' = w_0 < \dots < w_m = w$ con $l(w_{i+1}) = l(w_i) + 1$.*

Dimostrazione. Per induzione su $k := l(w) + l(w')$ (si veda figura 2). Se $k = 1$, l'unica possibilità è $w' = \text{Id}$ e $w = s \in S$ e la catena è data da $1 < s$. Se l'asserto vale per ogni numero minore di k e $l(w) + l(w') = k > 1$, allora $w \neq 1$; si prende una scrittura ridotta $s_1 \cdots s_r$ per w ; per brevità, si pone $s := s_r$. Allora $ws < w$ e w' è una sottoparola di w , cioè $w' = s_{i_1} \cdots s_{i_q}$; a questo punto si hanno due casi, dato che w' e $w's$ differiscono per una simmetria, per cui sono sempre comparabili.

1. Nel primo caso, si ha $w' < w's$; se $i_q = r$, $w's$ è una sottoparola di ws , perciò si ha $w' < w's \leq ws < w$; considerando $w' < ws$, per induzione esiste la catena $w' = w_0 < \dots < w_m = w_s$ e aggiungendo $w_{m+1} = w$ si conclude. Se $i_q \neq r$, w' è una sottoparola di ws , da cui $w' \leq ws < w$; si conclude con lo stesso ragionamento di prima.
2. Nel secondo caso, $w' > w's$, e si considera $w's < w' < w$: la somma delle lunghezze degli estremi è minore di k , perciò per induzione si ha $w's = w_0 < \dots < w_m = w$. Ora, $w_0s = w' > w's = w_0$, mentre $w_ms = ws < w$; esiste quindi un i minimo tale che $w_i > w_i s$. Si dimostra che $w_{i-1}s = w_i$: $w_{i-1} < w_{i-1}s$ per la scelta di i ; se per assurdo $w_{i-1} < w_{i-1}s \neq w_i$ per il lemma 3.32, $w_i < w_i s$, assurdo. Ora si deve dimostrare che $w_j \neq w_{j-1}s$ per $j < i$: infatti, $w_j = w_{j-1}s$ implica $w_j > w_{j-1} = w_j s$, impossibile per la minimalità di i . Applicando ancora il lemma 3.32, si ottiene che $w_{j-1}s <$

Figura 2: Dimostrazione del teorema 3.34.



$w_j s$. Se ora si prende una scrittura ridotta $s_{t_1} \cdots s_{t_p}$ di w_j , sicuramente $s_{t_p} \neq s$; di conseguenza, dato che w_{j-1} è una sottoparola di w_j , $w_{j-1}s$ è una sottoparola di $w_j s$ e $l(w_{j-1}s) = l(w_j s) - 1$. Allora la successione cercata è

$$w' \triangleleft w_1 s \triangleleft \cdots \triangleleft w_{i-1} s = w_i \triangleleft w_{i+1} \triangleleft \cdots \triangleleft w_m = w. \quad \square$$

Corollario 3.35. Se $w' =: w_0 < \cdots < w_m =: w$ è una catena massimale con $w_i \triangleleft w_{i+1}$, allora $m = l(w) - l(w')$.

4 Varietà delle bandiere

Definizione 4.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su \mathbb{C} ; una *bandiera* in V è una successione di sottospazi $0 =: V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r := V$; una bandiera è *completa* se $\dim V_h = h$ per ogni h . Lo spazio delle bandiere complete in V si indica con \mathcal{F} . Fissata una base (e_1, \dots, e_n) di V , la bandiera standard è $0 \subsetneq \langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Osservazione 4.2. Il gruppo $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n)$ agisce su \mathcal{F} : se $g \in G$, $g(V_i)_i := (gV_i)_i$.

Dimostrazione. Poiché g è non singolare, preserva l'inclusione stretta e la dimensione di ogni sottospazio. \square

Osservazione 4.3. Fissata una base (e_1, \dots, e_n) , si ha una biiezione naturale tra \mathcal{F} e G/B , dove B è il *gruppo di Borel*, cioè il gruppo delle matrici triangolari superiori invertibili.

30/11/2007
Ventiseiesima lezione

Dimostrazione. Presa una bandiera $F = (0, \langle v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \dots, \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V)$, si considera la mappa $g: V \rightarrow V$ con $g(e_i) = v_i$; chiaramente, $g \in \text{GL}(n)$; se F_0 è la bandiera standard rispetto a (e_1, \dots, e_n) , $gF_0 = F$. Si è dimostrato che l'orbita di F_0 è \mathcal{F} , cioè l'azione è transitiva. Viceversa, lo stabilizzatore di F_0 è dato dai $g \in \text{GL}(n)$ tali che $g \langle e_1, \dots, e_h \rangle = \langle e_1, \dots, e_h \rangle$ per ogni h ; questa condizione è chiaramente equivalente a richiedere che g sia triangolare superiore: $\text{Stab}_G(F_0) = B$. A questo punto, l'identificazione tra G/B e \mathcal{F} è data da $gB \mapsto gF_0$. \square

