Appunti del corso: Elementi di algebra superiore 2 Prof. Giovanni Gaiffi

Stefano Maggiolo
http://poisson.phc.unipi.it/~maggiolo/
maggiolo@mail.dm.unipi.it

2007–2008

Indice

1 Moduli

26/02/2008
Prima lezione

In generale, Λ indicherà un anello con unità (non necessariamente commutativo). Dato un gruppo abeliano M, si indicherà con $\mathrm{End}(M)$ il gruppo dei suoi endomorfismi.

Definizione 1.1. Un gruppo abeliano M dotato di un omomorfismo di anelli $\omega\colon \Lambda \to \mathrm{End}(M)$ è detto Λ-*modulo sinistro.*

La definizione mima quella degli spazi vettoriali: ω definisce la moltiplicazione esterna: dati $\lambda \in \Lambda$ e $v \in M$, $\lambda v := \omega(\lambda)(v)$. In questo caso è necessario specificare bene che questa moltiplicazione è a sinistra. Un modo per presentare questa definizione "alla maniera degli spazi vettoriali" è il seguente: M è un Λ-modulo sinistro se esiste una funzione $\omega\colon \Lambda \to \mathrm{End}(M)$ tale che, ponendo $\lambda v := \omega(\lambda)(v)$:

1. $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$;
2. $(\lambda_1\lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 v)$;
3. $1v = v$;
4. $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$.

La definizione di Λ-modulo destro è analoga, ma si deve porre $v(\lambda_1\lambda_2) = (v\lambda_2)\lambda_1$. Si può definire Λ^{op} come l'anello con gli stessi elementi di Λ, la stessa somma e la moltiplicazione definita da $(\lambda_1\lambda_2)^{\mathrm{op}} := \lambda_2^{\mathrm{op}}\lambda_1^{\mathrm{op}}$; allora un Λ-modulo destro non è altro che un Λ^{op}-modulo sinistro. Quando non specificato, si considereranno moduli sinistri.

Esempio 1.2. Siano V uno spazio vettoriale su K e $T \in \mathrm{End}_K(V)$ (cioè un'applicazione lineare); allora V è un $K[T]$-modulo, dato che si sa far agire un polinomio in T su V.

Esempio 1.3. Sia G un gruppo finito che agisce su uno spazio vettoriale V su K; da G si costruisce l'anello

$$K[G] := \left\{ \sum_{g\in G} \gamma_g g \mid \gamma_g \in K \right\}$$

(che insiemisticamente è uguale a uno spazio vettoriale su K con base G) dotato della moltiplicazione definita a partire da quella del gruppo; in particolare, $K[G]$ può essere non commutativo. In questa situazione, V è un $K[G]$-modulo.

Definizione 1.4. Dati M e N due Λ-moduli, un *omomorfismo di* Λ-*moduli* tra M e N è un omomorfismo di gruppi abeliani $\varphi\colon M \to N$ tale che $\varphi(\lambda m) = \lambda\varphi(m)$ per ogni $m \in M$ e $\lambda \in \Lambda$. Un *isomorfismo di* Λ-*moduli* è un omomorfismo bîettivo.

Definizione 1.5. Dato un omomorfismo di Λ-moduli $\varphi\colon A \to B$ si definisce il *conucleo* di φ come ${}^{B}/_{\Im(\varphi)}$.

Il seguente è un noto teorema sulle successioni esatte.

Teorema 1.6. *Si considera il diagramma commutativo di* Λ-*moduli*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha''} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove le righe sono esatte e gli omomorfismi verticali sono dati. Se due tra questi sono isomorfismi, allora lo è anche il terzo.

Dimostrazione. Esercizio. □

Esempio 1.7. Se nel teorema 1.6 si hanno due isomorfismi ma non è dato il terzo omomorfismo, è possibile che non esista nemmeno un omomorfismo che fa commutare il diagramma. Per esempio, questo accade col diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\bullet} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\| & & & & \Big\| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow[\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} \times \pi]{} & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove non può esistere un morfismo tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ che commuti, altrimenti per il teorema sarebbe un isomorfismo e questo non può accadere perché, al contrario del dominio, il codominio ha torsione. Per esercizio si possono costruire esempi analoghi, con la prima o la terza freccia verticale assente.

1.1 Il gruppo degli omomorfismi

Se A e B sono Λ-moduli, si può considerare l'insieme $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ degli omomorfismi di Λ-moduli tra A e B; è un gruppo con l'ovvia somma puntuale. Ci si può chiedere se è anche un Λ-modulo: un tentativo è porre $(\lambda\varphi)(a) := \lambda\varphi(a) = \varphi(\lambda a)$. Però, se questo trasformasse $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ in un Λ-modulo, allora

$$\varphi(\lambda_1\lambda_2 a) = \lambda_1\lambda_2\varphi(a) = (\lambda_1\lambda_2\varphi)(a) = (\lambda_1(\lambda_2\varphi))(a) = (\lambda_2\varphi)(\lambda_1 a) = \varphi(\lambda_2\lambda_1 a);$$

questo funziona bene solo se Λ è commutativo, mentre in generale $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ non è un Λ-modulo.

Sia $\beta\colon B \to C$ un omomorfismo di Λ-moduli; per ogni Λ-modulo A, β induce un omomorfismo di gruppi $\beta_\star\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ con $\beta_\star(\varphi) := \beta \circ \varphi$. Si hanno due proprietà:

1. se $\beta = \mathrm{Id}_B$, $\beta_\star = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)}$;
2. dato $\gamma\colon C \to D$, si ha $(\gamma \circ \beta)_\star = \gamma_\star \circ \beta_\star$.

Si può vedere questo come una mappa $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \bullet)$ dai Λ-moduli ai gruppi abeliani che manda un Λ-modulo B nel gruppo abeliano $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ e un omomorfismo di Λ-moduli β nell'omomorfismo di gruppi abeliani $\beta_\star$ con buone proprietà di compatibilità. Allo stesso modo, fissato un Λ-modulo E si può considerare la mappa $\mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, E)$ che associa a un Λ-modulo D il gruppo abeliano $\mathrm{Hom}_\Lambda(D, E)$ e all'omomorfismo di Λ-moduli $\gamma\colon C \to D$ l'omomorfismo di gruppi abeliani $\gamma^\star\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(D, E) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C, E)$, definito da $\gamma^\star(\varphi) := \varphi\circ\gamma$; la prima proprietà è conservata, mentre la seconda diventa $(\gamma \circ \beta)^\star = \beta^\star \circ \gamma^\star$. Il primo caso è un esempio di quello che nel prosieguo verrà chiamato "funtore covariante dalla categoria dei moduli a quella dei gruppi abeliani", mentre il secondo di quello che verrà chiamato "funtore controvariante".

Teorema 1.8. *Si considera la successione esatta di Λ-moduli*

$$0 \to B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B''.$$

Fissato un Λ-modulo A, la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B') \xrightarrow{\mu_\star} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_\star} \mathrm{Hom}(A, B'')$$

è esatta.

Dimostrazione. Caccia nel diagramma. □

Osservazione 1.9. Anche a partire dalla successione esatta

$$0 \to B' \to B \to B'' \to 0$$

non si può concludere l'esattezza della successione esatta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B'') \to 0.$$

Per esempio, per $A \coloneqq \mathbb{Z}_n$ e

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n\bullet} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_n \to 0,$$

l'omomorfismo $\varepsilon_\star \colon \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n)$ non può essere suriettivo, dato che il primo è il gruppo banale mentre il secondo no.

Teorema 1.10. *Analogamente, se si considera la successione esatta di Λ-moduli*

$$0 \to A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A'';$$

fissato un Λ-modulo B, la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \mathrm{Hom}(A'', B) \xrightarrow{\varepsilon^\star} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\mu^\star} \mathrm{Hom}(A'', B)$$

è esatta.

Dimostrazione. Caccia nel diagramma. □

Osservazione 1.11. Come prima, anche se la successione esatta iniziale è completa, non è detto che la successione associata lo sia. Per esempio, si può prendere $B = \mathbb{Z}_n$ e la successione esatta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n\bullet} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_n \to 0;$$

allora $\mu^\star \colon \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n)$ non è suriettiva, infatti μ è l'omomorfismo di moltiplicazione per n, perciò $\mu^\star$ manda qualsiasi omomorfismo in quello nullo.

1.2 Moduli proiettivi

Ci si può chiedere, nel primo caso tra i due casi visti, quali sono i Λ-moduli A tali che per ogni successione esatta di Λ-moduli

$$0 \to B' \to B \to B'' \to 0,$$

la successione ottenuta dall'applicazione di $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, \bullet)$ sia esatta anche a destra. Questa domanda porta alla definizione seguente.

Definizione 1.12. Un Λ-modulo P si dice *proiettivo* se vale il diagramma di Λ-moduli

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "\vartheta"'] & \\ A \arrow[r, "\sigma"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

cioè se per ogni Λ-moduli A e B, per ogni $\sigma\colon A \to B$ suriettivo e per ogni $\varphi\colon P \to B$, esiste $\vartheta\colon P \to A$ tale che $\sigma \circ \vartheta = \varphi$.

Definizione 1.13. Un Λ-modulo F si dice *libero* se esiste una base, cioè se esiste una famiglia $(f_i)_{i \in I}$ che genera F (questo vuol dire che ogni elemento di F è combinazione lineare finita della famiglia a coefficienti in Λ) e i cui elementi sono indipendenti (cioè ogni elemento di F si scrive in un solo modo come combinazione lineare degli f_i).

Esempio 1.14. I Λ-moduli liberi sono proiettivi: infatti, se $(e_i)_{i\in I}$ è una base di un modulo libero F, e si ha il diagramma

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\varphi"] & \\ A \arrow[r, "\sigma"'] & B \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

siano a_i degli elementi di A tali che $\sigma(a_i) = \varphi(e_i)$; allora esiste una mappa $\vartheta\colon F \to A$ che manda e_i in a_i e questa fa commutare il diagramma.

In generale, un Λ-modulo libero è della forma $\bigoplus_{i\in I} \Lambda_i$, con $\Lambda_i = \Lambda$.

Esempio 1.15. Sia $V := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}$ e sia $\Lambda := \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$; intuitivamente, Λ è un Λ-modulo libero di rango 1. Tuttavia, V si può spezzare come somma diretta sugli indici pari e su quelli dispari, ottenendo un isomorfismo $V \cong V \oplus V$, da cui

$$\Lambda = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V \oplus V, V) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \cong \Lambda^2,$$

da cui si direbbe che il rango è 2. In generale, esiste un'ampia classe di anelli per cui il concetto di rango è ben definito; Λ non è tra questi.

03/03/2008
Seconda lezione

Proposizione 1.16. *Una somma diretta di Λ-moduli $\bigoplus_{i\in I} P_i$ è un modulo proiettivo se e solo se tutti i P_i sono proiettivi.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Teorema 1.17. *Data la successione esatta*

$$0 \to A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0,$$

esiste $\sigma\colon C \to B$ con $\varepsilon \circ \sigma = \mathrm{Id}_C$ se e solo se la successione spezza, *cioè $B \cong A \oplus C$; analogamente, esiste $\gamma\colon B \to A$ tale che $\gamma \circ \mu = \mathrm{Id}_A$ se e solo se la successione spezza.*

Dimostrazione. Nel primo caso, si costruisce l'isomorfismo mediante il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \oplus C \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

dove $\vartheta((a,c)) \coloneqq \mu(a) + \sigma(c)$. Il secondo caso è analogo. □

Teorema 1.18. *Per un Λ-modulo P le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *P è proiettivo;*
2. *per ogni successione esatta $0 \to A \to B \to C \to 0$, la successione ottenuta applicando $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \bullet)$ è esatta anche a destra;*
3. *se $\varepsilon\colon B \to P \to 0$ è esatta allora esiste $\sigma\colon P \to B$ tale che $\varepsilon \circ \sigma = \mathrm{Id}_P$;*
4. *P è addendo diretto di ogni modulo di cui è quoziente;*
5. *P è addendo diretto di un modulo libero.*

Dimostrazione. $(1 \Rightarrow 2)$ Dalla definizione di modulo proiettivo.

$(2 \Rightarrow 3)$ Si costruisce la successione $0 \to \ker\varepsilon \to B \to P \to 0$; questa dà per ipotesi la successione esatta $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,P) \to 0$, quindi esiste una mappa $\sigma\colon P \to B$ tale che $\mathrm{Id}_P = \varepsilon_\star(\sigma) = \varepsilon \circ \sigma$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Se P è quoziente di un Λ-modulo M, allora esiste $N \leq M$ tale che $P = {}^{M}\!/_{N}$, cioè esiste una successione esatta $0 \to N \to M \to P \to 0$; ma per ipotesi la successione spezza, cioè $M \cong N \oplus P$.

$(4 \Rightarrow 5)$ Ogni modulo può essere scritto come quoziente di un modulo libero; per ipotesi, questo implica che P è addendo diretto di quel modulo.

$(5 \Rightarrow 1)$ Per ipotesi, $P \oplus C = F$ con F un Λ-modulo libero (quindi proiettivo); per la proposizione 1.16, la proiettività di F implica quella di P e di C. □

Esempio 1.19.

1. Gli spazi vettoriali su un campo sono liberi (e quindi proiettivi).
2. Gli $\mathbb{Z}$-moduli $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, non sono liberi né proiettivi: con la usuale successione esatta
$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n\bullet} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0,$$
se $\mathbb{Z}_n$ fosse proiettivo, allora la successione spezzerebbe e si avrebbe $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$, che si è già visto che non può accadere.

3. Un gruppo abeliano finitamente generato G come $\mathbb{Z}$-modulo è somma diretta di componenti $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$; per la proposizione 1.16, G è proiettivo se e solo se lo sono tutte le sue componenti, quindi G è proiettivo se e solo se non ha torsione.

4. Si considera la successione esatta di $\mathbb{Z}_{p^2}$-moduli
$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$
dove $i([n]_p) \coloneqq [pn]_{p^2}$ e il secondo omomorfismo è il quoziente. Se $\mathbb{Z}_p$ fosse uno $\mathbb{Z}_{p^2}$-modulo proiettivo, allora la successione spezzerebbe e $\mathbb{Z}_{p^2} \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, impossibile per motivi di torsione.

5. Si considerano $\mathbb{Z}_{12}$-moduli; in questo ambiente, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$ mediante la mappa $\varphi((a,b)) \coloneqq 4a+3b$; $\mathbb{Z}_{12}$ è uno $\mathbb{Z}_{12}$-modulo libero, quindi proiettivo; allora per la proposizione 1.16, $\mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_4$ sono $\mathbb{Z}_{12}$-moduli proiettivi, ma chiaramente non sono liberi.

Esercizio 1.20.

1. Studiare quali sottomoduli di $\mathbb{Z}_n$ sono proiettivi come $\mathbb{Z}_n$-moduli per $n \in \{4, 6\}$.
2. Mostrare che $\mathbb{Q}$ non è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero.
3. Capire se $\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo proiettivo.

1.3 Moduli proiettivi su dominî a ideali principali

Teorema 1.21. *Siano Λ un dominio a ideali principali, E un Λ-modulo libero e F un Λ-sottomodulo di E; allora F è libero. Più precisamente, se $(v_i)_{i \in I}$ è una base di E e $F \neq \{0\}$, allora esiste una base di F indicizzata da un sottoinsieme J di I.*

Dimostrazione. Si affronta prima il caso in cui E ha rango finito; sia quindi $(v_1, \dots, v_n)$ una base di E; si definisce F_i come $F \cap \langle v_1, \dots, v_i \rangle$, cioè
$$\{0\} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = F.$$
Si dimostra l'asserto per induzione sul rango di E.

Se il rango è 1, $F \subseteq E \cong \Lambda$ implica F nullo o ideale di Λ, ma in questo caso, poiché Λ è a ideali principali, F è della forma (a) per qualche $a \in \Lambda \setminus \{0\}$, e poiché Λ è un dominio, F è libero.

Se l'asserto vale per tutti i Λ-moduli di rango minore di r e E ha rango r, F_{r-1} è libero per ipotesi induttiva; si separano due casi: se $F_r = F_{r-1}$ si ha concluso, altrimenti $F_r \supsetneq F_{r-1}$; in questo caso, sia
$$J \coloneqq \{\, \alpha \mid \exists x \in F \colon x = a_1 v_1 + \cdots + a_{r-1} v_{r-1} + \alpha v_r \,\};$$
J è un ideale, non vuoto perché esiste un elemento in $F_r \setminus F_{r-1}$. Poiché Λ è a ideali principali, $J = (b)$, ed esiste $w \in F$ della forma $\overline{a}_1 v_1 + \cdots + \overline{a}_{r-1} v_{r-1} + b v_r$; se $f \in F_r$ è un altro elemento, allora scegliendo opportunamente c, $f - cw \in F_{r-1}$, cioè $F_{r-1} + \Lambda w = F_r$, e in particolare la somma è diretta perché $F_{r-1} \cap \Lambda w = \{0\}$, dato che Λ è un dominio e F_r è libero.

Nel caso generale, se $(v_j)_{j\in J}$ è una base di E e $J \subseteq I$, si indica con F_J il Λ-modulo $F \cap \langle\, v_j \mid j \in J\,\rangle$. Si definisce

$$S \coloneqq \{\, (F_J, w) \mid J \subseteq I, w\colon J' \subseteq J \to F_J, w(J') \text{ base di } F_J \,\}\,;$$

su questo insieme si dà la relazione d'ordine $(F_J, w) \leq (F_K, u)$ se e solo se $J \subseteq K$, $J' \subseteq K'$ e $u_{|J} = w$. Questa relazione è ben definita e rende S un insieme induttivamente ordinato; S è non vuoto perché almeno contiene elementi per cui J è finito (grazie alla prima parte della dimostrazione); per il lemma di Zorn, esiste un elemento (F_L, γ) massimale in S. Si può concludere per esercizio la dimostrazione assumendo per assurdo $F_L \neq F$. □

Corollario 1.22. *Se Λ è un dominio a ideali principali, un modulo proiettivo è libero e ogni sottomodulo di un modulo proiettivo è proiettivo.*

Dimostrazione. Un modulo proiettivo è addendo diretto di un modulo libero (per il teorema 1.18), dunque se Λ è un dominio a ideali principali, il teorema precedente permette di concludere che è libero. □

Proposizione 1.23. *Se Λ è un dominio a ideali principali, M è un modulo finitamente generato, allora ogni sottomodulo N di M è finitamente generato.*

Dimostrazione. Se M è finitamente generato, esiste un Λ-modulo libero finitamente generato F con un omomorfismo suriettivo $\varphi\colon F \to M$; $\varphi^{-1}(N)$ è un sottomodulo di F quindi libero con generatori indicizzati da un sottoinsieme dei generatori di F. □

La proposizione precedente è vera in contesti più generali; per esempio, è sufficiente che Λ sia un anello noetheriano.

Teorema 1.24 (dei divisori elementari)**.** *Sia Λ un dominio a ideali principali e sia F un Λ-modulo libero; sia $M \subseteq F$ un sottomodulo finitamente generato non nullo; allora esistono una base $(v_i)_{i\in I}$ di F, degli elementi $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ e degli elementi $a_1, \dots, a_n \in \Lambda \setminus \{0\}$ tali che:*

1. *$a_1 v_{i_1}, \dots, a_n v_{i_n}$ sono una base di M su Λ;*
2. *$a_i \mid a_{i+1}$ per ogni i.*

Inoltre, la successione di ideali $(a_1), (a_2), \dots, (a_n)$ è univocamente determinata dalle condizioni precedenti.

Dimostrazione. Si veda [Lan93]. □

1.4 Moduli iniettivi

04/03/2008
Terza lezione

Il concetto di modulo iniettivo è il duale di quello di modulo proiettivo.

Definizione 1.25. Un Λ-modulo I si dice iniettivo se per ogni omomorfismo iniettivo di Λ-moduli $\gamma\colon A \to B$, ogni omomorfismo $\alpha\colon A \to I$ si estende a un omomorfismo $\beta\colon B \to I$, cioè se soddisfa il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & I & \\ B \arrow[ur, dashed, "\beta"] & A \arrow[l, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

In realtà, sebbene la definizione sia esattamente la stessa di quella di modulo proiettivo con le frecce nelle direzioni opposte, non si può immediatamente concludere che valgano le duali delle proprietà dei moduli proiettivi; le si ricaveranno con dimostrazioni apposite.

La seguente comunque è una proposizione che è proprio la duale di quella relativa ai moduli proiettivi.

Proposizione 1.26. *Un prodotto di Λ-moduli $\prod_{i\in I} A_I$ è iniettivo se e solo se lo sono tutti gli A_i.*

Dimostrazione. Esercizio. □

La differenza tra questa proposizione e quella relativa ai moduli proiettivi è la presenza del prodotto diretto anziché della somma diretta. In effetti, le proprietà universali della somma e del prodotto diretto sono schematizzate dai seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, bend left, "\psi_A"] & & \\
& A \oplus B \arrow[r, dashed] & M \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "\psi_B"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A & & \\
& A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[dl, "\pi_B"'] & M; \arrow[l, dashed] \arrow[ull, bend right, "\varphi_A"'] \arrow[dll, bend left, "\varphi_B"] \\
B & &
\end{tikzcd}$$

dove le frecce tratteggiate indicano che è possibile trovare un unico omomorfismo che fa commutare il diagramma. Si osserva in particolare che i due diagrammi si ottengono l'uno dall'altro rivoltando le frecce (in realtà, per due moduli i due oggetti somma e prodotto diretto sono isomorfi, c'è differenza invece quando si tratta di una famiglia infinita di Λ-moduli).

La seguente proposizione spiega la dualità fra i concetti di somma diretta e di prodotto diretto.

Proposizione 1.27. *Siano B un Λ-modulo e $\{\, A_j \mid j \in J \,\}$ una famiglia di Λ-moduli; allora c'è un isomorfismo*

$$\operatorname{Hom}_\Lambda\left(\bigoplus_{j\in J} A_j, B\right) \cong \prod_{j\in J} \operatorname{Hom}_\Lambda(A_j, B).$$

Dimostrazione. Esercizio. □

Un caso particolare della proposizione dà la ben nota dualità tra spazi vettoriali

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}\right)^{\star} \cong \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}.$$

Per studiare i moduli iniettivi si inizierà da quelli sui dominî a ideali principali per poi arrivare a un teorema, valido in generale, "duale" del teorema 1.18 per i moduli proiettivi.

1.5 Moduli iniettivi su dominî a ideali principali

Definizione 1.28. Sia Λ un dominio; un Λ-modulo D si dice *divisibile* se per ogni $d \in D$ e per ogni $\lambda \in \Lambda$, esiste $c \in D$ tale che $\lambda c = d$.

Esempio 1.29. Per i moduli su $\mathbb{Z}$ si hanno le seguenti:

1. $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo divisibile;
2. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo divisibile (si osserva che in questo caso c non è sempre unico);
3. $\mathbb{Z}_n$ non è uno $\mathbb{Z}$-modulo divisibile;
4. $\mathbb{Z}$ non è uno $\mathbb{Z}$-modulo divisibile;
5. un gruppo abeliano finitamente generato non è mai divisibile.

Teorema 1.30. *Sia Λ un dominio a ideali principali; allora un Λ-modulo D è iniettivo se e solo se è divisibile.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Questa implicazione è vera anche quando Λ è solo un dominio. Sia D un Λ-modulo iniettivo; dati $d \in D$ e $\lambda \in \Lambda$, si deve trovare $c \in D$ tale che $\lambda c = d$; si considerano l'omomorfismo iniettivo (perché Λ è un dominio) $\mu\colon \Lambda \to \Lambda$ dato dalla moltiplicazione per λ e l'omomorfismo $\alpha\colon \Lambda \to D$ che associa d a 1. Poiché D è iniettivo, esiste una mappa $\vartheta\colon \Lambda \to D$ tale che $\vartheta \circ \mu = \alpha$, da cui $d = \vartheta(\lambda) = \lambda\vartheta(1)$.

($\Leftarrow$) Sia D un Λ-modulo divisibile; siano $A \subseteq B$ due Λ-moduli e sia $\alpha\colon A \to D$ un omomorfismo; si deve trovare $\vartheta\colon B \to D$ tale che $\vartheta_{|A} = \alpha$. Sia

$$S \coloneqq \left\{ (L, \gamma) \mid A \subseteq L \subseteq B, \gamma\colon L \to D, \gamma_{|A} = \alpha \right\};$$

questo insieme non è vuoto perché contiene (A, α); con la ovvia relazione d'ordine è un insieme induttivo e per il lemma di Zorn ha un elemento massimale $(\bar{A}, \overline{\alpha})$. Se $\bar{A} = B$ si ha concluso; altrimenti, sia $b \in B \setminus \bar{A}$ e sia $I := \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \lambda b \in \bar{A} \right\}$; I è un ideale di Λ e, poiché Λ è a ideali principali, $I = (\lambda_0)$. Si vorrebbe creare un assurdo estendendo $\overline{\alpha}$ a $\tilde{\alpha}\colon \tilde{A} \coloneqq \left\langle \bar{A}, b \right\rangle \to D$; per fare questo è necessario definire $\tilde{a}(b)$ e per questo servirà la divisibilità: si sa che $\lambda_0 b \in \bar{A}$, per cui $\tilde{\alpha}$ dovrà soddisfare $\tilde{\alpha}(\lambda_0 b) = \overline{\alpha}(\lambda_0 b) \in D$; per la divisibilità, esiste c tale che $\lambda_0 c = \overline{\alpha}(\lambda_0 b)$ e basta definire $\tilde{\alpha}(b)$ come c. Per verificare che questa è una buona definizione, rimane solo da provare che se $\lambda b \in \bar{A}$, allora $\tilde{\alpha}(\lambda b) = \bar{\alpha}(\lambda b)$; ma se λ è tale, allora è della forma $\xi\lambda_0$ e di conseguenza $\tilde{\alpha}(\lambda b) = \lambda c$ e $\overline{\alpha}(\lambda b) = \overline{\alpha}(\xi\lambda_0 b) = \xi\overline{\alpha}(\lambda_0 b) = \xi\lambda_0 c = \lambda c$. □

Proposizione 1.31. *Ogni quoziente di un modulo divisibile è divisibile.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Vedendo ciò che succede per i moduli proiettivi, cioè che ogni modulo ha una suriezione da un modulo proiettivo, ci si aspetta che ogni modulo si inietti in un modulo iniettivo. In effetti le cose stanno proprio così; si dimostrerà questo fatto inizialmente per i gruppi abeliani (ossia per gli $\mathbb{Z}$-moduli).

Teorema 1.32. *Ogni gruppo abeliano ($\mathbb{Z}$-modulo) può essere immerso in un gruppo abeliano divisibile ($\mathbb{Z}$-modulo iniettivo).*

Dimostrazione. Sia A un gruppo abeliano e sia $a \in A \setminus \{0\}$; $\langle a \rangle \leq A$ può essere mandato in ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!{}_{\mathbb{Z}}$ mediante la mappa $\alpha_a \colon \langle a \rangle \to {}^{\mathbb{Q}}\!/\!{}_{\mathbb{Z}}$ che, se l'ordine di a è n, manda a in un elemento a scelta con ordine che divide n (in particolare, se a non è di torsione può andare in un qualsiasi elemento). Si ha il diagramma

$$\begin{tikzcd} & {}^{\mathbb{Q}}\!/\!{}_{\mathbb{Z}} & \\ 0 \arrow[r] & \langle a \rangle \arrow[u, "\alpha_a"] \arrow[r, "i"'] & A; \arrow[ul, dashed, "\vartheta_a"'] \end{tikzcd}$$

allora si considera il gruppo $G \coloneqq \prod_{a \in A \setminus \{0\}} {}^{\mathbb{Q}}\!/\!{}_{\mathbb{Z}}$; per la proprietà universale del prodotto diretto, esiste un omomorfismo $u \colon A \to G$, che è anche iniettivo: la componente a-esima di $u(a)$ non è altro che $\vartheta_a(a) = \alpha_a(a)$, che si è scelto in modo che sia non nullo. □

Vista questa dimostrazione, il prodotto di un certo numero di copie di ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!{}_{\mathbb{Z}}$ appare come un concetto duale della somma diretta di un certo numero di copie di $\mathbb{Z}$ (ogni gruppo abeliano è quoziente di un gruppo del tipo $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ e si inietta in un gruppo del tipo $\prod_{i \in I} {}^{\mathbb{Q}}\!/\!{}_{\mathbb{Z}}$).

Definizione 1.33. I gruppi del tipo $\prod_{i \in I} {}^{\mathbb{Q}}\!/\!{}_{\mathbb{Z}}$ si dicono *coliberi.*

Esercizio 1.34. Come $\mathbb{Z}_n$-modulo, $\mathbb{Z}_n$ è un modulo iniettivo.

Esercizio 1.35. Ogni gruppo abeliano A ha un solo gruppo divisibile massimale.

1.6 Moduli coliberi

Siano A un Λ-modulo destro e G un gruppo abeliano; su considera il gruppo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$; in questo caso si può munirlo di una struttura di Λ-modulo sinistro mediante $\lambda\varphi(a) \coloneqq \varphi(a\lambda)$.

Esercizio 1.36. Verificare che con questa definizione $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ ha effettivamente una struttura di Λ-modulo sinistro.

Teorema 1.37. *Siano A un Λ-modulo sinistro e G un gruppo abeliano; si considera $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)$ con la struttura di Λ-modulo sinistro indotta dalla struttura di Λ-modulo destro che si può porre in modo naturale su Λ; allora esiste un isomorfismo di gruppi abeliani*

$$\eta_A \colon \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G).$$

Inoltre, se $\alpha \colon A \to B$ è un omomorfismo di Λ-moduli, allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "\alpha^\star"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, G) \arrow[d, "\alpha^\star"] \\ \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, G)) \arrow[r, "\eta_A"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G) \end{tikzcd}$$

è commutativo.

Dimostrazione. Se $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, G))$, si deve definire $\eta_A(\varphi)$, cioè si deve definire $\eta_A(\varphi)(a)$ con $a \in A$; la definizione (ovvia) è la seguente: poiché $\varphi(a)\colon \Lambda \to G$, si prende $\eta_A(\varphi)(a) := \varphi(a)(1)$. Viceversa, se $\psi \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A, G)$, si deve definire $\eta_A^{-1}(\psi)$, cioè si deve definire $\eta_A^{-1}(\psi)(a)(\lambda)$ con $a \in A$ e $\lambda \in \Lambda$; ancora, c'è una definizione ovvia che è $\eta_A^{-1}(\psi)(a)(\lambda) := \psi(\lambda a)$. In effetti, con queste definizioni η_A^{-1} manda un omomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli in un omomorfismo di Λ-moduli e realizza l'inversa di η_A. I dettagli si possono completare per esercizio. $\square$

La mappa η del teorema appena dimostrato fornisce il primo esempio di quella che in seguito verrà chiamata "equivalenza naturale fra funtori".

Definizione 1.38. Un Λ-modulo si dice *colibero* se è del tipo

$$\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Si vorrebbe mostrare che un Λ-modulo colibero ha la stessa proprietà degli $\mathbb{Z}$-moduli coliberi, cioè che ogni Λ-modulo si inietta in un Λ-modulo colibero. Per "trasportare" la dimostrazione, è sufficiente mostrare che ogni Λ-modulo A ha un omomorfismo non nullo in $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$; ma A, come gruppo abeliano, ha un omomorfismo non nullo φ su $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; per l'equivalenza naturale del teorema 1.37, $\eta_A^{-1}(\varphi)$ è un omomorfismo non nullo da A a $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Il resto della dimostrazione procede allo stesso modo, quindi si è provata la seguente.

Proposizione 1.39. *Ogni Λ-modulo A è sottomodulo di un Λ-modulo colibero.*

10/03/2008
Quarta lezione

Si vorrebbe dimostrare che un Λ-modulo si inietta sempre in un Λ-modulo iniettivo. Per dimostrarlo, alla luce della proposizione precedente, è sufficiente dimostrare il teorema che segue.

Teorema 1.40. *Un Λ-modulo colibero è iniettivo.*

Dimostrazione. Poiché un Λ-modulo colibero è prodotto libero di copie di $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ e un prodotto libero di Λ-moduli è iniettivo se e solo se lo sono tutti i fattori, basta dimostrare che $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ è iniettivo. Sia $i\colon A \to B$ un omomorfismo iniettivo e sia $\alpha\colon A \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$; si deve trovare $\beta\colon B \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ che faccia commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \\ B \arrow[ur, dashed, "\beta"] & A \arrow[l, "i"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Si riconsidera l'equivalenza naturale η tra Λ-moduli e gruppi abeliani del teorema 1.37; allora si ha il diagramma di $\mathbb{Z}$-moduli

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \\ B & A \arrow[l, "i"] \arrow[u, "\eta_A(\alpha)"'] & 0; \arrow[l] \end{tikzcd}$$

poiché $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è iniettivo, esiste $\delta\colon B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ che lo fa commutare. Allora, per la naturalità di η, $\eta_B^{-1}(\delta)\colon B \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ è l'omomorfismo β cercato. □

Corollario 1.41. *Ogni Λ-modulo è sottomodulo di un Λ-modulo iniettivo.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla proposizione 1.39 e dal teorema 1.40. □

Ora si può dimostrare l'analogo del teorema 1.18 per i moduli iniettivi.

Teorema 1.42. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *I è un Λ-modulo iniettivo;*
2. *per ogni successione esatta di Λ-moduli*
$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$
è esatta anche la successione
$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C, I) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, I) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, I) \to 0.$$
3. *se $\mu\colon I \to B$ è un omomorfismo iniettivo, allora esiste $\beta\colon B \to I$ tale che $\beta \circ \mu = \mathrm{Id}_I$;*
4. *I è un addendo diretto di ogni modulo che lo contiene come sottomodulo;*
5. *I è addendo diretto di un modulo colibero.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Esempio 1.43. Tutti gli spazi vettoriali sono iniettivi: infatti, se W è un sottospazio vettoriale di V e si ha un omomorfismo $f\colon W \to L$, si può trovare un sottospazio F, supplementare di W in V (cioè tale che $W \oplus F = V$) ed estendere f a un omomorfismo $\tilde{f}\colon V \to L$ ponendo per esempio $\tilde{f}_{|F} = 0$.

Esempio 1.44. Siano G un gruppo finito, K un campo con caratteristica che non divide l'ordine del gruppo e W un $K[G]$-sottomodulo di V; come K-spazi vettoriali, esiste un supplementare F; si vorrebbe però che questa scomposizione fosse compatibile con la struttura di $K[G]$-modulo, cioè che F fosse un $K[G]$-sottomodulo di V. Per trovare un tale F, si considera la proiezione $\pi_W : V \to W$ e si definisce $T := |G|^{-1} \sum_{g \in G} g\pi_W$, dove $g\pi_W$ è l'endomorfismo lineare di V definito da $g\pi_W(v) := g \cdot \pi_W(g^{-1} \cdot v)$. Si vede facilmente che T è un morfismo di $K[G]$-moduli e che manda un elemento di W in sé stesso, quindi il suo nucleo, che è un $K[G]$-sottomodulo, è un supplementare di W in V. Perciò, ogni $K[G]$-modulo è iniettivo. Si osserva che per definire T è necessaria l'ipotesi sulla caratteristica del campo.

2 Categorie e funtori

Definizione 2.1. Una *categoria* $\mathscr{C}$ è il dato di:

1. una classe di *oggetti*, (che talora, quando ciò non creerà confusione, verrà denotata ancora con $\mathscr{C}$);

2. per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathscr{C}$, un insieme di *morfismi* da A a B denotato con $\mathscr{C}(A, B)$;
3. per ogni terna di oggetti $A, B, C \in \mathscr{C}$, una *legge di composizione* $\mathscr{C}(A, B) \times \mathscr{C}(B, C) \to \mathscr{C}(A, C) \colon (f, g) \mapsto gf$.

Inoltre, queste informazioni devono rispettare i seguenti assiomi (dove un elemento $f \in \mathscr{C}(A, B)$ si indica anche con $f \colon A \to B$):

1. $\mathscr{C}(A_1, B_1) \cap \mathscr{C}(A_2, B_2) = \varnothing$ se $A_1 \neq A_2$ o $B_1 \neq B_2$ (due morfismi con dominio o codominio diversi sono diversi);
2. dati $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ e $h \colon C \to D$, $h(gf) = (hg)f$ (associatività);
3. per ogni $A \in \mathscr{C}$, esiste $1_A \colon A \to A$ tale che per ogni $f \in A \to B$ e per ogni $g \colon C \to A$, $1_A g = g$ e $f 1_A = f$ (esistenza dell'identità).

Osservazione 2.2. Si intenderanno i termini "classe" e "insieme" secondo la teoria di Gödel-Bernays. Se la classe degli oggetti è un insieme, la categoria viene detta "piccola". In realtà si può avere una definizione più generale, dove anche $\mathscr{C}(A, B)$ può essere una classe; se viene usata questa definizione, le categorie per cui $\mathscr{C}(A, B)$ è un insieme per ogni $A, B \in \mathscr{C}$ sono dette *localmente piccole.*

Osservazione 2.3. Per i morfismi si useranno le usuali notazioni delle funzioni, anche se in realtà possono anche non essere funzioni (per esempio, si può avere una categoria dove gli oggetti sono i numeri interi e c'è un morfismo da n a m se e solo se $n \leq m$).

Osservazione 2.4. Si può dimostrare che il morfismo 1_A è univocamente determinato dall'ultimo assioma. Inoltre, dalla legge di composizione e dall'esistenza dell'identità si ricavano i concetti di morfismo inverso e di isomorfismo.