Si vuole mettere una topologia su \mathcal{F} , in modo che l'azione di G sia continua. Per fare questo, si considera prima la topologia euclidea su G , data da

$$\|g\| := \left(\sum |g_{i,j}| \right)^{1/2};$$

data una topologia su G , si può mettere sul quoziente G/B la topologia quoziente, la più fine che rende continua la naturale mappa di proiezione π . Allora su \mathcal{F} si mette la topologia indotta dalla bièzione $G/B \rightarrow \mathcal{F}$. In questo modo l'azione di G su \mathcal{F} è continua. In particolare, \mathcal{F} è omogeneo, dato che l'azione è transitiva.

Esempio 4.4. Sia $n = 2$; fissata una base, $V \cong \mathbb{C}^2$; allora $\mathcal{F}_2 := \mathcal{F} \cong \text{GL}(2)/B$ classifica i sottospazi di dimensione 1 di uno spazio vettoriale di dimensione 2: è $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Si osservano due cose: \mathcal{F}_2 è compatto e si decompone come complesso cellulare in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ($V = \mathbb{C}^2$ corrisponde a A_1 , il cui ordine di Bruhat è dato da $e < s$; e corrisponde a $\{\infty\}$, mentre s corrisponde a \mathbb{C}). Si vedrà come dimostrare proprietà analoghe in generale.

Osservazione 4.5. Se $\dim V = n$, $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}$ è compatto.

Dimostrazione. Si considerano il gruppo delle matrici unitarie $U(n) := \{a \in \text{GL}(n) \mid aa^h = I\} \subseteq \text{GL}(n)$ e (\bullet, \bullet) il prodotto scalare standard. Innanzitutto, $U(n)$ è compatto: se $a \in U(n)$, $aa^h = I$, da cui (chiamando con v_i le righe di a) $\delta_{i,j} = (v_i, \overline{v_j}) = \sum |v_{i,k} \overline{v_{j,k}}|$; allora i vettori sono limitati e le condizione sono chiuse, perciò $U(n)$ è compatto.

Sia $F := (0, \langle v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \dots, \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V)$; a meno di ortonormalizzare, F è la bandiera standard rispetto a una base ortonormale (u_1, \dots, u_n) . Sia $\overline{\pi} := \pi|_{U(n)}$; chiaramente, $\overline{\pi}$ è continua; è anche suriettiva: per quanto detto, una qualsiasi bandiera F è standard rispetto a una base ortonormale (u_1, \dots, u_n) , da cui $F = aF_0$, dove le colonne di a sono le u_i , cioè $a \in U(n)$. Ma allora \mathcal{F} è l'immagine tramite una mappa continua dello spazio compatto $U(n)$, perciò è compatto. \square

04/12/2007
Ventisettesima lezione

D'ora in poi, si indicheranno con F_0, \dots, F_n i sottospazi della bandiera $F \in \mathcal{F}$; data una base (e_1, \dots, e_n) di V , si indicherà con E la corrispondente bandiera standard.

Definizione 4.6. Una base per una bandiera F è una base (v_1, \dots, v_n) di V tale che $F_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$.

Osservazione 4.7. Data una bandiera $F \in \mathcal{F}$ su V e fissata una base (e_1, \dots, e_n) , esiste una base (v_1, \dots, v_n) di F tale che, se $\sigma_h := \min\{t \mid v_h \in E_t\}$, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \{1, \dots, n\}$, cioè σ è una permutazione. Una tale base si dice *ammissibile*.

Dimostrazione. Sia (u_1, \dots, u_n) una base qualunque per F ; se la σ corrispondente è una permutazione si è già concluso; altrimenti, ci sono dei t per cui esistono $h < k$ con $\sigma_h = \sigma_k = t$; sia t massimale tra i numeri con questa proprietà. Allora, u_h e u_k stanno in E_t ma non in E_{t-1} , cioè hanno tutte le coordinate dopo la t -esima nulle, ma la t -esima è non nulla. Allora esistono λ e μ entrambi non nulli tali che $(\lambda u_h + \mu u_k, e_t) = 0$. Si considerano allora i vettori $(u_1, u_2, \dots, u_h, \dots, u_{k-1}, \lambda u_h + \mu u_k, \dots, u_n)$: questa è ancora una base per F : fino all'indice $k-1$ non cambia nulla; all'indice k , $u_k = 1/\mu(u'_k - \lambda u_h) \in \langle u_1, \dots, u_{k-1}, u'_k \rangle$, per cui $\langle u_1, \dots, u_{k-1}, u'_k \rangle = F_k$; ancora, per gli indici maggiori di k non si hanno problemi. Si è trovata una base che diminuisce il numero di indici j con $\sigma_j = t$, e questo procedimento si può iterare fino a che ci sono almeno due indici siffatti. Inoltre, si può iterare sui t che danno problemi, fino a trovare una base che soddisfa le richieste. \square

Osservazione 4.8. Data una bandiera F e una sua base ammissibile (v_1, \dots, v_n) , si definisce σ come la permutazione $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, che a priori dipende dalla base ammissibile scelta.