Definizione 2.5. Un oggetto A di una categoria $\mathscr{C}$ è detto *oggetto iniziale* di $\mathscr{C}$ se per ogni $C \in \mathscr{C}$, $\mathscr{C}(A, C)$ ha un unico elemento; è detto *oggetto terminale* di $\mathscr{C}$ se per ogni $C \in \mathscr{C}$, $\mathscr{C}(C, A)$ ha un unico elemento; un oggetto sia iniziale che terminale viene detto *zero* di $\mathscr{C}$.

Esempio 2.6. Sia σ la categoria degli insiemi, con morfismi le funzioni tra insiemi. Se Z è un oggetto terminale, allora Z deve avere un unico elemento, ma allora non è vero che per ogni $C \in \sigma$ l'insieme '$\sigma(Z, C)$ ha un solo elemento. Viceversa, se Z è iniziale, allora $Z = \varnothing$, ma $\sigma(C, Z)$ non ha morfismi (a parte il caso $C = \varnothing$).

Osservazione 2.7. Gli zeri di una categoria sono isomorfi tra loro.

Definizione 2.8. Una *sottocategoria* di una categoria $\mathscr{C}$ è una categoria $\mathscr{D}$ i cui oggetti sono una sottoclasse degli oggetti di $\mathscr{C}$ e per ogni $A, B \in \mathscr{D}$, $\mathscr{D}(A, B)$ è un sottoinsieme di $\mathscr{C}(A, B)$, con la legge di composizione indotta da quella di $\mathscr{C}$. Una sottocategoria $\mathscr{D}$ di $\mathscr{C}$ si dice *piena* se per ogni $A, B \in \mathscr{D}$, $\mathscr{D}(A, B) = \mathscr{C}(A, B)$.

Esempio 2.9. La categoria $\mathfrak{Ab}$ dei gruppi abeliani è una sottocategoria piena della categoria dei gruppi $\mathfrak{G}$. La categoria $\mathfrak{R}_1$ degli anelli con unità non è una sottocategoria piena della categoria degli anelli $\mathfrak{R}$, visto che un omomorfismo f tra due anelli A e B in $\mathfrak{R}_1$ deve soddisfare anche la richiesta $f(1_A) = 1_B$.

Esempio 2.10. Sia G un gruppo; si può definire una categoria $\mathscr{C}$ dove l'unico oggetto è G e $\mathscr{C}(G,G)$ è costituito dagli omomorfismi invertibili che corrispondono alle moltiplicazioni per $g \in G$. Da $\mathscr{C}$ si può ricavare il gruppo di partenza.

Definizione 2.11. Date due categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, un *funtore covariante* $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è una regola che associa a ogni oggetto $C \in \mathscr{C}$ un oggetto $F(C) \in D$ e a ogni morfismo $f \in \mathscr{C}(A,B)$ un morfismo $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ in modo che:

1. $F(fg) = F(f)F(g)$;
2. $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Si osserva che si può sempre definire il funtore identico, cioè il funtore da una categoria $\mathscr{C}$ in sé che manda ogni oggetto e ogni morfismo nello stesso oggetto o morfismo; inoltre due funtori $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ si possono comporre per ottenere $GF\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$. Grazie a queste due proprietà, si può dire che due categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono isomorfe se esistono due funtori $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tali che $GF = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ e $FG = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$.

Esempio 2.12. Alcuni esempi di funtori:

1. il funtore $\mathfrak{G} \to \mathfrak{Ab}$ che associa a un gruppo il suo abelianizzato;
2. il funtore dalla categoria degli spazi topologici puntati ai gruppi che associa a uno spazio topologico puntato il corrispondente gruppo fondamentale;
3. i funtori dimenticanti (per esempio, dalla categoria dei gruppi a quella degli insiemi, dalla categoria dei moduli sinistri su un anello Λ alla categoria dei gruppi abeliani o a quella degli insiemi).

Definizione 2.13. Data una categoria $\mathscr{C}$ e un oggetto $A \in \mathscr{C}$, il funtore $\mathscr{C}(A, \bullet)\colon \mathscr{C} \to \sigma$ è il *funtore rappresentato* da A.

Se $\mathscr{C}$ è una categoria, $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ è una categoria con gli stessi oggetti di $\mathscr{C}$ e con $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}(X,Y) = \mathscr{C}(Y,X)$ (e la legge di composizione indotta da questa struttura). La categoria $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ ha gli stessi morfismi identità e gli stessi oggetti zero di $\mathscr{C}$.

Definizione 2.14. Un *funtore controvariante* dalla categoria $\mathscr{C}$ alla categoria $\mathscr{D}$ è un funtore covariante $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$.

Definizione 2.15. Un funtore $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è *pieno* se $F\colon \mathscr{C}(A,B) \to \mathscr{D}(F(A),F(B))$ è suriettiva per ogni $A, B \in \mathscr{C}$; F è *fedele* se $F\colon \mathscr{C}(A,B) \to \mathscr{D}(F(A),F(B))$ è iniettiva; F è una *immersione piena* se è pieno, fedele e iniettivo sugli oggetti.

Esercizio 2.16. Se $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è un'immersione piena, l'immagine di F è una sottocategoria di $\mathscr{D}$. In generale, l'immagine di un funtore non è una sottocategoria; trovare un esempio di questo fatto (una possibilità consiste nel considerare una categoria $\mathscr{C}$ con quattro oggetti, A, B, C, D, e in cui gli unici morfismi sono le identità, un morfismo da A a B e uno da C a D; se un funtore F manda $\mathscr{C}$ in una categoria con tre oggetti, $F(A)$, $F(B) = F(C)$ e $F(D)$, nella categoria di arrivo esiste un morfismo fra $F(A)$ e $F(D)$, ottenuto per composizione, che, se $F(\mathscr{C})$ fosse una sottocategoria, dovrebbe appartenerle).

2.1 Trasformazioni naturali

Siano F e G due funtori da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$; allora per ogni $f\colon A \to B$ si ha il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F(A) & & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & & G(B). \end{array}$$

Definizione 2.17. Una *trasformazione naturale* t da F a G è una regola che associa a ogni oggetto $A \in \mathscr{C}$ un morfismo $t_X \in \mathscr{D}(F(A), G(A))$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{t_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[t_B]{} & G(B) \end{array}$$

commuti. Se t_A è un isomorfismo per ogni A, t si dice *equivalenza naturale* e si scriverà $F \cong G$.

11/03/2008
Quinta lezione

Definizione 2.18. Se $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ sono funtori che soddisfano $FG \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}\colon \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ e $GF \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, allora $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ si dicono *categorie equivalenti.*

Esempio 2.19. Siano $\mathfrak{V}_K^d$ la categoria degli spazi vettoriali di dimensione d su un campo K e K^d la categoria con un solo oggetto, lo spazio vettoriale K^d, e $\mathrm{End}(K^d)$ come insieme dei morfismi da K^d in sé. Siano $F\colon K^d \to \mathfrak{V}_K^d$ l'ovvio funtore che realizza un'immersione piena e $G\colon \mathfrak{V}_K^d \to K^d$ il funtore che si ottiene scegliendo una base per ogni spazio vettoriale. Allora F e G realizzano un'equivalenza tra K^d e $\mathfrak{V}_K^d$. In generale, a partire da una categoria $\mathscr{C}$, si può ottenere una categoria equivalente considerando solo un oggetto per ogni classe di isomorfismo di $\mathscr{C}$.

Esempio 2.20. Sia $\mathfrak{V}_K$ la categoria degli spazi vettoriali su K e sia $F\colon \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{V}_K$ il funtore che associa a uno spazio vettoriale V il suo biduale $V^{\star\star}$; si mostrerà che c'è una trasformazione naturale da F al funtore identico che, nel caso degli spazi vettoriali di dimensione finita, diventa un'equivalenza naturale.

Innanzitutto si considera il funtore duale, $G\colon \mathfrak{V}_K \to \mathfrak{V}_K$ che associa a uno spazio vettoriale V il suo duale $V^\star$ e a un'applicazione lineare $\varphi\colon V \to W$ l'applicazione duale $\varphi^\star\colon W^\star \to V^\star\colon f \mapsto f \circ \varphi$; applicare F significa applicare G due volte. Per trovare una trasformazione naturale dal funtore identico a F, si considera l'applicazione lineare $i_V\colon V \to V^{\star\star}$ che associa al vettore v l'omomorfismo $\tilde{v}$ definito da $\tilde{v}(\varphi) := \varphi(v)$ per ogni $\varphi \in V^\star$; i è una trasformazione naturale se e solo se il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i_V} & V^{\star\star} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{\star\star}} \\ W & \xrightarrow[i_W]{} & W^{\star\star} \end{array}$$

è commutativo. Partendo da $v \in V$, percorrendo il diagramma da una parte si arriva a $f^{\star\star}(\tilde{v})$, mentre dalla seconda si arriva a $\widetilde{f(v)}$. Per mostrare che sono uguali, è necessario valutarli in $\varphi \in W^\star$: da una parte,

$$f^{\star\star}(\tilde{v})(\varphi) = (\tilde{v} \circ f^\star)(\varphi) = \tilde{v}(f^\star(\varphi)) = f^\star(\varphi)(v) = \varphi(f(v));$$

dall'altra, si trova subito $\widetilde{f(v)}(\varphi) = \varphi(f(v))$. In particolare, se gli spazi sono di dimensione finita, questa trasformazione naturale diventa un'equivalenza naturale in quanto tutti gli i_V sono isomorfismi.

Esempio 2.21. Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due categorie; con $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ si indica la categoria i cui oggetti sono i funtori da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$, mentre i morfismi sono le trasformazioni naturali tra funzioni. In generale però questa costruzione dà luogo a classi proprie di morfismi, cioè a categorie che escono dalla definizione data. Questo non accade se la categoria iniziale è piccola: in questo caso, le trasformazioni naturali tra due funtori formano un insieme.

2.2 Costruzioni universali

In tutte le costruzioni universali che seguono gli oggetti trovati sono unici modulo isomorfismo.

Definizione 2.22. Sia $\mathscr{C}$ una categoria e $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di oggetti di $\mathscr{C}$; il *prodotto* degli X_i in $\mathscr{C}$ è un oggetto $X \in \mathscr{C}$ con dei morfismi $p_i \colon X \to X_i$ e la proprietà descritta dal diagramma

$$\begin{tikzcd} & X_i \\ Y \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, dashed, "f"'] & X, \arrow[u, "p_i"'] \end{tikzcd}$$

cioè, data una famiglia di morfismi $(f_i)_{i \in I}$ con $f_i \colon Y \to X_i$, esiste un unico morfismo $f \colon Y \to X$ che fa commutare il diagramma.

Esempio 2.23. Nella categoria $\mathfrak{M}_\Lambda$ dei Λ-moduli, il prodotto è il prodotto diretto; in σ, è il prodotto cartesiano. Il prodotto non esiste sempre: per esempio, nella categoria degli insiemi di cardinalità 2 oppure nella categoria dei gruppi ciclici esistono famiglie di oggetti che non ammettono un prodotto (trovarne alcune per esercizio).

Esempio 2.24. Sia $\mathfrak{G}_{\mathrm{tor}}$ la sottocategoria piena di $\mathfrak{G}$ che ha come oggetti i gruppi di torsione. Scelta una famiglia $(G_i)_{i \in I}$ di gruppi di torsione, esiste il prodotto della famiglia nella categoria $\mathfrak{G}$, $\prod_{i \in I} G_i$. In generale, anche se tutti i G_i sono di torsione, $\prod_{i \in I} G_i$ può non essere di torsione (per esempio, in $\prod_{i>0} \mathbb{Z}_i$ l'elemento $(1)_{i>0}$ non è di torsione). Tuttavia, in $\mathfrak{G}_{\mathrm{tor}}$ c'è un prodotto, la parte di torsione T di $\prod_{i \in I} G_i$; questo perché quando si va a controllare la proprietà universale nella categoria $\mathfrak{G}_{\mathrm{tor}}$, gli Y che si prendono in considerazione sono tutti i gruppi di torsione, quindi le mappe $Y \to \prod_{i \in I} G_i$ che realizzano il diagramma in $\mathfrak{G}$ fattorizzano per T.

Definizione 2.25. Sia $\mathscr{C}$ una categoria e $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di oggetti di $\mathscr{C}$; il *coprodotto* della famiglia è il prodotto della famiglia in $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

Definizione 2.26. In $\mathfrak{M}_\Lambda$, il coprodotto esiste ed è la somma diretta; in σ è l'unione disgiunta; nella categoria degli spazi topologici è ancora l'unione disgiunta; in $\mathfrak{G}$ è il prodotto libero.

Osservazione 2.27. Un oggetto iniziale è il coprodotto della famiglia vuota, perché per ogni $Y \in \mathscr{C}$ deve esistere un unico morfismo dall'oggetto a Y. Allo stesso modo, un oggetto terminale è il prodotto della famiglia vuota.

Definizione 2.28. Nella categoria $\mathscr{C}$, dato il diagramma

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\varphi"] \\ C \arrow[r, "\psi"'] & D, \end{tikzcd}$$

il *pullback* (o *prodotto fibrato*) di (φ, ψ) è un oggetto $Y \in \mathscr{C}$ dotato di due morfismi $\beta\colon Y \to B$ e $\gamma\colon Y \to C$ tali che è soddisfatta la proprietà universale descritta dal diagramma

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dashed, "\mu"] \arrow[drr, bend left, "\delta"] \arrow[ddr, bend right, "\varepsilon"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ & C \arrow[r, "\psi"'] & D, \end{tikzcd}$$

cioè, se esiste un altro oggetto Z con le condizioni richieste, esiste una unica mappa $\mu\colon Z \to Y$ che fa commutare il diagramma.

Esempio 2.29. Nella categoria dei moduli, il pullback è identificabile con un sottomodulo di $B \oplus C$: si dimostra facilmente che si può identificare con il nucleo della mappa $\vartheta\colon B \oplus C \to D\colon (b, c) \to \varphi(b) - \psi(c)$, con le proiezioni su B e su C: se Z è un altro oggetto con degli omomorfismi su B e su C che fanno commutare il diagramma, allora grazie a questi due omomorfismi si trova un omomorfismo $Z \hookrightarrow B \oplus C$ e la richiesta della commutatività del diagramma implica che l'immagine è contenuta nel nucleo di ϑ.

Esempio 2.30. Nella categoria degli insiemi, se φ e ψ sono delle inclusioni, il pullback è semplicemente $B \cap C$ con le inclusioni. Nella categoria $\mathfrak{G}$, il pullback è il sottogruppo di $B \times C$ degli elementi del tipo (b, c) tali che $\varphi(b) = \psi(c)$.

Definizione 2.31. Su una categoria $\mathscr{C}$, dato il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \\ C, & \end{tikzcd}$$

il *pushout* di (β, γ) è il pullback di (β, γ) in $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

Esercizio 2.32. Scrivere esplicitamente la definizione di pushout.

Esempio 2.33. In σ, se β e γ sono delle inclusioni da $B \cap C$ in B e C, il pushout è l'unione $B \cup C$; in $\mathfrak{G}$, il pushout di (β, γ) è ${}^{B \star C}/_{\alpha(a)\beta(a)^{-1} = e}$. (un "prodotto libero con amalgami"). Quest'ultima osservazione si collega al seguente contesto geometrico: dato uno spazio topologico connesso per archi, che sia unione di due aperti U e V tali che la loro intersezione $U \cap V$ sia non vuota e connessa per archi, si ha il seguente diagramma in cui i morfismi sono quelli indotti dalle inclusioni fra gli spazi topologici coinvolti:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(V) \\ \pi_1(U), & \end{tikzcd}$$

il teorema di Seifert e Van Kampen afferma che $\pi_1(X)$ è il pushout di questo diagramma (si vedano [Mas77] e [Mas91]), ossia il prodotto libero con amalgami di $\pi_1(U)$ e $\pi_1(V)$.

Esercizio 2.34. Determinare il pushout nella categoria dei moduli.

2.3 Funtori aggiunti

Esempio 2.35. Sia $F\colon \sigma \to \mathfrak{M}^{\mathrm{l}}_{\Lambda}$ il funtore dalla categoria degli insiemi a quella dei Λ-moduli liberi che associa a un insieme S il modulo libero di base S e sia $G\colon \mathfrak{M}^{\mathrm{l}}_{\Lambda} \to \sigma$ il funtore dimenticante. Presi $A \in \mathfrak{M}^{\mathrm{l}}_{\Lambda}$, $S \in \sigma$ e un omomorfismo di Λ-moduli liberi $\varphi\colon F(S) \to A$, si considera la funzione $\varphi_{|S}\colon S \to G(A)$; si denoti con $\eta_{S,A}$ la corrispondenza $\varphi \mapsto \varphi_{|S}$. Posta questa definizione, se si vuole rendere η una trasformazione naturale, deve essere necessariamente tra i bifuntori (cioè funtori da un prodotto di categorie) $\mathfrak{M}^{\mathrm{l}}_{\Lambda}(F(\bullet), \blacktriangle)$ e $\sigma(\bullet, G(\blacktriangle))$, che sono entrambi funtori da $\sigma^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{M}^{\mathrm{l}}_{\Lambda}$ a σ (dove il prodotto cartesiano di due categorie è definito in modo ovvio). Un morfismo in $\sigma^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{M}^{\mathrm{l}}_{\Lambda}$ da (S, A) in (T, B) è una coppia $\Gamma \coloneqq (f, \varphi)$ dove $f\colon T \to S$ è una funzione e $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di Λ-moduli. Per verificare che effettivamente η è una trasformazione naturale, si costruisce il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}^{\mathrm{l}}_{\Lambda}(F(S), A) \arrow[r, "\eta_{S,A}"] \arrow[d, "\mathfrak{M}^{\mathrm{l}}_{\Lambda}(\Gamma)"'] & \sigma(S, G(A)) \arrow[d, "\sigma(\Gamma)"] \\ \mathfrak{M}^{\mathrm{l}}_{\Lambda}(F(T), B) \arrow[r, "\eta_{T,B}"'] & \sigma(T, G(B)). \end{tikzcd}$$

Preso un omomorfismo di Λ-moduli $\psi\colon F(S) \to A$, percorrendo il diagramma da un lato si ottiene $G(\varphi) \circ \psi_{|S} \circ f$, dall'altro $(\varphi \circ \psi \circ F(f))_{|S}$ ed è facile vedere che sono uguali; perciò, η è un'equivalenza naturale. La coppia di funtori F e G è un esempio di "funtori aggiunti" (sinistro e destro, rispettivamente). In generale, se G è il funtore dimenticante da una categoria a quella degli insiemi, si può definire il concetto di "oggetto libero su un insieme S" come l'immagine di S tramite il funtore aggiunto sinistro di G, se esiste.

Definizione 2.36. Dati $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, se esiste un'equivalenza naturale $\eta\colon \mathscr{D}(F(\bullet), \blacktriangle) \to \mathscr{C}(\bullet, G(\blacktriangle))$ di funtori da $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D} \to \sigma$, allora si dice che F è *aggiunto sinistro* di G e G è *aggiunto destro* di F.

Esempio 2.37. Analogamente a quanto visto per i moduli, l'aggiunto sinistro del funtore dimenticante $\mathfrak{G} \to \sigma$ è il funtore che associa a un insieme S il gruppo libero generato da S; allo stesso modo, l'aggiunto sinistro del funtore dimenticante dalla categoria delle algebre associative con unità a σ è il funtore che associa a un insieme l'anello di polinomi con incognite indicizzate dagli elementi dell'insieme.

Esempio 2.38. Sia G il funtore dimenticante dalla categorie delle K-algebre a quella degli spazi vettoriali su K; il suo funtore aggiunto sinistro è il funtore $\mathscr{T}$ che associa a uno spazio vettoriale V il prodotto tensoriale $\mathscr{T}(V)$. Se G è il funtore dalla categoria delle K-algebre a quella delle algebre di Lie che associa a una K-algebra l'algebra di Lie con $[a, b] \coloneqq ab - ba$, il suo funtore aggiunto sinistro è il funtore algebra inviluppante $\mathscr{U}$ (si veda [Hum94]).

Nel teorema 1.37, una volta fissato un gruppo abeliano G, si era trovata l'equivalenza naturale η; se si considera variabile anche G si può reinterpretare questa situazione in termini di funtori aggiunti.

Esercizio 2.39. A partire dalla η del teorema 1.37 costruire una trasformazione naturale che realizza l'aggiunzione tra $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \bullet)\colon \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{M}_\Lambda$ e il funtore dimenticante $\mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$.

17/03/2008 - rivedere
Sesta lezione

Per un funtore, la proprietà di avere un funtore aggiunto sinistro (rispettivamente, destro) implica varie altre proprietà. Un esempio è la proposizione 2.41.

Definizione 2.40. Sia $\mathscr{C}$ una categoria in cui esiste un oggetto zero Z; se $\varphi\colon A \to B$ è un morfismo in $\mathscr{C}$, il suo *nucleo*, se esiste, è un morfismo $k\colon K \to A$ che soddisfa il diagramma

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dd, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
& A \arrow[r, "\varphi"] & B \\
K \arrow[ur, "k"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

cioè, tale che φk fattorizza tramite Z e se $f\colon L \to A$ è un altro morfismo tale che φf fattorizza tramite Z, esiste un unico morfismo $\alpha\colon L \to K$ che fa commutare il diagramma. La definizione di *conucleo* è la duale della definizione di nucleo.

Proposizione 2.41. *Se $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ ha un aggiunto sinistro, allora G preserva prodotti, pullback e nuclei.*

Dimostrazione. Si dimostra solo che G preserva i prodotti. Sia $(Y_i)_{i \in I}$ una famiglia di oggetti in $\mathscr{D}$ e sia $Y \coloneqq \prod_{i \in I} Y_i$, il prodotto della famiglia in $\mathscr{D}$, con i morfismi $p_i\colon Y \to Y_i$. Si deve dimostrare che $G(Y) = \prod_{i \in I} G(Y_i)$ in $\mathscr{C}$.

Sia quindi $X \in \mathscr{C}$ un oggetto, con dei morfismi $f_i\colon X \to G(Y_i)$; se F è il funtore aggiunto sinistro di G, esiste una equivalenza naturale η tra $\mathscr{C}(\bullet, G(\blacktriangle))$ e $\mathscr{D}(F(\bullet), \blacktriangle)$, quindi a ogni f_i corrisponde tramite η un morfismo $\varphi_i \coloneqq \eta^{-1}_{X,Y} f_i\colon F(X) \to Y_i$ in $\mathscr{D}$. Ma in $\mathscr{D}$, Y è il prodotto degli Y_i, quindi esiste un unico morfismo $g\colon F(X) \to Y$ per cui il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& Y_i \\
F(X) \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[u, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

è commutativo. Ora, si considera il morfismo $(\mathrm{Id}_X, p_i)\colon (X,Y) \to (X,Y_i)$; per la naturalità il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(F(X),Y) \arrow[r, "\eta_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathscr{D}(F(\mathrm{Id}_X),p_i)"'] & \mathscr{C}(X,G(Y)) \arrow[d, "\mathscr{C}(\mathrm{Id}_X,G(p_i))"] \\
\mathscr{D}(F(X),Y_i) \arrow[r, "\eta_{X,Y_i}"'] & \mathscr{C}(X,G(Y_i))
\end{tikzcd}$$

commuta, cioè, partendo da $g\colon F(X) \to Y$, percorrendo il diagramma nei due sensi si ottiene lo stesso morfismo: $G(p_i) \circ \eta_{X,Y}(g) = \eta_{X,Y_i}(p_i \circ g)$. Quindi se si dota l'oggetto $G(Y)$ delle mappe $G(p_i)$, per ogni X con delle mappe $f_i\colon X \to G(Y_i)$ esiste il morfismo $f \coloneqq \eta_{X,Y}(g)$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & G(Y_i) \\
X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f"'] & G(Y). \arrow[u, "G(p_i)"']
\end{tikzcd}$$

Rimane da dimostrare che questo morfismo è unico: se anche $f'\colon X \to G(Y)$ fa commutare il diagramma, allora poiché η è una equivalenza naturale, $f' = \eta_{X,Y}(g')$ per qualche $g'\colon F(X) \to Y$. Percorrendo ancora il diagramma nei due sensi, ma partendo da g', si ottiene $G(p_i) \circ \eta_{X,Y}(g') = \eta_{X,Y_i}(p_i \circ g')$, da cui si ottiene che g' fa commutare il diagramma del prodotto in $\mathscr{D}$, quindi $g' = g$ e $f' = \eta_{X,Y}(g) = f$. $\square$

Osservazione 2.42. Vale anche la duale della proposizione precedente: se $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ha un aggiunto destro, allora F preserva coprodotti, pushout e conuclei.

2.4 Estensioni di moduli

Definizione 2.43. Dati due Λ-moduli A e B, una *estensione* di A tramite B è una successione esatta corta di Λ-moduli

$$0 \to B \to E \to A \to 0.$$

Esempio 2.44. Esiste sempre un'estensione banale di A tramite B, cioè la successione esatta

$$0 \to B \to A \oplus B \to A \to 0.$$

Il nome "banale", sarà ancora più giustificato nel seguito, quando si vedrà che le estensioni formano un gruppo (a meno di renderne equivalenti alcune) il cui elemento neutro è l'estensione banale.

Definizione 2.45. Due estensioni E e F di A tramite B si dicono *equivalenti* se esiste un omomorfismo ψ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & F \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Osservazione 2.46. Per il teorema 1.6, se ψ esiste, è un isomorfismo, quindi l'equivalenza è una relazione d'equivalenza; si denoterà con $E(A,B)$ l'insieme delle estensioni di A tramite B modulo equivalenza.

La strategia che si seguirà per mostrare che $E(A,B)$ è un gruppo è la seguente: si considererà $E(\bullet, \blacktriangle)$ come un bifuntore $\mathfrak{M}_\Lambda{}^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{M}_\Lambda \to \sigma$; se ne mostrerà un altro, $\mathrm{Ext}(\bullet, \blacktriangle)$, con una naturale struttura di gruppo; infine, si mostrerà che i due funtori sono equivalenti.

Esempio 2.47. Due estensioni non equivalenti di $\mathbb{Z}_3$ tramite $\mathbb{Z}$ sono

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & 1 & \longmapsto & 3 & & & & \\ & & & & 1 & \longmapsto & [i] & & \end{array}$$

per $i \in \{1,2\}$. Queste due estensioni non sono equivalenti: se per assurdo esistesse $\psi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ per cui il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commuta, partendo da $i \in \mathbb{Z}$ in alto a sinistra, dal primo quadrato si ricava $3i = 3\varphi(i)$, cioè $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$, ma questo omomorfismo non fa commutare il secondo quadrato. Ovviamente, queste estensioni non sono isomorfe a

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3 \to 0,$$

altrimenti si avrebbe un isomorfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$. Da queste esempio, si può già intuire che le estensioni di $\mathbb{Z}_3$ tramite $\mathbb{Z}$ formano un gruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_3$, dove l'estensione banale corrisponde all'elemento neutro.

Lemma 2.48. *Il quadrato*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

è un pullback di (φ, ψ) se e solo se la successione

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & y & \longmapsto & (\alpha(y),\beta(y)) & & & & \\ & & & & (a,b) & \longmapsto & \varphi(a)-\psi(b) & & \end{array}$$

è esatta.

Dimostrazione. Per esercizio (nella categoria $\mathfrak{M}_\Lambda$, si è già osservato che il pullback di (φ, ψ) è il nucleo della mappa $A \oplus B \to X \colon (a,b) \to \varphi(a) - \psi(b)$). □

Lemma 2.49. *Se il quadrato*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

è un pullback, allora β induce un isomorfismo $\ker\alpha \to \ker\psi$ *e, se ψ è suriettiva, anche α lo è.*

Dimostrazione. Per esercizio (ancora, nella categoria $\mathfrak{M}_\Lambda$ è banale grazie alla caratterizzazione del pullback). □

Osservazione 2.50. Valgono anche i lemmi duali di quelli esposti qui sopra.

Per considerare $E(\bullet, \blacktriangle)$ come un bifuntore, si devono costruire da due omomorfismi $\alpha\colon A' \to A$ e $\beta\colon B \to B'$ gli omomorfismi $\alpha^\star\colon E(A,B) \to E(A',B)$ e $\beta_\star\colon E(A,B) \to E(A,B')$. Data un'estensione $E \in E(A,B)$ e un omomorfismo $\alpha\colon A' \to A$, si considera il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dashed] & \ker\varepsilon' \arrow[r, dashed, "\mu'"] \arrow[d, dashed, "\wr"'] & E' \arrow[r, dashed, "\varepsilon'"] \arrow[d, dashed, "\xi"] & A' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\mu"'] & E \arrow[r, "\varepsilon"'] & A \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

dove E' è il pullback di (α, ε); per i lemmi appena visti, dato che ε è suriettivo, anche ε' è suriettivo, e c'è un isomorfismo tra $\ker\varepsilon = B$ e $\ker\varepsilon'$, cioè anche E' appartiene a $E(A,B)$ e si pone $\alpha^\star(E) \coloneqq E'$. Viceversa, dato un omomorfismo $\beta\colon B \to B'$, si considera il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\xi"] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\wr"'] & 0 \\ 0 \arrow[r, dashed] & B' \arrow[r, dashed, "\mu'"'] & E' \arrow[r, dashed, "\varepsilon'"'] & \operatorname{coker}\mu' \arrow[r, dashed] & 0, \end{tikzcd}$$

dove E' è il pushout di (μ, β); per i duali dei lemmi, μ' è iniettivo e $\operatorname{coker}\mu' \cong A$, cioè $E' \in E(A,B)$ e si pone $\beta_\star(E) \coloneqq E'$.

Proposizione 2.51.

1. *Se $\alpha\colon A \to A$ è l'identità, allora $\alpha^\star$ è l'identità;*

2. *se $\alpha\colon A' \to A$ e $\alpha'\colon A'' \to A'$ sono morfismi, allora $(\alpha \circ \alpha')^\star = \alpha'^\star \circ \alpha^\star$;*

in particolare, la corrispondenza data da $A \mapsto E(A,B)$ e $\alpha \mapsto \alpha^\star$ realizza un funtore controvariante.

1. *Se $\beta\colon B \to B$ è l'identità, allora $\beta_\star$ è l'identità;*

2. *se $\beta\colon B \to B'$ e $\beta'\colon B' \to B''$ sono morfismi, allora $(\beta \circ \beta')_\star = \beta_\star \circ \beta'_\star$;*

in particolare, la corrispondenza data da $B \to E(A,B)$ e $\beta \to \beta_\star$ realizza un funtore covariante.

Inoltre, con queste mappe, E è un bifuntore dalla categoria $\mathfrak{M}_\Lambda^{op} \times \mathfrak{M}_\Lambda$ alla categoria σ.

Dimostrazione. Per esercizio (si noti che l'ultima richiesta non segue immediatamente dalle prime due). $\square$

Osservazione 2.52. Se A è un modulo proiettivo o B è un modulo iniettivo, ogni successione che termina in A spezza, quindi $E(A,B)$ contiene solo la classe dell'estensione banale.

Ora si passa alla costruzione del funtore $\mathrm{Ext}\colon \mathfrak{M}_\Lambda^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ (per confrontarlo con E si comporrà con il funtore dimenticante $\mathfrak{Ab} \to \sigma$); Ext è il primo esempio di quello che verrà chiamato “funtore derivato”.

Definizione 2.53. Sia A un Λ-modulo; se P è un Λ-modulo proiettivo, una successione esatta $0 \to R \to P \to A \to 0$ si dice *presentazione proiettiva* di A.

Poiché ogni Λ-modulo è quoziente di un Λ-modulo proiettivo, esiste sempre una presentazione proiettiva. Se B è un altro Λ-modulo, si può costruire

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(R,B).$$

Definizione 2.54. Dati due Λ-moduli A e B e una presentazione proiettiva $0 \to R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$, si definisce $\mathrm{Ext}_\Lambda^\varepsilon(A,B) := \operatorname{coker} \mu^\star$.

18/03/2008 - rivedere
Settima lezione

A priori, la definizione di $\mathrm{Ext}_\Lambda^\varepsilon(A,B)$ dipende dalla presentazione proiettiva scelta, cioè dalla mappa ε.

Se $\alpha\colon A' \to A$ è un omomorfismo di Λ-moduli, e $0 \to R' \to P' \to A' \to 0$ e $0 \to R \to P \to A \to 0$ sono presentazioni proiettive di A' e di A, allora per proiettività esiste almeno un *sollevamento* $\pi\colon P' \to P$ di α, cioè un omomorfismo che fa commutare il diagramma. Un sollevamento si restringe ai nuclei di ε e ε', quindi induce un omomorfismo $\sigma\colon R' \to R$ ancora compatibile col diagramma.

Ogni omomorfismo $\psi\colon R \to B$ si può sollevare a un omomorfismo $\psi'\colon R' \to B$, ponendo $\psi' := \psi \circ \sigma$; allora si ha una mappa funtoriale

$$\pi^\star\colon\ \mathrm{Ext}_\Lambda^\varepsilon(A,B) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{\varepsilon'}(A',B)\colon [\psi] \mapsto [\psi'].$$

Lemma 2.55. *La mappa $\pi^\star$ non dipende da π ma solo da α.*

Dimostrazione. Se $\pi_1, \pi_2\colon P' \to P$ sono due sollevamenti di α e σ_1, σ_2 le rispettive restrizioni, si ottiene il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, bend right, "\sigma_2"'] \arrow[d, bend left, "\sigma_1"] & P' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, bend right, "\pi_2"'] \arrow[d, bend left, "\pi_1"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"'] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Allora $\pi_1 - \pi_2$ è un omomorfismo la cui immagine è contenuta in $\ker \varepsilon$, quindi $\pi_1 - \pi_2 = \mu\tau$ per qualche $\tau\colon P' \to R$; allora, $\mu(\sigma_1 - \sigma_2) = (\pi_1 - \pi_2)\mu' = \mu\tau\mu'$ e $\sigma_1 - \sigma_2 = \tau\mu'$.

Ora, se $\varphi\colon R \to B$, si ha

$$\pi_1^\star([\varphi]) = [\sigma_1\varphi] = [\sigma_2\varphi + \tau\mu'\varphi] = [\sigma_2\varphi] + \cancel{[\tau\mu'\varphi]} = \pi_2^\star([\varphi]).$$

In particolare, dato che si è dimostrato che $\pi^\star$ non dipende da π ma solo da α e dalle due presentazioni, si indicherà con (α, P, P'). $\square$

Grazie al lemma, dato $\alpha\colon A' \to A$, $(\alpha, P, P')\colon \operatorname{Ext}_\Lambda^\varepsilon(A, \bullet) \to \operatorname{Ext}_\Lambda^{\varepsilon'}(A', \bullet)$ è un'equivalenza naturale, dato che soddisfa le due richieste:

1. $(\mathrm{Id}_A, P, P) = \mathrm{Id}_{\operatorname{Ext}_\Lambda^\varepsilon(A,\bullet)}$;

2. se esiste $\alpha'\colon A'' \to A'$ e una presentazione proiettiva $\varepsilon''\colon P'' \to A''$, allora $(\alpha \circ \alpha', P'', P) = (\alpha', P'', P') \circ (\alpha, P', P)$.

Quindi si è dimostrato che Ext non dipende dalla presentazione proiettiva scelta, nel senso che $\operatorname{Ext}_\Lambda^\varepsilon(A, \bullet)$ e $\operatorname{Ext}_\Lambda^{\varepsilon'}(A, \bullet)$ sono naturalmente equivalenti.

Teorema 2.56. *C'è un'equivalenza naturale tra E e $\operatorname{Ext}_\Lambda$.*

Dimostrazione. Bisognerebbe prima di tutto dimostrare la bifuntorialità di $\operatorname{Ext}_\Lambda(\bullet, \blacktriangle)$. Supposto questo, si deve costruire per ogni A e B un morfismo $\eta_{A,B}\colon E(A,B) \to \operatorname{Ext}_\Lambda(A,B)$: se $E \in E(A,B)$, allora c'è una successione esatta $0 \to B \to E \to A \to 0$; si considera una presentazione proiettiva $0 \to R \to P \to A \to 0$ di A, ottenendo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

e quindi si associa a E la classe di ψ in $\operatorname{Ext}_\Lambda(A,B)$. Per il viceversa, a partire da una presentazione proiettiva $0 \to R \to P \to A \to 0$ e da una mappa ψ (con $[\psi] \in \operatorname{Ext}_\Lambda(A,B)$), si considera il pushout e per il duale dei lemmi 2.48 e 2.49 si ottiene una estensione di A tramite B.

Ovviamente, bisogna dimostrare che queste definizioni sono ben poste (cioè che non dipendono dalla classe dell'estensione né dalla classe nel conucleo) e che sono l'una l'inversa dell'altra (esercizio). $\square$

Esercizio 2.57. Si dimostra che l'elemento neutro di $E(A,B)$ è effettivamente l'estensione banale: l'elemento neutro è indotto da un omomorfismo $\psi\colon R \to B$ che è nullo nel conucleo, cioè esiste $\tau\colon P \to B$ tale che $\tau\mu = \psi$; allora il pushout che si ottiene è

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi"'] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, "\tau"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "k"'] & Y \arrow[r] & A \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

dove, poiché $(\varphi - k\tau)\mu = 0$, $\varphi - k\tau\colon P \to Y$ si estende a $\sigma\colon A \to Y$ che fa spezzare la successione esatta inferiore, che quindi è l'estensione banale.