Definizione 4.9. Il tipo di una bandiera $F \in \mathcal{F}$ è la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ con $a_{i,j} := \dim F_i \cap E_j$.

Osservazione 4.10. Il tipo è un B -invariante.

Dimostrazione. Siano $F \in \mathcal{F}$ e $b \in B$; allora bF è la bandiera $0 = bF_0 \subsetneq bF_1 \subsetneq \dots \subsetneq bF_n = V$; dato che B è costituito dalle matrici triangolari superiori rispetto alla base (e_1, \dots, e_n) ,

$$a_{i,j}(bF) = \dim bF_i \cap E_j = \dim F_i \cap b^{-1}E_j = \dim F_i \cap E_j = a_{i,j}(F). \quad \square$$

Lemma 4.11. Se (v_1, \dots, v_n) è una base ammissibile per $F \in \mathcal{F}$, $a_{i,j}(F) = |\{l \leq i \mid \sigma_F(l) < j\}|$ (equivalentemente, è il numero di 1 tra le prime i colonne e j righe della matrice di permutazione associata a σ).

Dimostrazione. Si indica il secondo membro con $b_{i,j}(F)$; allora

$$b_{i,j}(F) = |\{v_l \mid v_l \in F_i, v_l \in E_j\}| = |\{v_l \mid v_l \in F_i \cap E_j\}| \leq a_{i,j}(F),$$

dato che i v_j sono linearmente indipendenti.

Viceversa, $v \in F_i \cap E_j$ se e solo se $v = \sum_{h=1}^i a_h v_h$ e $(v, e_t) = 0$ per ogni $t > j$. Sia ora h_0 un indice tale che $a_{h_0} \neq 0$ e $\sigma(h_0)$ è massimale in $\{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}$; h_0 è unico perché σ è una permutazione. Allora

$$(v, e_{\sigma(h_0)}) = \left(\sum_{h=1}^i a_h v_h, e_{\sigma(h_0)} \right) = (a_{h_0} v_{h_0}, e_{\sigma(h_0)}),$$

per la massimalità di h_0 . Questa quantità è non nulla perché $a_{h_0} \neq 0$ e v_{h_0} ha coordinata $(\sigma(h_0))$ -esima non nulla per definizione. Quindi $\sigma(h_0) \leq j$ e di conseguenza $v_{h_0} \in E_j$. Questo conclude la dimostrazione, perché $v \in F_i \cap E_j$ implica $v \in \langle v_l \mid l \leq i, \sigma(l) \leq j \rangle$ cioè $\dim F_i \cap E_j \leq b_{i,j}(F)$. \square

Esempio 4.12. Siano $v_1 := (0, 1)^t$, $v_2 := (1, 1)^t$, allora $(a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; la permutazione σ corrispondente alla base (v_1, v_2) è $(1, 2)$.

Il tipo di una bandiera è intrinseco, non dipende dalla scelta di una base; invece, la permutazione a priori dipende dalla base ammissibile scelta. Il lemma permette di ricavare il tipo a partire dalla permutazione associata a una qualsiasi base ammissibile. Se si trovasse una relazione che permette di ricavare la permutazione dal tipo, si dimostrerebbe che la permutazione non dipende dalla scelta base ammissibile.

05/12/2007
Ventottesima lezione

Osservazione 4.13. Se $\sigma \neq \tau$, $a_{i,j}(\sigma) \neq a_{i,j}(\tau)$ per qualche (i, j) .

Dimostrazione. Sia i il minimo indice per cui $\sigma(i) \neq \tau(i)$; a meno di scambiare σ e τ , si può supporre $\sigma(i) < \tau(i)$; allora $a_{i,\sigma(i)}(\sigma) = a_{i,\sigma(i)}(\tau) + 1$. \square

Corollario 4.14. La permutazione σ relativa alla bandiera F con la base ammissibile (v_1, \dots, v_n) non dipende dalla base ammissibile scelta ma solo da F ; σ è detta permutazione di F .

Dimostrazione. Per il lemma 4.11 si può ricavare il tipo dalla permutazione; per l'osservazione appena vista, la funzione che associa a una permutazione il tipo è iniettiva e in particolare può essere invertita. \square

Osservazione 4.15. Si può realizzare S_n dentro G associando a una permutazione σ la corrispondente matrice di permutazione (si indicherà la bandiera σE con E_σ). Si ha $\sigma_{E_\sigma} = \sigma$, dove σ_F indica la permutazione della bandiera F .