Esercizio 2.58. Si vuole calcolare $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$. Sia $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{4_\bullet} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \to 0$ una presentazione proiettiva di $\mathbb{Z}_4$; allora $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ è il conucleo della mappa $(4_\bullet)^\star \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4)$; $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4)$ è costituito da 4 omomorfismi, a seconda di dove va $1 \in \mathbb{Z}$; applicare $(4_\bullet)^\star$ significa comporre con $4_\bullet$, cioè ogni omomorfismo viene mandato in 0 da $(4_\bullet)^\star$, e il conucleo è $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4$. Ora si vuole capire a questi elementi quali estensioni corrispondono. Sicuramente a 0 corrisponde l'estensione banale $0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to 0$; un'altra a cui si può pensare è

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{16} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & [a]_4 & \longmapsto & [4a]_{16}; & & & & \end{array}$$

per capire a quale elemento di $\mathbb{Z}_4$ corrisponde, si calcola l'elemento del conucleo corrispondente usando la presentazione proiettiva iniziale, ottenendo $\psi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \colon 1 \mapsto [1]$, cioè corrisponde a $1 \in \mathbb{Z}_4$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "4_\bullet"] \arrow[d, "1 \mapsto [1]"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "m \mapsto [m]"] & \mathbb{Z}_4 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_4 \arrow[r] & \mathbb{Z}_{16} \arrow[r] & \mathbb{Z}_4 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

L'elemento $2 \in \mathbb{Z}_4$ si ottiene facendo il pushout dell'omomorfismo $1 \mapsto [2]$; si ottiene l'estensione

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4}{\langle 4, [2] \rangle} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & [a]_4 & \longmapsto & ([a], [a]); & & & & \end{array}$$

dove lo $\mathbb{Z}$-modulo centrale è isomorfo a $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$. L'elemento $3 \in \mathbb{Z}_4$ ritorna a essere del tipo $\mathbb{Z}_{16}$ visto in precedenza.

Esercizio 2.59. Si vuole calcolare $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12})$. Innanzitutto si considera la presentazione proiettiva $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{8_\bullet} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8 \to 0$, da cui $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_12) \cong {}^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12})}/_{\mathrm{Im}\,(8_\bullet)^\star}$. L'immagine di $(8_\bullet)^\star \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{12}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{12})$ è uno $\mathbb{Z}_3$ (rimangono solo le mappe che mandano 1 in $[8]$, $[16] = [4]$ o $[24] = [0]$), quindi $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_4$. Per quanto riguarda le estensioni, il pushout può essere solo ${}^{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}}/_{G}$ con G che può essere $(8, [1])$, $(8, [2])$, $(8, [3])$, a seconda dell'omomorfismo di partenza, ottenendo quindi $\mathbb{Z}_{96}$, $\mathbb{Z}_{48} \oplus \mathbb{Z}_2$ o $\mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_3$.

Lemma 2.60.

1. $\mathrm{Ext}_\Lambda(\bigoplus_{i \in I} A_i, B) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Ext}_\Lambda(A_i, B)$*;*
2. $\mathrm{Ext}_\Lambda(A, \prod_{i \in I} B_i) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Ext}_\Lambda(A, B_i)$*.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata una volta dimostrato che la somma diretta di una famiglia di presentazioni proiettive è una presentazione proiettiva della somma diretta della famiglia di Λ-moduli. □

Per sapere quanto fa $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ con A e B gruppi abeliani finitamente generati, in virtù del lemma basta sapere quanto fanno:

- $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m)$, che è 0 perché $\mathbb{Z}$ è proiettivo;

- $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$, nullo per lo stesso motivo;
- $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})$, isomorfo a $\mathbb{Z}_m$ perché se m è la moltiplicazione per m da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$, $m^\star$ è la mappa nulla da $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_m)$ in sé.
- $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_q)$, isomorfo a $\mathbb{Z}_{(m,q)}$ ragionando come negli esercizi.

Corollario 2.61. *Sia A un gruppo abeliano finitamente generato; allora A è libero se e solo se* $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z})=0$.

La prima affermazione, dato che $\mathbb{Z}$ è un dominio a ideali principali, significa che le successioni del tipo $0\to K\to L\to A\to 0$ spezzano; la seconda che le successioni del tipo $0\to\mathbb{Z}\to E\to A\to 0$ spezzano (si è ridotto il numero delle successioni da controllare). Ci si può chiedere se questo corollario vale anche per i gruppi abeliani non finitamente generati. Un risultato è il seguente teorema.

Teorema 2.62 (Stein-Serre)**.** *Sia A un gruppo abeliano di rango numerabile; allora* $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z})=0$ *implica A libero.*

Corollario 2.63. *Se $0\to\mathbb{Z}_m\to E\to\mathbb{Z}_n\to 0$ è esatta, con $(m,n)=1$, allora la successione spezza.*

Osservazione 2.64. Si può costruire un bifuntore $\overline{\mathrm{Ext}}_\Lambda(\bullet,\blacktriangle)$, considerando una presentazione iniettiva di B (che esiste sempre perché ogni Λ-modulo si inietta in un Λ-modulo iniettivo) $0\to B\xrightarrow{\vartheta} I\xrightarrow{\eta} S\to 0$, andando a costruire la successione

$$0\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,I)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(A,S)$$

e definendo $\overline{\mathrm{Ext}}^{\vartheta}_\Lambda(A,B):=\operatorname{coker}\eta^\star$. Si dimostra che non dipende da ϑ e che Ext_Λ e $\overline{\mathrm{Ext}}_\Lambda$ sono naturalmente equivalenti.

Esercizio 2.65. Se A è un gruppo con torsione, allora $\overline{\mathrm{Ext}}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z})\neq 0$.

2.5 Prodotto $\otimes$

Definizione 2.66. Dati un Λ-modulo destro A e un Λ-modulo sinistro B, il *prodotto tensore* di A e B è il quoziente del gruppo abeliano libero generato dai simboli $a\otimes b$ con $a\in A$ e $b\in B$ per le relazioni

1. $(a_1+a_2)\otimes b=a_1\otimes b+a_2\otimes b$,
2. $a\otimes(b_1+b_2)=a\otimes b_1+a\otimes b_2$ e
3. $(a\lambda)\otimes b=a\otimes(\lambda b)$,

e si indica con $A\otimes_\Lambda B$.

31/03/2008 - rivedere
Ottava lezione

Teorema 2.67. *Per ogni Λ-modulo destro A il funtore $A\otimes_\Lambda\bullet\colon\mathfrak{M}^s_\Lambda\to\mathfrak{Ab}$ è aggiunto sinistro del funtore* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\bullet)\colon\mathfrak{Ab}\to\mathfrak{M}^s_\Lambda$.

Dimostrazione. Dato un bimorfismo $\vartheta\colon(B',G')\to(B,G)$, si deve verificare l'esistenza di una isomorfismo naturale η tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_\Lambda B, G) \arrow[r, "\eta_{B,G}"] \arrow[d, "\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_\Lambda \bullet, \blacktriangle)"'] & \operatorname{Hom}_\Lambda(B, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)) \arrow[d, "\operatorname{Hom}_\Lambda(\bullet, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \blacktriangle))"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A' \otimes_\Lambda B', G') \arrow[r, "\eta_{B',G'}"'] & \operatorname{Hom}_\Lambda(B', \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A', G'))
\end{tikzcd}$$

commuti. Se $\psi\colon A \otimes_\Lambda B \to G$, si definisce $(\eta_{B,G}(\psi)(b))(a) := \psi(a \otimes b)$; la sua inversa manderà $\varphi\colon B \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ nell'applicazione che a $a \otimes b$ associa $\varphi(b)(a)$. Per esercizio si può verificare che queste definizioni sono ben poste e che realizzano le richieste. □

Corollario 2.68. *Sia A un Λ-modulo destro. Allora:*

1. *se $(B_j)_{j\in J}$ è una famiglia in $\mathfrak{M}^s_\Lambda$, allora $A \otimes_\Lambda (\bigoplus_{j\in J} B_j) = \bigoplus_{j \in J} A \otimes_\Lambda B_j$ (il prodotto tensore preserva le somme dirette);*
2. *se $B' \to B \to B'' \to 0$ è una successione esatta di Λ-moduli sinistri, allora*
$$A \otimes_\Lambda B' \to A \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B'' \to 0$$
è esatta (il prodotto tensore preserva i conuclei).

Esempio 2.69. L'esattezza a sinistra non è sempre mantenuta; per esempio, se $A := \mathbb{Z}_p$ e si ha la successione esatta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p\bullet} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$

una volta tensorizzato per A la prima mappa diventa la mappa nulla da $\mathbb{Z}_p$ in sé, che non è iniettiva.

Definizione 2.70. Un Λ-modulo sinistro B si dice *piatto* se per ogni successione esatta corta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ di Λ-moduli destri, la successione

$$0 \to A' \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B \to A'' \otimes_\Lambda B \to 0$$

è esatta.

Una definizione equivalente di Λ-modulo piatto è la seguente: un Λ-modulo sinistro B si dice piatto se per ogni omomorfismo iniettivo $A' \to A$, il corrispondente omomorfismo $A' \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B$ è iniettivo.

Teorema 2.71. *Ogni modulo proiettivo è piatto.*

Dimostrazione. Sia P un modulo proiettivo; allora esiste P_1 tale che $P \oplus P_1 \cong F$, dove F è un modulo libero. Sia $A' \to A$ un omomorfismo iniettivo; tensorizzando per F si ottiene un omomorfismo $A' \otimes_\Lambda F \to A \otimes_\Lambda F$ che per il corollario 2.68 equivale a un omomorfismo $(A' \otimes P) \oplus (A' \otimes P_1) \to (A \otimes P) \oplus (A \otimes P_1)$; se la mappa che si ottiene tensorizzando per F è iniettiva, deve esserlo anche quella che si ottiene tensorizzando per un suo addendo proiettivo, quindi basta dimostrare che ogni modulo libero è piatto. Ancora, è necessario dimostrarlo solo per $F := \Lambda$, e in questo caso vale perché $A' \otimes_\Lambda \Lambda \cong A'$ e $A \otimes_\Lambda \Lambda \cong A$. □

Esercizio 2.72. Trovare un modulo piatto non proiettivo.

Esempio 2.73. Per i gruppi abeliani, essere piatti equivale a non avere torsione; più in generale, questa proprietà vale per i Λ-moduli con Λ un dominio a ideali principali.

Proposizione 2.74. *Sia A un Λ-modulo con Λ un dominio a ideali principali; allora A è piatto se e solo se è libero da torsione.*

Dimostrazione.

($\Rightarrow$) Questa parte di dimostrazione vale più in generale se Λ è un dominio. Sia M un Λ-modulo con torsione, cioè esiste $m \in M$ tale che $m \neq 0$ e $am = 0$ per qualche $a \in A \setminus \{0\}$. Si considera la successione esatta

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{a\bullet} \Lambda \to \Lambda/\langle a \rangle \to 0;$$

tensorizzando per M, il primo morfismo manda $1 \otimes m$ in $a \otimes m = 1 \otimes am = 0$, quindi non può essere iniettivo.

($\Leftarrow$) Sia B un Λ-modulo libero da torsione e sia $\varphi\colon A' \to A$ un omomorfismo iniettivo. Il corrispondente omomorfismo $\varphi \otimes \mathrm{Id}\colon A' \otimes_\Lambda B \to A \otimes_\Lambda B$ non è iniettivo se esiste un elemento non nullo della forma $\sum_{i \in I} a'_i \otimes b_i$ tale che $\sum_{i \in I} \varphi(a'_i) \otimes b_i = 0$. Dato che la somma è finita, ci si può ridurre al caso in cui A, A' e B siano finitamente generati; per il lemma 2.75, dato che B è finitamente generato e libero da torsione, è un Λ-modulo libero, e quindi piatto. $\square$

Lemma 2.75. *Se Λ è un dominio a ideali principali, allora un Λ-modulo finitamente generato e libero da torsione è libero.*

Dimostrazione. Sia B un Λ-modulo finitamente generato e libero da torsione; sia $\{y_1, \dots, y_m\}$ un insieme di generatori e $\{v_1, \dots, v_n\}$ un sottoinsieme massimale tra quelli costituiti da elementi linearmente indipendenti. Per ogni i, $\{y_i, v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di elementi dipendenti, perciò esistono degli elementi $a_i \neq 0$ e $b_{i,j}$ di Λ tali che $a_i y_i + b_{i,1} v_1 + \dots + b_{i,n} v_n = 0$. Sia $a := a_1 \cdots a_m$; poiché B è libero da torsione, la moltiplicazione per a è un omomorfismo iniettivo $\varphi\colon B \to B$, con immagine contenuta in $\langle v_1, \dots, v_n \rangle B \cong \Lambda^n$. Ma allora aB, essendo sottomodulo di un modulo libero, è libero, e B è isomorfo ad aB. $\square$

2.6 Il funtore Tor

Definizione 2.76. Siano A un Λ-modulo destro e B un Λ-modulo sinistro. Si considera una presentazione proiettiva $0 \to R \xrightarrow{\mu} P \to A \to 0$ di A; si definisce $\mathrm{Tor}(A, B) := \ker \mu_\star$, dove $\mu_\star\colon R \otimes_\Lambda B \to P \otimes_\Lambda B$.

Si può quindi definire il funtore covariante $\mathrm{Tor}(A, \bullet)\colon \mathfrak{M}^s_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$, mandando $\varphi\colon B \to B'$ nella mappa $\varphi^\star\colon \mathrm{Tor}(A, B) \to \mathrm{Tor}(A, B')$ che rende il diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Tor}(A,B) & \longrightarrow & R \otimes_\Lambda B & \longrightarrow & P \otimes_\Lambda B \\
{\scriptstyle \varphi^\star}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes\varphi}\downarrow \\
\mathrm{Tor}(A,B') & \longrightarrow & R \otimes_\Lambda B' & \longrightarrow & P \otimes_\Lambda B'
\end{array}$$

commutativo. Le stesse considerazioni si possono fare per il funtore controvariante $\mathrm{Tor}(\bullet, B)$.

Teorema 2.77. *La corrispondenza* $\mathrm{Tor}(\bullet, \blacktriangle)$ *è un bifuntore.*

Dimostrazione. Si definisce $\overline{\mathrm{Tor}}(A, B)$ come il nucleo di $\mu_\star \colon A \otimes_\Lambda S \to A \otimes_\Lambda Q$, dove $0 \to S \xrightarrow{\mu} Q \to B \to 0$ è una presentazione proiettiva di B; si deve dimostrare che $\mathrm{Tor}(A, B) \cong \overline{\mathrm{Tor}}(A, B)$. Poiché P e Q sono proiettivi, quindi piatti, si può scrivere il diagramma commutativo seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Sigma_5"] & \mathrm{Tor}(A,B) \arrow[d] & \\
 & & R \otimes_\Lambda S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Sigma_3"] & R \otimes_\Lambda Q \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Sigma_4"] & R \otimes_\Lambda B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Sigma_1"] & P \otimes_\Lambda S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Sigma_2"] & P \otimes_\Lambda Q \arrow[r] \arrow[d] & P \otimes_\Lambda B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{Tor}}(A,B) \arrow[r] & A \otimes_\Lambda S \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_\Lambda Q \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_\Lambda B \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ora, se Σ è il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\
C \arrow[r, "\beta"'] & D,
\end{tikzcd}$$

si definiscono $\ker \Sigma := {}^{\ker \varphi\alpha}\!/\!_{\ker \alpha + \ker \psi}$ e $\mathrm{Im}\, \Sigma := {}^{\mathrm{Im}\, \varphi \cap \mathrm{Im}\, \beta}\!/\!_{\mathrm{Im}\, \varphi\alpha}$. Si dimostra che se Σ_1 e Σ_2 sono due quadrati commutativi adiacenti, $\mathrm{Im}\, \Sigma_1 \cong \ker \Sigma_2$; nel diagramma precedente allora si ha

$$\overline{\mathrm{Tor}}(A, B) \cong \mathrm{Im}\, \Sigma_1 \cong \ker \Sigma_2 \cong \mathrm{Im}\, \Sigma_3 \cong \ker \Sigma_4 \cong \mathrm{Im}\, \Sigma_5 \cong \mathrm{Tor}(A, B). \qquad \square$$

01/04/2008 - rivedere
Nona lezione

Esercizio 2.78. Sia B un gruppo abeliano, allora

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, B) \cong \{\, b \in B \mid mb = 0 \,\}$$

è la m-torsione di B.

Soluzione. Considerando la usuale successione esatta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m_\bullet} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0,$$

se la si tensorizza per B si ottiene che $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, B) \cong \ker(m_\bullet \otimes \mathrm{Id}_B) = \{\, b \in B \mid mb = 0 \,\}$. $\square$

Esercizio 2.79. Sia R un anello commutativo e sia $r \in R$ non divisore di zero. Se B è un R-modulo sinistro, allora $\mathrm{Tor}({}^{R}\!/\!_{(r)}, B) = \{\, b \in B \mid rb = 0 \,\}$.

Soluzione. La soluzione è la stessa dell'esercizio precedente, notando che la moltiplicazione per r è iniettiva dato che r non divide 0. $\square$

Osservazione 2.80. Si sarebbe potuto costruire il diagramma della dimostrazione del teorema 2.77 anche se P fosse stato solo piatto e non proiettivo. Quindi si può costruire $\mathrm{Tor}(A, B)$ anche a partire da una presentazione piatta di A o di B.

Esercizio 2.81. La parte di torsione di B è $\mathrm{Tor}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Soluzione. Si costruisce $\mathrm{Tor}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ a partire da una presentazione piatta di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. Allora $\mathrm{Tor}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \ker \mathrm{Id}_B \otimes i$; perciò $\mathrm{Tor}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ si inietta in $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong B$ e $b \in B$ è di torsione se e solo se $mb = 0$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$, se e solo se $b \otimes 1 = b \otimes {}^m/_m = mb \otimes {}^1/_m = 0$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$. $\square$

3 Complessi e funtori derivati

Definizione 3.1. Un Λ-*modulo graduato* è una famiglia di Λ-moduli $A := (A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$; un *omomorfismo* $\varphi\colon A \to B$ di Λ-moduli graduati di grado k è il dato di una famiglia di omomorfismi $\varphi_n\colon A_n \to B_{n+k}$. La categoria dei Λ-moduli graduati si indicherà con $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$.

Definizione 3.2. Un *complesso* è una coppia $(\underline{C}, \partial)$ dove $\underline{C}$ è un Λ-modulo graduato e ∂ è un omomorfismo di grado -1 da $\underline{C}$ in sé tale che $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$. Un *omomorfismo* tra complessi un omomorfismo φ di Λ-moduli graduati di grado 0 che commuta con le mappe ∂ (cioè, $\partial\varphi = \varphi\partial$ con gli opportuni indici). La categoria dei complessi di moduli sull'anello Λ si indicherà con Comp_Λ.

3.1 Digressione sulle categorie additive

Definizione 3.3. Una categoria $\mathscr{U}$ si dice *additiva* se:

1. ha l'elemento zero;
2. esiste il prodotto di ogni coppia di oggetti;
3. ogni insieme di morfismi è un gruppo abeliano;
4. la composizione di morfismi è una mappa bilineare.

Esempio 3.4. Le categorie $\mathfrak{M}_\Lambda$ e Comp_Λ sono additive; la categoria $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ non è additiva, ma lo è se si restringono i morfismi a quelli di grado 0.

Definizione 3.5. Sia $F\colon \mathscr{U}_1 \to \mathscr{U}_2$ un funtore tra due categorie additive; F si dice *funtore additivo* se $F\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}_1}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}_2}(F(A), F(B))$ è un omomorfismo di gruppi abeliani per ogni $A, B \in \mathscr{U}_1$.

Osservazione 3.6. Un funtore F è additivo se e solo se preserva le somme e i prodotti di due oggetti (in una categoria esistono le somme di due oggetti se e solo se esistono i prodotti di due oggetti).

Osservazione 3.7. Se $F\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ è un funtore additivo covariante, allora $F(\underline{C}) \in \mathrm{Comp}_{\Lambda'}$ ogni volta che $\underline{C} \in \mathrm{Comp}_\Lambda$; inoltre la restrizione di F ai complessi rimane un funtore additivo.

Esercizio 3.8. Il funtore $\bullet \otimes_\Lambda A$ è additivo, così come $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \bullet)$.

Definizione 3.9. Dato un complesso $\underline{C}$, l'*omologia* di $\underline{C}$ è il modulo graduato $H_\star(\underline{C}) = (H_n(\underline{C}))_{n\in\mathbb{Z}}$ dove $H_n(\underline{C}) \coloneqq {}^{\ker \partial_n}/_{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$.

Definizione 3.10. Se $\underline{C}$ è un complesso, gli elementi di C_n sono detti *catene*, le catene che vengono mandate in 0 sono dette *cicli*, le immagini di una catena sono dette *bordi*.

Si possono considerare anche i *cocomplessi*, ovvero Λ-moduli graduati dotati di un omomorfismo di grado 1. In questo caso si avranno *coomologia*, *cocatene*, *cocicli* e *cobordi*; in cocomplesso si indicherà con $\overline{C}$.

Esempio 3.11. Sia B un Λ-modulo e sia $0 \to S \to Q \to B \to 0$ una sua presentazione proiettiva; si considera il complesso $\underline{C}$ con $C_0 \coloneqq Q$, $C_1 \coloneqq S$ e $C_i = 0$ se $i \notin \{0, 1\}$. Tensorizzando per A si ottiene il complesso $\underline{D}$,

$$0 \to S \otimes_\Lambda A \to Q \otimes_\Lambda A \to 0;$$

allora si ha $H_1(\underline{D}) = {}^{\ker \partial_1}/_{\operatorname{Im} \partial_2} = \mathrm{Tor}(B, A)$ e $H_0(\underline{D}) = B \otimes_\Lambda A$.

Definizione 3.12. Dato un complesso di catene $\underline{C}$ in cui i C_n sono gruppi abeliani di rango finito, banali per $n < 0$ o $n > N$, la *caratteristica di Euler* di $\underline{C}$ è $\chi \coloneqq \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \operatorname{rk} H_i = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \operatorname{rk} C_i$.

Teorema 3.13. *Data una successione esatta corta* $0 \to \underline{A} \xrightarrow{\varphi} \underline{B} \xrightarrow{\psi} \underline{C} \to 0$ *di complessi, cioè una successione esatta per ogni grado, esiste un omomorfismo* $\omega\colon H_\star(\underline{C}) \to H_\star(\underline{A})$ *di grado* -1 *tale che* $\omega \circ \psi_\star \circ \varphi_\star = \partial_{\underline{A}}$. *In particolare, si ottiene la successione esatta lunga di* Λ*-moduli*

$$\cdots \to H_{n+1}(\underline{C}) \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(\underline{A}) \to H_n(\underline{B}) \to H_n(\underline{C}) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(\underline{A}) \to \cdots.$$

Dimostrazione. Si deve definire ω_n sulla classe di un elemento $c \in C_n$ con $\partial_{\underline{C}}(c) = 0$. Per farlo si considera il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & & C_{n+1} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d] & B_n \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r] & 0 \\
 & A_{n-2} & & &
\end{tikzcd}$$

e si fa risalire l'elemento c fino a un elemento di A_{n-1}. $\square$

Esempio 3.14. Siano Λ un dominio a ideali principali e A un Λ-modulo destro; si considera una risoluzione proiettiva (quindi libera, dato che Λ è a ideali principali) $0 \to R \to F \to A \to 0$ e una successione esatta $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ di Λ-moduli. A partire dal complesso $0 \to R \to F \to 0$, applicando i funtori $\mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B')$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B)$ e $\mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B'')$, si ottiene il seguente diagramma commutativo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(F,B') & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(R,B') & \longrightarrow & 0 & & C' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(F,B) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(R,B) & \longrightarrow & 0 & & C \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(F,B'') & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(R,B'') & \longrightarrow & 0 & & C'' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & ,
\end{array}
$$

dove le successioni verticali sono esatte perché F e R sono liberi. Il diagramma dà una successione esatta $0 \to \underline{C'} \to \underline{C} \to \underline{C''} \to 0$ di complessi, la cui successione esatta lunga è

$$
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B'') \longrightarrow
$$
$$
\longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda(A,B') \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda(A,B'') \longrightarrow 0,
$$

cioè la successione esatta Hom-Ext nel caso in cui l'anello sia a ideali principali. Nel caso generale, la successione non si ferma al grado 1, dato che non è detto che A abbia risoluzioni proiettive finite.

Esempio 3.15. Sia Λ un dominio a ideali principali e $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ una successione esatta di Λ-moduli; come fatto nell'esempio precedente, data una presentazione proiettiva $0 \to R \to P \to A \to 0$ di A, si può ricavare la successione esatta

$$
0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_\Lambda(A,G') \longrightarrow \mathrm{Tor}_\Lambda(A,G) \longrightarrow \mathrm{Tor}_\Lambda(A,G'') \longrightarrow
$$
$$
\longrightarrow A \otimes_\Lambda G' \longrightarrow A \otimes_\Lambda G \longrightarrow A \otimes_\Lambda G'' \longrightarrow 0.
$$

Esercizio 3.16. Se Λ è un dominio a ideali principali, A e B sono due Λ-moduli e $T(A)$ e $T(B)$ sono le rispettive parti di torsione, allora $\mathrm{Tor}_\Lambda(A,B) \cong \mathrm{Tor}_\Lambda(T(A),T(B))$.

3.2 Omotopia

07/04/2008 - rivedere
Decima lezione

Siano $\underline{C}$ e $\underline{D}$ due complessi, φ e ψ due morfismi di complessi $\underline{C} \to \underline{D}$. La prima cosa che ci si può chiedere è quando $\varphi_\star$ e $\psi_\star$, mappe da $H_\star(\underline{C})$ a $H_\star(\underline{D})$, sono uguali. Una condizione sufficiente, ma non necessaria, è l'esistenza di una *omotopia* tra φ e ψ.

Definizione 3.17. Siano $\underline{C}$ e $\underline{D}$ due complessi, $\varphi, \psi \colon \underline{C} \to \underline{D}$ morfismi di complessi. Un'*omotopia* Σ tra φ e ψ è un omomorfismo $\Sigma \colon \underline{C} \to \underline{D}$ di grado 1 tale che $\psi - \varphi = \partial\Sigma + \Sigma\partial$ (o, più precisamente, $\psi_n - \varphi_n = \partial_{D\,n+1}\Sigma_n + \partial_{C\,n}\Sigma_{n-1}$ per ogni n). Se φ e ψ sono omotope, si scriverà $\varphi \simeq \psi$.

Osservazione 3.18. Il concetto di omotopia ha origine nella topologia algebrica, dove un'omotopia (topologica) tra $f, g \colon X \to Y$ è una mappa $\vartheta \colon X \times [0,1] \to Y$

che dà un'omotopia, nel senso della definizione 3.17, tra i complessi singolari di X e Y. Il senso è che, data una mappa $f\colon X \to Y$, una sua piccola deformazione non cambia ciò che si vede nell'omologia, che è una struttura essenzialmente discreta.

Sia $\mathrm{Hom}(\underline{C}, \underline{D})$ l'insieme degli omomorfismi di moduli graduati da $\underline{C}$ a $\underline{D}$. Data questa struttura di grado, si vorrebbe rendere $\mathrm{Hom}(\underline{C}, \underline{D})$ un complesso e per farlo è necessario definire un bordo. Sia quindi $f\colon \underline{C} \to \underline{D}$ un omomorfismo di moduli graduati di grado ν; allora $\partial(f)$ deve essere un omomorfismo di grado $n-1$. Per avere $\partial^2 = 0$, si definisce $\partial(f)$ come $\partial \circ f - (-1)^n f \circ \partial$. I cicli di questo nuovo complesso, cioè $Z_0(\mathrm{Hom}(\underline{C}, \underline{D}), \partial)$ sono gli omomorfismi f di grado 0 tali che $\partial f = 0$, cioè $\partial f = f\partial$: $Z_0(\mathrm{Hom}(\underline{C}, \underline{D}), \partial)$ è costituito dai morfismi di complessi. Allora i morfismi di complessi $\varphi, \psi\colon \underline{C} \to \underline{D}$ inducono lo stesso elemento in omologia se e solo se esiste s di grado 1 tale che $\partial s = \psi - \varphi$, cioè se e solo se $\partial s - (-1)^1 s\partial = \psi - \varphi$, cioè se e solo se esiste un'omotopia tra loro. Questo in qualche modo giustifica la definizione di omotopia.

Proposizione 3.19. *Se φ e ψ sono omotope, allora $H(\varphi) = H(\psi)\colon H_\star(\underline{C}) \to H_\star(\underline{D})$.*

Fatto 3.20.

1. L'omotopia è una relazione d'equivalenza.
2. Se $F\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ è un funtore additivo, $\underline{C}$ e $\underline{D}$ sono complessi di Λ-moduli e $\varphi, \psi\colon \underline{C} \to \underline{D}$, allora $\varphi \simeq \psi$ implica $F(\varphi) \simeq F(\psi)$ e in particolare $H(F(\varphi)) = H(F(\psi))$.

Osservazione 3.21. Si possono dare diverse definizioni di "uguaglianza" tra due complessi, dalla più stretta (richiedere che grado per grado le componenti siano le stesse), alla più lasca (due complessi sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due morfismi φ e ϑ nelle direzioni opposte le cui composizioni sono omotope all'identità).

Esempio 3.22. Come si era anticipato, avere un'omotopia è una condizione sufficiente ma non necessaria perché due morfismi di complessi siano uguali in omologia. Per esempio, si considera il seguente diagramma, dove le righe sono due complessi:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "p\bullet"] \arrow[d, bend right, "\varphi_1"'] \arrow[d, bend left, "\psi_1"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

con $\varphi_1 = \mathrm{Id}_\mathbb{Z}$ e $\psi_1 = 0$ è la mappa nulla. Tensorizzando per $\mathbb{Z}_p$, la mappa orizzontale diventa nulla e quindi φ e ψ non possono essere omotope. Tuttavia si mostra che in omologia i morfismi indotti sono gli stessi.

3.3 Funtori derivati

Sia T un funtore covariante additivo $\mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$; a partire da F, si vuole costruire una famiglia L_nT di funtori. Dato un Λ-modulo A, sia

$$\ldots \to P_n \to \ldots \to P_1 \xrightarrow{\vartheta} P_0 \to 0$$

una sua *risoluzione proiettiva*, cioè una successione tale che:

1. i P_i sono proiettivi;
2. $\operatorname{coker} \vartheta = H_0(\underline{P}) = A$;
3. per ogni $i \geq 1$, è esatta in P_i.

Si osserva che se Λ è un domino a ideali principali, allora già le successioni $0 \to R \to P \to 0$ viste in precedenza erano risoluzioni proiettive. L'omologia di una risoluzione proiettiva è banale, essendo esatta per ogni $i \geq 1$; però se si applica T si perde (in generale) l'esattezza e si può ottenere un'omologia non banale. Si definisce allora $L_nT(A)$ come $H_n(T(\underline{P}))$; così definito, $L_nT$si dimostrerà essere un funtore, detto *n-esimo funtore derivato sinistro di T*. Allo stesso modo, se T è controvariante, si ottengono i funtori derivati destri R^nT.

Esempio 3.23. Siano G un gruppo, $\mathbb{Z}[G]$ la sua algebra e A uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo. Allora $H^n(G, A) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ è detta *coomologia di gruppo* di G.

A questo punto bisogna dimostrare che questa costruzione è ben definita.

Definizione 3.24. Una *risoluzione* è un complesso $\underline{C}$:

1. positivo, cioè $C_n = 0$ per $n < 0$;
2. aciclico, cioè tale che $H_i(\underline{C}) = 0$ per ogni $i > 0$;

$\underline{C}$ è *proiettiva* se ogni C_i è proiettivo. Una risoluzione è detta *risoluzione di A* se $H_0(\underline{C}) = A$.

Teorema 3.25. *Siano $\underline{C}$ un complesso aciclico, positivo, proiettivo e $\underline{D}$ un complesso aciclico e positivo; allora per ogni $\varphi\colon H_0(\underline{C}) \to H_0(\underline{D})$, esiste un morfismo $f\colon \underline{C} \to \underline{D}$ che solleva φ; inoltre due sollevamenti di φ sono collegati da un'omotopia.*

08/04/2008 - rivedere
Undicesima lezione

Si vogliono confrontare le proprietà di esistenza di una risoluzione proiettiva e di una presentazione proiettiva. Se A è un Λ-modulo, e $0 \to R_1 \to P \to A \to 0$ è una presentazione proiettiva, si può considerare una presentazione proiettiva di R_1, $0 \to R_2 \to P_1 \to R_1 \to 0$, e così via una presentazione proiettiva per ogni R_i. A partire da queste, si ottiene una risoluzione proiettiva di A:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0. \\
\cdots \arrow[ur] & & R_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & R_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Viceversa, se $\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P \to 0$ è una risoluzione proiettiva di A, allora $0 \to \operatorname{Im} \partial_1 \to P \to A \to 0$ è una presentazione proiettiva di A.

Osservazione 3.26. Nella categoria $\mathfrak{M}_\Lambda$ si può costruire una risoluzione proiettiva di ogni oggetto. A partire da questa, si può costruire per ogni oggetto una presentazione proiettiva (iniettiva). Una categoria con queste proprietà si dice avere *abbastanza proiettivi.*

Perché la costruzione di funtore derivato sia ben posta, è necessario che non dipenda dalla scelta della risoluzione proiettiva.

Proposizione 3.27. *Due risoluzioni proiettive dello stesso Λ-modulo A hanno lo stesso tipo di omotopia.*

Dimostrazione. Siano $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ due risoluzioni proiettive di A; per il teorema 3.25, si può sollevare l'identità in entrambe le direzioni, ottenendo due morfismi $\varphi\colon \underline{P} \to \underline{Q}$ e $\psi\colon \underline{Q} \to \underline{P}$. Sicuramente, $\psi \circ \varphi\colon \underline{P} \to \underline{P}$ è il sollevamento dell'identità'; però, anche $\mathrm{Id}_{\underline{P}}$ è un sollevamento dell'identità, quindi $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{Id}_{\underline{P}}$. Analogamente, $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_{\underline{Q}}$. □

Si può procedere analogamente considerando le *risoluzioni iniettive*, cioè considerando complessi di cocatene $\overline{C}$ positivi, aciclici, tali che $H^0(\overline{C}) \cong A$ e costituiti da moduli iniettivi.

Ora si dimostrerà la buona definizione dei funtori derivati. Sia quindi $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ un funtore additivo. Per semplicità si considera il caso in cui T è covariante. Dato A, si costruisce una sua risoluzione proiettiva $\underline{P}$, si considera il complesso $T(\underline{P})$ e si definisce $L_nT(A) \coloneqq H_n(T(\underline{P}))$. Si considera un altro A' con la sua risoluzione proiettiva $\underline{P}'$ e un omomorfismo $\alpha\colon A \to A'$. Allora α si solleva a un morfismo $\underline{\alpha}\colon \underline{P} \to \underline{P}'$. Questo morfismo non è univoco, ma tutti i vari morfismi sollevamento sono omotopi, così come i $T(\underline{\alpha})$ (per l'additività di T); quindi si determina un unico omomorfismo

$$\alpha(\underline{P}, \underline{P}')\colon H_\star(T(\underline{P})) \to H_\star(T(\underline{P}'))$$

in omologia, che non dipende dal sollevamento. Per le proprietà dei sollevamenti, questa associazione è funtoriale (cioè, data $\alpha'\colon A' \to A''$, $\alpha'(\underline{P}', \underline{P}'') \circ \alpha(\underline{P}, \underline{P}') = (\alpha' \circ \alpha)(\underline{P}, \underline{P}'')$ e $\mathrm{Id}_A(\underline{P}, \underline{P}) = \mathrm{Id}_{H_\star(T(\underline{P}))}$).

Proposizione 3.28. *Siano $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ due risoluzioni proiettive di A, allora esiste un isomorfismo $L_n^{\underline{P}}T(A) \to L_n^{\underline{Q}}T(A)$.*

Dimostrazione. Si considera un sollevamento $\eta\colon \underline{P} \to \underline{Q}$ di Id_A; η dà una ben definita equivalenza omotopica tra $\underline{P}$ e $\underline{Q}$, che passa a una equivalenza omotopica tra $T(\underline{P})$ e $T(\underline{Q})$. □

In realtà, questa corrispondenza η è canonica, cioè realizza un'equivalenza naturale che identifica tutti i gruppi $L_n^{\underline{P}}T(A)$ al variare della risoluzione proiettiva. Si può quindi scrivere direttamente $L_nT(A)$. Ora, data $\alpha\colon A \to A'$ bisogna costruire $\alpha_\star\colon L_nT(A) \to L_nT(A')$; per costruirla, si riusa lo stesso procedimento visto in precedenza, definendo $\alpha_\star \coloneqq \alpha(\underline{P}, \underline{P}')$ per qualche risoluzione proiettiva $\underline{P}$ di A e $\underline{P}'$ di A'. Rimarrebbe solo da dimostrare che $\alpha(\underline{P}, \underline{P}')$ è indipendente dalle identificazioni η.