Dimostrazione. Sia $v_i := e_{\sigma(i)}$; allora E_σ è la bandiera standard rispetto alla base (v_1, \dots, v_n) ; in particolare, questa è una base ammissibile per E_σ ; poiché $v_i \in E_{\sigma(i)} \setminus E_{\sigma(i)-1}$, $\sigma_{E_\sigma} = \sigma$. \square

Se $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow S_n$ è la mappa che associa alla bandiera F la sua permutazione σ_F , si indicherà con Y_σ la preimmagine di σ mediante φ .

Esempio 4.16. Si considera $n = 2$; se F è la bandiera associata alla base ammissibile (v_1, v_2) e σ_F è l'identità, allora $v_1 \in E_1 = \langle e_1 \rangle$, cioè $v_{1,2} = 0$. Poiché (v_1, v_2) è una base, $v_{1,1}$ e $v_{2,2}$ sono non nulli e di conseguenza $F = E$.

Se $\sigma_F = (1, 2)$ e (v_1, v_2) è una base ammissibile per F , allora $v_1 \in E_2 \setminus E_1$, cioè $v_{1,2} \neq 0$; d'altra parte, $v_2 \in E_1$, da cui $v_{2,2} = 0$. Quindi F è uguale alla bandiera relativa alla base $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si è già visto che per $n = 2$, $\mathcal{F} = \mathbb{P}^1$. Ora si è visto che c'è un'unica bandiera con permutazione banale, cioè $Y_{\text{Id}} = \{E\}$, che corrisponde al punto ∞ ; inoltre Y_{Id} è una B -orbita (infatti, $bI = b$, che è ancora una matrice relativa alla bandiera E). Invece, le bandiere di $Y_{(1,2)}$ sono tutte quelle del tipo $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, che sono tutte distinte e corrispondono ai punti della retta affine in \mathbb{P}^1 ; anche questa è una B -orbita.

Proposizione 4.17.

1. $\mathcal{F} = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} Y_\sigma$ (le Y_σ si dicono celle di Schubert);
2. $E_\sigma \in Y_\sigma \neq \emptyset$ per ogni $\sigma \in S_n$;
3. Y_σ è B -stabile;
4. $Y_\sigma = BE_\sigma$, (in particolare, Y_σ è una B -orbita).

Dimostrazione.

1. Ovvio perché $F \in Y_{\sigma(F)}$.
2. Ancora ovvio perché $\sigma(E_{\sigma}) = \sigma$, quindi le celle sono non vuote.
3. Siano $F \in Y_{\sigma}$ e $b \in B$; i tipi di F e di bF coincidono, dato che è il tipo è un B -invariante; ma avere lo stesso tipo implica avere la stessa permutazione, cioè $bF \in Y_{\sigma}$.
4. Siano $F \in Y_{\sigma}$ e (v_1, \dots, v_n) una sua base ammissibile; allora $v_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,\sigma(i)}, 0, \dots, 0)$, con $v_{i,\sigma(i)} \neq 0$. Sia b la matrice che ha per colonna j -esima $v_{\sigma^{-1}(j)}$ (in questo modo, b è non singolare e appartiene a B). Allora bE_{σ} è la bandiera relativa a $(be_{\sigma(1)}, \dots, be_{\sigma(n)})$, ma $be_{\sigma(i)} = v_{\sigma^{-1}(\sigma(i))} = v_i$, quindi $bE_{\sigma} = F$. Questo dimostra che $Y_{\sigma} \subseteq BE_{\sigma}$; l'altra inclusione è vera poiché Y_{σ} è B -stabile. \square

Osservazione 4.18. Esiste h tale che $Y_{\sigma} \cong \mathbb{C}^h$ (in particolare, il nome “celle” è giustificato).

07/12/2007
 Ventinovesima lezione

Dimostrazione. Si denota con $\overline{Y_{\sigma}} \subseteq G$ l'insieme delle matrici di colonne v_i, \dots, v_n con

$$v_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{se } j > \sigma(i) \text{ o se esiste } i' < i \text{ con } j = \sigma(i') \\ c \in \mathbb{C} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi una matrice di $\overline{Y_{\sigma}}$ è composta da 1 dove la matrice di permutazione corrispondente a σ ha degli 1, 0 in ogni posizione che ha a sinistra o sopra un 1 e un numero complesso qualsiasi altrimenti; per esempio, se $n := 5$ e $\sigma := (1, 3)(2, 5)$, $\overline{Y_{\sigma}}$ è costituito dalle matrici del tipo:

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & e & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, $\overline{Y_{\sigma}} \subseteq G$, perché i vettori sono sicuramente tutti linearmente indipendenti. Inoltre, se si dimostra che la mappa $\overline{Y_{\sigma}} \rightarrow G: g \mapsto gE$; è un omeomorfismo su Y_{σ} , si è concluso.

Innanzitutto, per come è fatta $g \in \overline{Y_{\sigma}}$, $gE \in Y_{\sigma}$. Ora si dimostra che se $F \in Y_{\sigma}$, esiste unico $g \in \overline{Y_{\sigma}}$ tale che $gE = F$: sia (v_1, \dots, v_n) una base ammissibile per F ; allora la matrice con colonne i v_i soddisfa la condizione di avere un numero non nullo dove la matrice di permutazione di σ ha 1 e di avere sotto questi numeri 0; a meno di riscalare, i numeri non nulli possono essere fatti diventare 1; per soddisfare anche la condizione di avere 0 a destra, si può sostituire un vettore che non soddisfa la condizione con una combinazione lineare dello stesso vettore e di quello corrispondente a destra.

Rimane da dimostrare l'unicità di g : l'unica scelta per il primo vettore è λv_1 , dato che deve generare la stessa retta di v_1 ; ma si deve scegliere $\lambda = 1$ perché altrimenti non sarebbe più soddisfatta la condizione degli 1. Ora, se fino a v_h la scelta è unica, al posto di v_{h+1} si può mettere una combinazione lineare $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_h v_h + \lambda_{h+1} v_{h+1}$; tutti gli indici j con $\sigma(j) > \sigma(h+1)$ non

possono comparire, altrimenti rovinerebbero la condizione di avere 0 sotto l'1 nella colonna $h + 1$ (si comincia da quello più grande che chiaramente non può comparire, e si prosegue induttivamente); ora, l'unico addendo della combinazione lineare che influenza la riga $\sigma(h+1)$ è $\lambda_{h+1}v_{h+1}$, da cui $\lambda_{h+1} = 1$; infine, non possono esserci nemmeno gli indici j con $\sigma(j) < \sigma(h + 1)$, altrimenti non sarebbe soddisfatta la condizione di avere 0 a destra (sempre a partire da quello con $\sigma(j)$ maggiore e risalendo). Per induzione, si ha l'unicità. La continuità è ovvia per costruzione. \square

Esempio 4.19. Per $n = 2$, $\overline{Y_{\text{Id}}} = \{I\}$, mentre $\overline{Y_{(1,2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Si osserva anche che l'unico punto di Y_{Id} è limite di una successione di punti in $Y_{(1,2)}$, cioè $Y_{\text{Id}} \subseteq X_{(1,2)}$, dove con X_σ si denota la chiusura di Y_σ (X_σ è detta *varietà di Schubert*). Infatti, $E = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ con $F(z) \in Y_{(1,2)}$: a meno di confondere una bandiera con la matrice associata, basta prendere $F(z) := \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ per $z \neq 0$; $F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/z & 1 \end{pmatrix}$, dato che il primo vettore è un multiplo del primo vettore di $F(z)$ e la matrice è invertibile; il limite per $z \rightarrow \infty$ è la matrice identità, cioè la bandiera E . Si vedrà che $Y_{\text{Id}} \subseteq Y_\sigma$ è una conseguenza della relazione $\text{Id} \leq \sigma$ nell'ordine di Bruhat.

Proposizione 4.20. *Se $\sigma < \tau$ nell'ordine di Bruhat, $Y_\sigma \subseteq X_\tau$*

Dimostrazione. Innanzitutto, si può supporre $\sigma \triangleleft \tau$, dato che se $\sigma < \tau$, esiste una successione di elementi adiacenti $\sigma =: \sigma_0 \triangleleft \sigma_1 \triangleleft \dots \triangleleft \sigma_{n-1} \triangleleft \sigma_n := \tau$ e se $Y_{\sigma_i} \subseteq X_{\sigma_{i+1}}$, vale anche $X_{\sigma_i} \subseteq X_{\sigma_{i+1}}$. Per l'ordine di Bruhat su S_n , $\sigma \triangleleft \sigma(h, k)$ se $h < k$ e $\sigma(h) < \sigma(k)$; si suppone allora $\tau = \sigma(h, k)$.

Si dimostra che esiste una famiglia continua $F(z) \in Y_\tau$, con $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = E_\sigma$; questo è sufficiente, perché un elemento qualsiasi di Y_σ è del tipo bE_σ con $b \in B$: allora $bE_\sigma = \lim_{z \rightarrow \infty} bF(z)$, e $bF(z)$ appartiene ancora a Y_τ . La successione si scrive esplicitamente: per costruire $F(z)$ si parte da E_τ (la matrice di permutazione corrispondente a τ) e si sostituisce al minore $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ottenuto dalle righe $\sigma(k)$ e $\sigma(h)$ e dalle colonne h e k il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/z & 1 \end{pmatrix}$. La matrice ottenuta è ancora in Y_τ e mandando z a ∞ si ottiene E_σ . \square

Osservazione 4.21. La cella Y_σ ha dimensione $l(\sigma)$.