3.4 Le due successioni esatte lunghe dei funtori derivati

Teorema 3.29. *Sia $T\colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ un funtore additivo e sia $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ una successione esatta corta; allora per ogni $n \geq 1$ esiste un omomorfismo di connessione*

$$\omega_n\colon L_nT(A'') \to L_{n-1}T(A')$$

tale che la successione

$$\begin{aligned} \cdots \to L_nT(A') \to L_nT(A) \to L_nT(A'') \xrightarrow{\omega_n} \\ \xrightarrow{\omega_n} L_{n-1}T(A') \to L_{n-1}T(A) \to L_{n-1}T(A'') \xrightarrow{\omega_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\omega_1} \\ \xrightarrow{\omega_1} L_0T(A') \to L_0T(A) \to L_0T(A'') \to 0 \end{aligned}$$

è esatta.

Dimostrazione. Per avere una successione esatta lunga come quella dell'enunciato è necessario che esistano delle risoluzioni proiettive $\underline{P}'$, $\underline{P}$ e $\underline{P}''$ tali che $0 \to T(\underline{P}') \to T(\underline{P}) \to T(\underline{P}'') \to 0$ sia esatta. Poiché T è additivo, preserva le somme dirette, quindi basterebbe che $\underline{P}$ fosse la somma diretta di $\underline{P}'$ e $\underline{P}''$. In effetti, si dimostrerà la seguente: se P' e P'' sono risoluzioni proiettive di A' e A'', allora esiste un morfismo $\varepsilon\colon P_0 := P_0' \oplus P_0'' \to A$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & P_0' \oplus P_0'' \arrow[d, equal] \arrow[dr, "\pi"] & & \\
 & P_0' \arrow[ur, "i"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P_0 \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & P_0'' \arrow[d, "\varepsilon''"'] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Per costruire ε, si considera, per proiettività, un morfismo $\vartheta\colon P_0'' \to A$ che mantiene il diagramma commutativo e si definiscono $\varepsilon(a', 0) := \varphi\varepsilon'(a')$ e $\varepsilon(0, a'') := \vartheta(a'')$. Poiché ε' e ε'' sono suriettive, lo è anche ε. Inoltre, per il lemma del serpente si ha anche una successione esatta $0 \to \ker\varepsilon' \to \ker\varepsilon \to \ker\varepsilon'' \to 0$ e si può iterare il procedimento costruendo $\underline{P} \cong \underline{P}' \oplus \underline{P}''$. Se si erano scelte due risoluzioni proiettive diverse per A' e A'', si possono comunque sollevare le identità ottenendo morfismi omotopi tra loro che in omologia danno lo stesso morfismo. $\square$

Esempio 3.30. Se T è il funtore controvariante $\mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B)$, prendendo una risoluzione proiettiva $\underline{P}$ di A, applicando T si deve poi fare la coomologia, ottenendo il funtore derivato destro di T, $R_nT(A) := H^n(T(\underline{P}))$. Il funtore derivato destro che si ottiene è $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B)$. Data una successione esatta lunga $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, la corrispondente successione esatta lunga è

$$\begin{aligned}
0 \to \mathrm{Ext}^0_\Lambda(A'', B) \to \mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Ext}^0_\Lambda(A', B) \to \\
\to \cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(A'', B) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(A', B) \to \\
\to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A'', B) \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A', B) \to \cdots .
\end{aligned}$$

In realtà, è chiaro che $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, B) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$; inoltre si può dimostrare (si veda proposizione 3.31)che $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) \cong \mathrm{Ext}_\Lambda(A, B)$, quindi si può riscrivere la successione esatta lunga con questi dati.

Proposizione 3.31. *Sia* $0 \to K_q \xrightarrow{\mu} P_{q-1} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$ *una successione esatta con* P_i *proiettivi, e sia* T *un funtore additivo; sia* $L_n^{\underline{P}}T(A)$ *l'oggetto calcolato come il funtore derivato sinistro però partendo dalla successione data invece che da una risoluzione proiettiva; allora* $L_n^{\underline{P}}T(A) = L_nT(A)$ *per ogni* $n < q$*; inoltre se* T *è esatto a destra e* $q \geq 1$*, allora la successione* $0 \to L_qT(A) \to T(K_q) \to T(P_{q-1})$ *è esatta, cioè* $L_qT(A)$ *è il nucleo di* $T(\mu)$*.*

Dimostrazione. Per esercizio (è un'applicazione del lemma del serpente). $\square$

21/04/2008 - rivedere
Dodicesima lezione

Definizione 3.32. Siano $T', T, T'' \colon \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ legati dalle trasformazioni naturali $T' \xrightarrow{\tau'} T \xrightarrow{\tau''} T''$. Questa successione si dice *esatta sui proiettivi* se per ogni Λ-modulo proiettivo P, la corrispondente successione

$$0 \to T'(P) \to T(P) \to T''(P) \to 0$$

è esatta.

Data una successione esatta $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$, la successione

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B'')$$

è esatta sui proiettivi per definizione di modulo proiettivo; allo stesso modo, data una successione esatta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, la successione

$$A' \otimes_\Lambda \bullet \to A \otimes_\Lambda \bullet \to A'' \otimes_\Lambda \bullet$$

è esatta sui proiettivi perché i proiettivi sono piatti.

Teorema 3.33. *Sia $T' \xrightarrow{\tau'} T \xrightarrow{\tau''} T''$ una successione di funtori esatta sui proiettivi; allora per ogni Λ-modulo A, si hanno degli omomorfismi di connessione $\omega_n \colon L_n T'' A \to L_{n-1} T' A$ tali che*

$$\begin{aligned} \cdots \to L_n T'(A) \to L_n T(A) \to L_n T''(A) \xrightarrow{\omega_n} \\ \xrightarrow{\omega_n} L_{n-1} T'(A) \to L_{n-1} T(A) \to L_{n-1} T''(A) \xrightarrow{\omega_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\omega_1} \\ \xrightarrow{\omega_1} L_0 T'(A) \to L_0 T(A) \to L_0 T''(A) \to 0 \end{aligned}$$

è esatta.

Dimostrazione. Sia $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0$ una risoluzione proiettiva di A; allora si ha il diagramma

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ \cdots \arrow[r] & T'(P_2) \arrow[r] \arrow[d] & T'(P_1) \arrow[r] \arrow[d] & T'(P_0) \arrow[d] \\ \cdots \arrow[r] & T(P_2) \arrow[r] \arrow[d] & T(P_1) \arrow[r] \arrow[d] & T(P_0) \arrow[d] \\ \cdots \arrow[r] & T''(P_2) \arrow[r] \arrow[d] & T''(P_1) \arrow[r] \arrow[d] & T''(P_0) \arrow[d] \\ & 0 & 0 & 0. \end{tikzcd}$$

Da questo si ottiene la dimostrazione. □

Esempio 3.34. Data $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$, la successione lunga corrispondente a $\mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, B'')$ è

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, B') \to \mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Ext}^0_\Lambda(A, B'') \to \\ \to \cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(A, B') \to \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(A, B'') \to \\ \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B') \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B) \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B'') \to \cdots. \end{aligned}$$

Per costruire $\operatorname{Ext}_\Lambda^n(A,B)$ si è partiti da una risoluzione proiettiva di A, a cui si applica $\operatorname{Hom}_\Lambda(\bullet, B)$ e si prende la coomologia n-esima. Si può costruire anche un funtore $\overline{\operatorname{Ext}}_\Lambda^n(A,B)$, prendendo una risoluzione iniettiva di B, applicando $\operatorname{Hom}_\Lambda(A,\bullet)$ e prendendo la coomologia n-esima.

Proposizione 3.35. *I funtori* $\operatorname{Ext}_\Lambda^n$ *e* $\overline{\operatorname{Ext}}_\Lambda^n$ *sono naturalmente equivalenti.*

Il fatto che il funtore $\operatorname{Ext}_\Lambda^n$ può essere costruito sia come $R_n \operatorname{Hom}(A,\bullet)(B)$ che come $L_n \operatorname{Hom}(\bullet, B)(A)$ si indica dicendo che $\operatorname{Ext}_\Lambda^n$ è *bilanciato*.

Si vuole generalizzare il funtore Tor come si è fatto per il funtore Ext. Si deve perciò definire $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A,B)$ dove A è un Λ-modulo destro e B è un Λ-modulo sinistro. Allora si prende una risoluzione proiettiva di B, si applica il funtore $A \otimes_\Lambda \bullet$ e si prende l'n-esima omologia (perché questa volta il funtore additivo è covariante); questa è la definizione di $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A,B)$, cioè $L_n(A\otimes_\Lambda \bullet)(B)$. Anche in questo caso, si ottiene un funtore naturalmente equivalente a Tor_n^Λ prendendo una risoluzione iniettiva di A, applicando $\bullet \otimes_\Lambda B$ e considerando l'n-esima omologia. In particolare, anche $\operatorname{Tor}_n^\Lambda$ è bilanciato.

Esempio 3.36. Se P è un Λ-modulo proiettivo, $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(P,B) = 0$ per ogni $n \geq 1$.

Esempio 3.37. In generale, $\operatorname{Tor}_0^\Lambda(A,B) \cong A \otimes_\Lambda B$ poiché il funtore $A\otimes_\Lambda \bullet$ è esatto a destra. Grazie alla proposizione 3.31, si dimostra che $\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A,B) \cong \operatorname{Tor}(A,B)$.

Esercizio 3.38. Scrivere le due successioni esatte lunghe del funtore derivato $\operatorname{Tor}_n^\Lambda$.

4 Coomologia di gruppi

Definizione 4.1. Dato un gruppo G e uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo sinistro A, si definisce la *coomologia n-esima* di G a valori in A come

$$H^n(G,A) \coloneqq \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A),$$

dove $\mathbb{Z}$ è inteso come $\mathbb{Z}[G]$-modulo sinistro banale.

Osservazione 4.2. Un richiamo di teoria delle rappresentazioni: a un'azione $G \to \operatorname{Aut}(A)$ corrisponde un'azione $\mathbb{Z}[G] \to \operatorname{End}(A)$; dire che A è uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale, significa che tutto G agisce come l'identità su A; di conseguenza, l'azione di $\mathbb{Z}[G]$ sarà costituita da somme algebriche di operatori identità.

Definizione 4.3. Dato un gruppo G e uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo destro B, si definisce la *omologia n-esima* di G a valori in B come

$$H_n(G,B) \coloneqq \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(B, \mathbb{Z}),$$

dove $\mathbb{Z}$ è inteso come $\mathbb{Z}[G]$-modulo sinistro banale.

Si indicherà l'elemento della base di $\mathbb{Z}[G]$ corrispondente a $g \in G$ ancora con g. Se $\mathbb{Z}$ è uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale, allora $\sum_{g\in G} m_g g$ agisce su $\mathbb{Z}$ come la moltiplicazione per $\sum_{g \in G} m_g$.

Definizione 4.4. L'omomorfismo suriettivo

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon\colon & \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \sum_{g\in G} m_g g & \longmapsto & \sum_{g\in G} m_g \end{array}$$

è detta *augmentazione*. Il nucleo di ε è detto *ideale di augmentazione* ed è indicato con I_G.

Teorema 4.5. *L'ideale di augmentazione è un gruppo abeliano libero generato da $g - e$ per $g \in G \setminus \{e\}$. Inoltre, se S' è un insieme di generatori di G, I_G è generato su $\mathbb{Z}[G]$ da $S \coloneqq \{ s - e \mid s \in S' \}$.*

Dimostrazione. Sicuramente, $\varepsilon(g - e) = 0$; se $\sum_{g \in G} m_g g \mapsto 0$, allora $\sum_{g \in G} m_g = 0$ e in particolare $\sum_{g \in G} m_g e = 0$. Quindi

$$\sum_{g \in G} m_g g = \sum_{g \in G} m_g g - \sum_{g \in G} m_g e = \sum_{g \in G} m_g (g - e) = \sum_{g \in G \setminus \{e\}} m_g (g - e).$$

Per la seconda affermazione, si osserva che $gh - e = g(h - e) + (g - e)$ e che $g^{-1} - e = -g^{-1}(g - 1)$. □

Data una successione esatta corta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ di $\mathbb{Z}[G]$-moduli, grazie alla seconda delle due successioni esatte lunghe per i funtori derivati, si ottiene la successione esatta lunga

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(G, A') \to H^0(G, A) \to H^0(G, A'') \to \\ \to \cdots \to H^{n-1}(G, A') \to H^{n-1}(G, A) \to H^{n-1}(G, A'') \to \\ \to H^n(G, A') \to H^n(G, A) \to H^n(G, A'') \to \cdots; \end{aligned}$$

allo stesso modo per l'omologia si ha

$$\begin{aligned} \cdots \to H_n(G, B'') \to H_n(G, B) \to H_n(G, B') \to \\ \to H_{n-1}(G, B'') \to H_{n-1}(G, B) \to H_{n-1}(G, B') \to \cdots \to \\ \to H_0(G, B'') \to H_0(G, B) \to H_0(G, B') \to 0. \end{aligned}$$

Osservazione 4.6. Se A è iniettivo, allora $H^n(G, A) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Se B è proiettivo, o anche solo piatto, $H_n(G, B) = 0$ per ogni $n \geq 1$.

Per definizione, $H^0(G, A) = \operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$. Un omomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Z} \to A$ come $\mathbb{Z}[G]$-moduli è innanzitutto un omomorfismo di gruppi abeliani, quindi è determinato da $\varphi(1)$; inoltre, deve valere $\varphi(g1) = g\varphi(1)$; poiché $\mathbb{Z}$ è uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale, $\varphi(g1) = \varphi(1)$ e la condizione diventa $\varphi(1) = g\varphi(1)$, cioè l'azione di g su A deve fissare $\varphi(1)$. Allora $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ è isomorfo al gruppo degli invarianti A^G di A rispetto a G.

Viceversa, $H_0(G, B) = \operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}[G]}(B, \mathbb{Z}) = B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$. Si può interpretare questo tensore quozientando $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ per le relazioni aggiuntive, cioè per le relazioni $bg \otimes 1 = b \otimes g1$; quest'ultimo però è $b \otimes 1$ perché $\mathbb{Z}$ è uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale. Ora, $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong B$, quindi rileggendo il quoziente dentro B si ottiene $B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong B/(bg - b) = B/BI_G$.

4.1 La prima omologia nel caso di azione banale

22/04/2008
Tredicesima lezione

Si vuole calcolare $H_1(G, B)$ nel caso G agisca banalmente su B. Si deve quindi calcolare $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(B, \mathbb{Z})$; poiché interessa solo il primo funtore derivato, invece di una risoluzione proiettiva di $\mathbb{Z}$ si può usare solo una presentazione proiettiva, grazie alla proposizione 3.31. Una presentazione $\mathbb{Z}[G]$-proiettiva di $\mathbb{Z}$ è

$$0 \to I_G \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{t} \mathbb{Z} \to 0;$$

per la proposizione, si ha

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(B,\mathbb{Z}) \to B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_G \to B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \to B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \to 0,$$

cioè $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(B,\mathbb{Z})$ è il nucleo dell'omomorfismo $\mathrm{Id}_B \otimes i$, la cui immagine è contenuta in $B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \cong B$. Dato che I_G è generato da $g-e$ per $g \neq e$, per comprendere $\mathrm{Id}_B \otimes i$ è necessario valutarlo su questi elementi: $(\mathrm{Id} \otimes i)(b \otimes (g-e))$, letto in B, è $bg - b$. Ora si usa l'ipotesi: dato che B è uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale, $bg = b$ e quindi $\mathrm{Id}_B \otimes i$ è l'omomorfismo nullo; di conseguenza, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(B,\mathbb{Z}) = B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_G$. Con un procedimento già incontrato, $B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_G$ è isomorfo a $B \otimes_{\mathbb{Z}} I_G$ quozientato per le relazioni $b \otimes h(g-e) = bh \otimes (g-e)$; ma quest'ultimo è uguale a $b \otimes (g-e)$; allora queste relazioni si possono scrivere come $b \otimes (h-e)(g-e) = 0$, cioè

$$B \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I_G \cong {}^{B \otimes_{\mathbb{Z}} I_G}/_{B \otimes_{\mathbb{Z}} I_G^2} \cong B \otimes_{\mathbb{Z}} {}^{I_G}/_{I_G^2}.$$

Lemma 4.7. *Il quoziente di I_G per I_G^2 è isomorfo all'abelianizzato di G, G_{ab}.*

Dimostrazione. Si considera l'omomorfismo $\psi\colon {}^{I_G}/_{I_G^2} \to G_{\mathrm{ab}} = {}^{G}/_{G'}$, dove G' è il gruppo dei commutatori, definita da $\psi(g-e) := gG'$. Bisogna innanzitutto verificare che ψ è ben definita, cioè che $\psi(I_G^2) = 0$. Infatti,

$$(h-e)(g-e) = (hg-e) - (h-e) - (g-e) \mapsto (hgG')(h^{-1}G')(g^{-1}G').$$

Per mostrare che è un isomorfismo, si definisce l'inversa, che manda $g \in G$ in $(g-e) + I_G^2$. Per esercizio, completare le verifiche. $\square$

Grazie al lemma, $H_1(G,B) \cong B \otimes_{\mathbb{Z}} G_{\mathrm{ab}}$. In particolare, se $B := \mathbb{Z}$, $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G_{\mathrm{ab}}$. Questo ricorda la relazione che sussiste tra il gruppo fondamentale di una varietà e la prima omologia singolare, che appunto è isomorfa all'abelianizzato del gruppo fondamentale.

Esercizio 4.8. Si possono ripetere queste considerazioni per $H^1(G,A)$, se G agisce banalmente su A; si verifica che $H^1(G,A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(G,\mathbb{Z}),A)$.

4.2 Digressione topologica

Ogni spazio topologico si supporrà essere connesso per archi e localmente semplicemente connesso.

Definizione 4.9. Uno spazio topologico X si dice *n-connesso* se $\pi_1(X) = \{e\}$ per $1 \leq i \leq n$.

Teorema 4.10. *Se X è uno spazio topologico il cui rivestimento universale $\tilde{X}$ è n-connesso, con $n \geq 1$, allora, per $1 \leq i \leq n$, $H_i(X,\mathbb{Z}) \cong H_i(\pi_1(X),\mathbb{Z})$, dove il secondo membro è la coomologia di gruppi con azione banale su $\mathbb{Z}$; inoltre, si ha una successione esatta*

$$\pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X,\mathbb{Z}) \to H_{n+1}(\pi_1(X),\mathbb{Z}) \to 0.$$

Esempio 4.11. Se si applica il teorema con $n = 1$, si richiede soltanto che esista il rivestimento universale (dato che se esiste, sicuramente è 1-connesso); in questo caso, il teorema dà informazioni sulla prima e sulla seconda omologia (ed è dovuto a Hopf, 1942).

Definizione 4.12. Uno spazio topologico X è detto *asferico* se ammette rivestimento universale $\tilde{X}$ con $\pi_i(\tilde{X}) = \{e\}$ per ogni $i \geq 1$.

In uno spazio asferico, l'omologia è dunque completamente determinata dal gruppo fondamentale. Un esempio di spazio asferico è il seguente.