Dimostrazione. Sia w_0 la permutazione data da $w_0(i) := n + 1 - i$; $w_0 \in W := S_n$; il gruppo S_n corrisponde al sistema A_{n-1} , le cui radici sono $\{\alpha_{i,j} := e_i - e_j \mid i \neq j\} \subseteq \mathbb{R}^n$; in questa corrispondenza, w_0 è l'elemento più lungo: infatti, se $\alpha_{i,j} \in \Phi^+$ (cioè se $i < j$), $w_0(\alpha_{i,j}) = e_{w_0(i)} - e_{w_0(j)} \notin \Phi^+$, perché $i < j \Rightarrow w_0(i) > w_0(j)$; quindi $l(w_0) = |\Phi^+| = 1/2 n(n - 1)$.

Ponendo per brevità $n_\sigma := \dim Y_\sigma$, $n_{w_0} = 1/2 n(n - 1) = l(w_0)$: infatti la matrice n_{w_0} ha il profilo antidiagonale; gli elementi fissati sono quelli della e sotto l'antidiagonale, di conseguenza $n_{w_0} = 1/2 n(n - 1)$.

Se si dimostra che $\sigma \triangleleft \tau$ implica $n_\sigma < n_\tau$, si è concluso: infatti, se $e =: \sigma_0 \triangleleft \dots \triangleleft \sigma_t := w_0$ è una catena massimale che collega e con w_0 , si ha $n_e = 0$, $n_{w_0} = 1/2 n(n - 1) = t$; poiché ci sono esattamente gli stessi passi, l'unica possibilità è $n_\sigma = l(\sigma)$.

Sia quindi $\sigma \triangleleft \tau := \sigma(h, k)$, con $h < k$ e $\sigma(h) < \sigma(k)$. Le matrici di elementi

di Y_σ e di Y_τ sono di questa forma:

$$\begin{array}{c} \sigma(h) \\ \sigma(k) \end{array} \begin{pmatrix} & h & & k & \\ \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \\ \cdots & 1 & \mathbf{0} & 0 & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & A & C & \cdots \\ \cdots & 0 & B & 1 & \cdots \\ \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} \sigma(h) \\ \sigma(k) \end{array} \begin{pmatrix} & h & & k & \\ \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \\ \cdots & \star & B' & 1 & \cdots \\ \cdots & C' & A' & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & 1 & \mathbf{0} & 0 & \cdots \\ \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \end{pmatrix}.$$

Guardando nelle matrici, si deve dimostrare che le entrate variabili nella prima sono meno di quelle variabili nella seconda. Le sottomatrici A e A' hanno esattamente lo stesso numero di entrate variabili, quindi si possono escludere dal calcolo. La sottomatrice B' ha un numero di entrate variabili maggiore o uguale a quello della sottomatrice B : ne ha tante di più quanti sono gli 1 nella sottomatrice A ; lo stesso ragionamento vale per le sottomatrici C e C' . Per assicurarsi che la disuguaglianza sia stretta, si osserva che la seconda matrice, quella relativa a Y_τ , ha un elemento variabile in più, esattamente quello in posizione $(\sigma(h), h)$. \square

Osservazione 4.22. Si è già visto che $\sigma < \tau$ implica $Y_\sigma \subseteq X_\tau$; ora si mostrerà il viceversa, cioè che $Y_\sigma \subseteq X_\tau$ implica $\sigma < \tau$.

Dimostrazione. Se $Y_\sigma \subseteq X_\tau$, esiste una famiglia $F_n \in Y_\tau$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = E_\sigma$; ma $a_{i,j}(F) = \dim F_i \cap E_j = |\{l \leq i \mid \tau(l) \leq j\}|$, da cui $a_{i,j}(F_n) = a_{i,j}(\tau)$; allo stesso modo, $a_{i,j}(E_\sigma) = \dim E_{\sigma,i} \cap E_i = a_{i,j}(\sigma)$. Dal limite, si ricava anche $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,i} = E_{\sigma,i}$. Al limite, la dimensione dell'intersezione di due spazi può solo aumentare, perciò $a_{i,j}(\sigma) \geq a_{i,j}(\tau)$, per ogni i e j . Ma $a_{i,j}(\sigma)$ conta il numero di 1 tra gli elementi della matrice nelle prime j righe e i colonne. Sia $S_i := \{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}$ e sia l_k il k -esimo elemento di S_i dopo averli ordinati; scansionando la matrice riga per riga, si osserva che $l_k = \min \{j \mid a_{i,j}(\sigma) \geq k\}$. Si definiscono anche gli m_k allo stesso modo degli l_k ma relativamente a τ .

Poiché $a_{i,j}(\sigma) \geq a_{i,j}(\tau)$,

$$l_k = \min \{j \mid a_{i,j}(\sigma) \geq k\} \leq \min \{j \mid a_{i,j}(\tau) \geq k\} = m_k;$$

cioè, per ogni k e per ogni i , $l_k \leq m_k$. Ma questa è una delle due caratterizzazioni viste dell'ordine di Bruhat, cioè $\sigma \leq \tau$. \square

Teorema 4.23. *Si ha $X_\tau = \bigsqcup_{\sigma \leq \tau} Y_\sigma$; in particolare, X_τ è un complesso cellulare e $X_\tau \setminus Y_\tau = \bigsqcup_{\sigma < \tau} Y_\sigma$.*

12/12/2007
Trentunesima lezione

Esempio 4.24. Si è già visto il caso $n = 2$; per $n = 3$, ci sono 6 permutazioni, e si è visto l'ordine di Bruhat di S_3 (figura 1): di conseguenza, $X_{w_0} = X_{(1,3,2)}$ è costituito da un'unica cella \mathbb{C}^3 sul cui bordo si attaccano due celle \mathbb{C}^2 che si intersecano in due celle \mathbb{C} che a loro volta si intersecano in un punto.

Teorema 4.25. *Se X è una varietà cellulare compatta, liscia, con solo celle di dimensione pari, allora $H^i(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n_i}$, dove n_i è il numero di celle di dimensione i .*

Corollario 4.26. *Si ha $H^{2i}(\mathcal{F}_i, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{a_i}$, dove gli a_i sono i coefficienti del polinomio di Poincaré $p(t) = \sum_{h=0}^n a_h t^h$.*

Dimostrazione. Alla luce del teorema 4.25, basta dimostrare che la varietà delle bandiere è liscia. La dimensione di \mathcal{F} (che è anche la dimensione della cella più grande, cioè quella relativa all'elemento più lungo), è $1/2 n(n-1)$; in E , il tangente $T_E \mathcal{F}$ ha dimensione $1/2 n(n-1)$, per cui in E la varietà è liscia; ma l'azione di G è transitiva, perciò per moltiplicazione si può trasportare l'identità in ogni punto di \mathcal{F} , per cui \mathcal{F} è liscia ovunque. \square

Esempio 4.27. Per $n = 3$, si ha $\dim H^0(\mathcal{F}) = \dim H^1(\mathcal{F}) = 1$, $\dim H^2(\mathcal{F}) = \dim H^3(\mathcal{F}) = 2$. Questa simmetria può essere spiegata sia grazie alla dualità di Poincaré ($H^i(\mathcal{F}) \cong H^{m-i}(\mathcal{F})^\vee$), sia grazie al fatto che il polinomio di Poincaré è reciproco (cioè, i coefficienti simmetrici rispetto al grado centrale sono uguali): infatti, il coefficiente di grado i del polinomio di Poincaré è il numero di elementi di lunghezza i , e se w_0 è l'elemento più lungo, la moltiplicazione per w_0 manda un elemento w di lunghezza i in uno che ha lunghezza $l(w_0) - i$.

Esempio 4.28. Se la varietà di Schubert X_σ è liscia, si può avere la sua decomposizione cellulare. Si può verificare anche che X_σ non sia liscia (solo se σ non è l'elemento più lungo): per $\sigma \neq w_0$, non è detto che il numero di celle per dimensione sia simmetrico; se si rompe la simmetria, X_σ non può essere liscia, per la dualità di Poincaré.

Si considera il gruppo $G := \mathrm{GL}(n)$ e i suoi sottogruppi B (sottogruppo di Borel, delle matrici triangolari superiori), T (il toro delle matrici diagonali) e U (il sottogruppo delle matrici triangolari superiori con diagonale uguale a 1). A una n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ si associa il morfismo $\lambda: B \rightarrow \mathbb{C}^*$, che manda la matrice triangolare superiore con diagonale (x_1, \dots, x_n) nel numero complesso $\prod x_i^{\alpha_i}$. Questo morfismo permette di assegnare a $\mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C}$ una struttura di B -modulo, ponendo $b \cdot z := \lambda(b)z$.

L'algebra di Borel B agisce su $G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$ con l'azione

$$b \cdot (g, z) := (gb^{-1}, b \cdot z) = (gb^{-1}, -\lambda(b)z).$$

Data l'azione di B , si può considerare lo spazio delle orbite $L_\lambda := G \times \mathbb{C}_{-\lambda} / B$, cioè il gruppo $G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$ quozientato per la relazione $(g, z) \sim b \cdot (g, z)$. Da $G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$ si ha una proiezione su G ; da L_λ si può invece considerare una proiezione π sulla varietà delle bandiere G/B , ponendo $\pi((g, z)) := gB$ (è ben definita perché $\pi(b \cdot (g, z)) = gb^{-1}B = gB = \pi((g, z))$). La proiezione è chiaramente suriettiva e la preimmagine di gB è

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(gB) &= \{ (h, z) \mid \pi(h, z) = gB \} = \{ (gb, z) \mid b \in B \} = \\ &= \{ (g, b \cdot z) \mid b \in B \} = \{ (g, z) \mid z \in \mathbb{C} \} \cong \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Se π fosse continua e localmente banale, sarebbe un fibrato in rette. Grazie all'azione transitiva del gruppo, basta dimostrare che è così per un punto. In effetti, si potrebbe dimostrare che L_λ ristretto a Y_{w_0} , la cella di Schubert più grande, è banale, cioè si ha $L_\lambda|_{Y_{w_0}} \cong Y_{w_0} \times \mathbb{C}$.

Esempio 4.29. Per $n = 2$, $G/B \cong \mathbb{P}^1$ e $\pi: L_\lambda \rightarrow G/B \cong \mathbb{P}^1$ è una fibrazione in rette sulla retta proiettiva, banale sulla retta affine $Y_{w_0} \cong \mathbb{C}$.

Ora, G agisce anche sul fibrato $L_\lambda: h \cdot (g, z) := (hg, z)$; lo spazio a cui si è interessati è $V_\lambda^* := H^0(G/B, L_\lambda)$, cioè il \mathbb{C} -spazio vettoriale delle sezioni del fibrato L_λ su G/B , cioè l'insieme delle mappe $s: G/B \rightarrow L_\lambda$ compatibili con π (cioè tali che $\pi \circ s = \mathrm{Id}$).

Si può vedere V_λ^* come lo spazio $\{ \varphi: G \rightarrow \mathbb{C}_\lambda \mid \varphi(gb^{-1}) = -\lambda(b)\varphi(g) \}$ (che in teoria delle rappresentazioni si indica con $\text{Ind}_B^G(\lambda)$). La corrispondenza tra i due spazi è la seguente: a $\varphi \in \text{Ind}_B^G(\lambda)$, si fa corrispondere la sezione $gB \mapsto (g, \varphi(g))$, che è ben definita perché $(gb, \varphi(gb)) = (gb, -\lambda(b^{-1})\varphi(g)) = b \cdot (g, \varphi(g))$ e quest'ultimo, in L_λ è uguale a $(g, \varphi(g))$.

Fatto 4.30.

1. Lo spazio V_λ^* è non nullo se e solo se $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$.
2. Le rappresentazioni V_λ^* non nulle sono irriducibili (cioè 0 e sé stesso sono gli unici due G -sottomoduli).
3. Ogni G -modulo irriducibile è V_λ^* per qualche λ .

Per spiegare questi fatti si assumono i seguenti risultati:

- $G = \text{GL}(n)$ è riduttivo (cioè, ogni sua rappresentazione si decompone in rappresentazioni irriducibili);
- in ogni G -modulo esiste un vettore U -invariante.

Se per assurdo V_λ^* non fosse irriducibile, poiché G è riduttivo $V_\lambda^* = Z_1 \oplus Z_2$ con Z_i sottorappresentazioni proprie. Allora, esistono $\varphi_1, \varphi_2 \in V_\lambda^*$ linearmente indipendenti e U -invarianti. La funzione φ_1/φ_2 è definita quasi ovunque ed è U -invariante. Ora, una sezione φ non è una funzione $G/B \rightarrow \mathbb{C}$ perché bisogna scegliere una base per ogni fibra \mathbb{C} (cioè in ogni fibra si può riscalare indipendentemente); però un rapporto di due sezioni cancella la necessità di scegliere una base in ogni fibra; perciò il rapporto è una funzione ben definita $G/B \rightarrow \mathbb{C}_\lambda$.

Ora, $Y_{w_0} = BE_{w_0} = UE_{w_0}$ (per come è fatta la varietà delle bandiere, Y_{w_0} è anche una U -orbita). Si può valutare φ_1/φ_2 su E_{w_0} ; se $\varphi_1/\varphi_2(E_{w_0}) = c \in \mathbb{C}$, $\varphi_1/\varphi_2(Y_{w_0}) = c$ per l' U -invarianza; allora φ_1/φ_2 è una funzione meromorfa costante su Y_{w_0} e quindi costante anche su $X_{w_0} = G/B$. Allora $\varphi_1/\varphi_2 \equiv c$, cioè $\varphi_1 = c\varphi_2$, assurdo perché si era supposto che φ_1 e φ_2 fossero indipendenti.

Riferimenti bibliografici

- [Bou68] Bourbaki, Nicolas: *Éléments de mathématique*, volume XXXIV. Hermann, 1968.
- [Hum90] Humphreys, James E.: *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge university press, 1990.