Definizione 4.13. Uno spazio topologico è detto $K(\pi, 1)$ se $\pi_i(X) = \{e\}$ per ogni $i > 1$ e $\pi_1(X) \cong \pi$.

Per esempio, S^1 è $K(\mathbb{Z}, 1)$: si considera la successione esatta lunga di omotopia relativa alla fibrazione $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to S^1 \to 0$, da cui si ottiene

$$\{e\} = \pi_i(\mathbb{R}) \to \pi_i(S^1) \to \pi_{i-1}(\mathbb{Z}) = \{e\}$$

per ogni $i \geq 2$.

Definizione 4.14. Uno spazio topologico X è *di Eilemberg-MacLane* di tipo $K(G, n)$ se $\pi_n(X) \cong G$ e $\pi_i(X) \cong \{e\}$ per ogni $i \neq n$.

Teorema 4.15.

1. *Per ogni gruppo G esiste uno spazio $K(G, 1)$.*
2. *Per ogni gruppo abeliano G esiste uno spazio $K(G, n)$.*
3. *Due spazi $K(G, n)$ hanno lo stesso tipo di omotopia.*

Teorema 4.16 (Kan-Thurston, 1976)**.** *Per ogni spazio connesso X esistono un gruppo G e una mappa $\varphi\colon K(G, 1) \to X$ che induce un isomorfismo nell'omologia intera.*

Quindi per determinare l'omologia di X si potrebbero trovare il gruppo G e lo spazio $K(G, 1)$; questo spazio, essendo asferico, ha l'omologia completamente determinata dal gruppo fondamentale.

Esempio 4.17. Sia G un gruppo finito generato da simmetrie in $\mathbb{R}^n$; per esempio, il gruppo generato dalle simmetrie rispetto agli iperpiani $H_{i,j} \coloneqq (x_i - x_j = 0)$ è il gruppo simmetrico S_n, dato che queste simmetrie permutano le coordinate. Si considera $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$ e si definisce M come il complementare in $\mathbb{C}^n$ di $\bigcup H_{i,j} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Per un teorema di Deligne, M è uno spazio $K(\pi, 1)$.

Ora, un laccio in M è una mappa $t \mapsto (a_1(t), \dots a_n(t))$. Si ha $a_i(t) \neq a_j(t)$ per ogni $i \neq j$ e per ogni $t \in [0, 1]$. Inoltre, $a_i(0) = a_i(1)$: allora le a_i definiscono n lacciî in $\mathbb{C}$ che non si intersecano mai; possono essere interpretati come un elemento del gruppo delle trecce pure (perché il punto di origine e di termine coincidono) di ordine n.

Se si considera invece il quoziente M/S_n, le trecce che si ottengono non sono più pure e generano il gruppo delle trecce $B(n)$. Se si manda questo spazio in $\mathbb{C}^\star$ tramite

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2,$$

si ottiene la *fibrazione di Milnor*:

$$0 \to F \to M/S_n \to \mathbb{C}^\star \to 0.$$

Quando si ha una situazione di questo tipo, si ottiene $H_i(B(n), \mathbb{Z}[q, q^{-1}]) \cong H_i(F, \mathbb{Z})$ dove la prima è una coomologia di gruppi con azione non banale del gruppo delle trecce $B(n)$ su $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. *TODO*

4.3 La prima coomologia

Definizione 4.18. Siano G un gruppo e A uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo qualsiasi. Una *derivazione* di G in A è una funzione $\varphi\colon G \to A$ tale che $\varphi(gh) = \varphi(g) + g\varphi(h)$. Le derivazioni formano un gruppo abeliano, denotato con $\mathrm{Der}(G, A)$.

Osservazione 4.19. Se φ è una derivazione, $\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e) + e\varphi(e) = 2\varphi(e)$, da cui $\varphi(e) = 0$.

Si può vedere $\mathrm{Der}(G, \bullet)$ come un funtore $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}[G]} \to \mathfrak{Ab}$. Questo funtore è rappresentabile, cioè esiste uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo B tale che $\mathrm{Der}(G, \bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B, \bullet)$.

Teorema 4.20. *Il funtore* $\mathrm{Der}(G, \bullet)$ *è rappresentato da* I_G.

Dimostrazione. Si deve associare un omomorfismo $I_G \to A$ a una derivazione di G in A e viceversa. Alla derivazione d si associa l'omomorfismo φ tale che $\varphi(g-e) = d(g)$; viceversa, a un omomorfismo $\varphi\colon I_G \to A$ si associa la derivazione d tale che $d(g) = \varphi(g - e)$. Queste due mappe sono ben definite e sono l'una l'inversa dell'altra. $\square$

Definizione 4.21. Dato $a \in A$, la *derivazione interna* relativa ad a è la mappa $d_a\colon G \to A\colon g \mapsto (g - e)a$. Il gruppo delle derivazioni interne si denota con $\mathrm{IDer}(G, A)$.

Una derivazione interna è una derivazione: infatti $d_a(gh) = (gh-e)a$, mentre

$$d_a(g) + gd_a(h) = (g - e)a + g(h - e)a = ga - a + gha - ga = (gh - e)a.$$

Ora si può calcolare $H^1(G, A) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ a partire dalla presentazione proiettiva

$$0 \to I_G \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0;$$

applicando $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\bullet, A)$ si ottiene la successione

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \xrightarrow{i^\star} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(I_G, A) \to H^1(G, A) \to 0;$$

da questa, si ottiene

$$H^1(G, A) \cong \frac{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(I_G, A)}{i^\star \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A)} \cong \frac{\mathrm{Der}(G, A)}{\mathrm{IDer}(G, A)}.$$

Esempio 4.22. Si considera C_m, il gruppo ciclico di ordine m, generato da x; l'azione di C_m su $\mathbb{Z}_r^m$ si definisce ponendo

$$x(a_1, \ldots, a_m) \coloneqq (a_m, a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

Si vuole calcolare $H^1(C_m, \mathbb{Z}_r^m)$; una derivazione $d \in \mathrm{Der}(C_m, \mathbb{Z}_r^m)$ deve soddisfare

$$\begin{aligned}
d(e) &= 0,\\
d(x^2) &= d(x) + xd(x),\\
d(x^3) &= d(x) + xd(x^2) = d(x) + xd(x) + x^2 d(x),\\
&\;\vdots\\
d(x^m) &= d(x) + xd(x) + \cdots + x^{m-1}d(x);
\end{aligned}$$

poiché $x^m = e$, deve verificarsi $0 = d(x^m)$. Questa è l'unica richiesta per una derivazione: $d(x)$ deve essere un elemento di $(a_1, \dots, a_m)$ tale che $\sum a_i = 0$ (per com'è definita l'azione su $\mathbb{Z}_r^m$).

Una derivazione interna invece è $d_b(x) \coloneqq (x - e)b$ per $b \in \mathbb{Z}_r^m$. Quindi

$$H^1(C_m, \mathbb{Z}_r^m) \cong \frac{\{\, (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}_r^m \mid \sum a_i = 0 \,\}}{\{\, (x - e)b \mid b \in \mathbb{Z}_r^m \,\}}.$$

Se r è primo, $\mathbb{Z}_r$ è un campo e sia le derivazioni che le derivazioni interne formano due spazi vettoriali. Quello delle derivazioni ha chiaramente dimensione $m - 1$, ma anche quello delle derivazioni interne, dato che queste appartengono all'immagine della mappa $(x - e)\colon \mathbb{Z}_r^m \to \mathbb{Z}_r^m$, la cui matrice è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

di rango $m - 1$. Dunque $H^1(C_m, \mathbb{Z}_r^m) = \{0\}$; concludere (con lo stesso esito) anche nel caso in cui r non sia primo.

Esercizio 4.23. Calcolare $H^1(C_2, \mathbb{Z})$, dove $C_2 \coloneqq \{e, x\}$ e l'azione di C_2 su $\mathbb{Z}$ è data da $xn \coloneqq -n$.

Esempio 4.24. Si vuole calcolare $H_n(C_m, \mathbb{Z})$, dove C_m agisce banalmente su $\mathbb{Z}$. Si considera una risoluzione proiettiva comoda di $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}[C_m]$-modulo, cioè la risoluzione proiettiva

$$\cdots \to W_n \to \cdots \to W_2 \to W_1 \to W_0 \to 0,$$

dove ogni W_n è lo $\mathbb{Z}[C_m]$-modulo libero generato da w_n, la mappa $W_0 \to \mathbb{Z}$ è l'augmentazione e la mappa $W_i \to W_{i-1}$ si indica con T se i è dispari, con N se i è pari, dove si sono poste

$$\begin{aligned} T(w_i) &\coloneqq xw_{i-1} - w_{i-1}, \\ N(w_i) &\coloneqq w_{i-1} + xw_{i-1} + x^2 w_{i-1} + \cdots + x^{m-1} w_{i-1}. \end{aligned}$$

Per calcolare l'omologia, si applica $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[C_m]} \bullet$, ma poiché W_i è uno $\mathbb{Z}[C_m]$-modulo libero, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[C_m]} W_n \cong \mathbb{Z}$; la mappa $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} \otimes T$ manda quindi 1 in $(x - e)1 = 0$, dato che C_m agisce banalmente su $\mathbb{Z}$; la mappa $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} \otimes N$ invece manda 1 in $1 + 1 + \cdots + 1 = m$, quindi è la moltiplicazione per m. Di conseguenza,

$$H_i(C_m, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } i = 0, \\ \mathbb{Z}_m & \text{per } i \text{ dispari}, \\ 0 & \text{per } i \text{ pari e positivo}. \end{cases}$$

In particolare, si dimostra in questo modo che non è vero che per ogni modulo esiste una risoluzione proiettiva finita, dato che se fosse così, un'omologia non potrebbe avere infiniti gradi non nulli.

28/04/2008
Quattordicesima lezione

Esercizio 4.25. Calcolare $H^n(C_m, \mathbb{Z})$, dove C_m agisce banalmente su $\mathbb{Z}$.

Esempio 4.26. Si considera ancora il gruppo ciclico C_m, generato da x; sia inoltre A un C_m-modulo. Esiste un'applicazione *traccia*, $\mathrm{Tr}\colon A \to A\colon a \mapsto \sum_{g \in C_m} ga$. Analogamente a quanto si era osservato nell'esempio 4.22, il gruppo delle derivazioni è isomorfo al nucleo della traccia, mentre il sottogruppo delle derivazioni interne è isomorfo a $(x-e)A$. Di conseguenza, $H^1(C_m, A) \cong {}^{\ker \mathrm{Tr}}/_{(x-e)A}$.

Applichiamo queste considerazioni per dimostrare il teorema 90 di Hilbert, il cui enunciato è il seguente: sia ${}^{K}/_{k}$ una estensione di Galois ciclica con gruppo di Galois C_m; allora, per l'azione di G su K, con l'operazione di somma, vale $H^1(G, K) = 0$.

Sia $\vartheta \in K$ tale che $\mathrm{Tr}(\vartheta) \neq 0$; questo elemento esiste perché gli elementi $e, x, \dots, x^{m-1}$ di C_m possono essere visti come omomorfismi di gruppi moltiplicativi $K^\star \to K^\star$; un'applicazione di questo tipo è un *carattere* e per il teorema di Artin, caratteri distinti sono linearmente indipendenti; la traccia di ϑ è appunto una somma di caratteri distinti a coefficienti non nulli, quindi non può essere nulla. Sia inoltre $\alpha\colon G \to A$ una derivazione; si deve mostrare che α è una derivazione interna, cioè che esiste $b \in A$ tale che $\alpha(g) = (e-g)b$ per ogni $g \in G$. Come elemento b si sceglie $\mathrm{Tr}(\vartheta)^{-1} \sum_{g \in G} \alpha(g) g(\vartheta)$ (che ha senso in quanto K è un campo); in effetti, calcolando $(e-g)b$ risulta effettivamente uguale ad $\alpha(g)$, dopo aver applicato le proprietà delle derivazioni.

Il teorema 90 di Hilbert si può usare per dimostrare il teorema di Artin-Schreier: dati un campo k di caratteristica p e una sua estensione ciclica K con gruppo C_p, allora esiste $\alpha \in K$ tale che $K = k(\alpha)$ e α è radice di $x^p - x - a$ con $a \in k$; viceversa, dato $b \in k$, il polinomio $x^p - x - b$ o ha tutte le radici in k o dà luogo a un'estensione ciclica con gruppo C_p.

Nella dimostrazione, il teorema di Hilbert viene usato in questo modo: si osserva che $\mathrm{Tr}(-1) = -p = 0$, quindi esiste $b \in K$ tale che $-1 = (e-x)b$, da cui $xb = b+1$ e $x^t b = b + t$, perciò, dato che ci sono almeno n automorfismi distinti, $[k(b) : k] \geq n$.

4.4 Risoluzioni $\mathbb{Z}[G]$-proiettive di $\mathbb{Z}$ come G-modulo banale

Per calcolare $H^n(G, A)$ o $H_n(G, B)$, risulterebbe utile conoscere una risoluzione proiettiva di $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}[G]$-modulo banale. Verranno presentati alcuni complessi "famosi" che forniscono, per ogni G, una tale risoluzione: si tratta comunque di complessi "grandi" e dunque in certe situazioni converrà (se possibile) ricorrere a risoluzioni costruite ad hoc (come nell'esempio 4.24).

Sia B_n per $n \geq 0$ il gruppo abeliano libero generato dalle $(n+1)$-uple $(y_0, \dots, y_n)$ con $y_i \in G$; si procede in questo modo:

1. B_n diventa uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo con l'azione definita da $y(y_0, \dots, y_n) \coloneqq (yy_0, \dots, yy_n)$ per ogni $y \in G$;
2. si definisce il bordo $\partial_n\colon B_n \to B_{n-1}$: non è altro che il bordo che si usa nei complessi simpliciali, $\partial_n(y_0, \dots, y_n) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)$;
3. la mappa $\varepsilon\colon B_1 \to \mathbb{Z}$ è l'augmentazione (B_0 si può vedere come $\mathbb{Z}[G](1)$);
4. per dimostrare che il complesso che risulta è aciclico, si fornisce un'omotopia Σ tra le mappe identità e 1 da $\underline{B}$ in sé: $\Sigma_n(y_0, \dots, y_n) \coloneqq (1, y_0, \dots, y_n)$;

5. si dimostra che tutte le mappe viste sono omomorfismi di $\mathbb{Z}[G]$-moduli.

Per restringere il complesso $\underline{B}$, si può osservare che il sottocomplesso dato da tutte le tuple che hanno almeno due elementi consecutivi uguali si conserva sia per il bordo che per Σ, quindi si può quozientare per questo sottocomplesso. La risoluzione che si ottiene è detta *bar resolution omogenea*.

La seconda risoluzione proiettiva che si mostra è la *bar resolution non omogenea*: si definisce B'_n come lo $\mathbb{Z}[G]$-modulo libero generato dai simboli $[x_1|\dots|x_n]$ per $x_i \in G$ con l'azione corrispondente; il bordo è

$$\begin{aligned}\partial'_n([x_1|\dots|x_n]) \coloneqq x_1[x_2|\dots|x_n]+&\\ &+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1|\dots|x_ix_{i+1}|\dots|x_n]+\\ &+(-1)^n[x_1|\dots|x_{n-1}]\end{aligned}$$

e ε' è l'augmentazione, nel senso che $\varepsilon'([]) \coloneqq 1$. Per mostrare che è aciclico, si potrebbe fornire ancora un'omotopia, ma si può anche mostrare che questo complesso è isomorfo a quello precedente, tramite le mappe $\varphi\colon \underline{B} \to \underline{B}'$ e $\psi\colon \underline{B}' \to \underline{B}$ definite da

$$\begin{aligned}\varphi(1, y_1, \dots, y_n) &\coloneqq [y_1|y_1^{-1}y_2|\dots|y_{n-1}^{-1}y_n],\\ \psi([x_1|\dots|x_n]) &\coloneqq (1, x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n).\end{aligned}$$

Anche per questa risoluzione, si può quozientare per un sottocomplesso, quello contenente tutte le tuple che hanno almeno un elemento uguale a 1.

Esercizio 4.27. Se G è un gruppo finito di ordine m e A è un G-modulo, allora ogni elemento di $H_i(G, A)$ ha torsione m.

29/04/2008 - TODO
Quindicesima lezione

5 Coomologia delle algebre di Lie

05/05/2008
Sedicesima lezione

In questa sezione verranno esposti alcuni aspetti della teoria coomologica delle algebre di Lie. Verranno ricordate brevemente e senza dimostrazioni alcune proprietà delle algebre di Lie, mentre verranno discussi più in dettaglio alcuni teoremi e dimostrazioni in cui giocano un ruolo cruciale le tecniche di algebra omologica.

Definizione 5.1. Sia K un campo; un'*algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ è uno spazio vettoriale su K dotato di una mappa bilineare (detta *bracket*)

$$[\bullet, \blacktriangle]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

che soddisfa

1. $[x, x] = 0$,
2. $[[x, y], z] + [[z, x]], y] + [[y, z], x] = 0$.

Un *omomorfismo di algebre di Lie* è una funzione lineare che soddisfa $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$. Un'algebra di Lie è detta *abeliana* se $[x, y] = 0$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$.

Dalle due richieste fatte al bracket, si ottiene in particolare $[x, y] + [y, x] = 0$.

Esempio 5.2. Gli esempi principali di algebre di Lie si ottengono da algebre di matrici con prodotto bracket dato da $[A, B] := AB - BA$; per esempio:

1. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, cioè l'algebra di tutte le matrici $n \times n$ (compaiono naturalmente come tangente nell'identità del gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$);
2. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, cioè l'algebra delle matrici $n \times n$ con traccia 0 (tangente nell'identità del gruppo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$);
3. $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, il tangente nell'identità del gruppo $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$;
4. $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$, il tangente nell'identità del gruppo $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$.

Per passare da un elemento dell'algebra a un elemento del gruppo si applica l'esponenziale di matrici.

Definizione 5.3. Un *ideale* di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è un sottospazio vettoriale I di $\mathfrak{g}$ tale che per ogni $x \in \mathfrak{g}$ e per ogni $y \in I$, $[x, y] \in I$.

Nel caso dei gruppi, si era costruita la coomologia del gruppo G a partire dai funtori derivati associati all'anello $\mathbb{Z}[G]$. Si vorrebbe trovare un anello che abbia la stessa funzione per un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Per questo scopo, dato uno spazio vettoriale V su K, si definisce l'*algebra tensoriale* di V, cioè $\mathrm{T}\,V := K \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots$.

Definizione 5.4. Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, l'*algebra inviluppante universale* $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ di $\mathfrak{g}$ è il quoziente di $\mathrm{T}\,\mathfrak{g}$ per l'ideale generato dalle relazioni $x \otimes y - y \otimes x = [x, y]$.

Un'algebra inviluppante universale è un'algebra associativa, con unità. La sua costruzione è universale: viene costruita a partire da T, che si può descrivere come il funtore aggiunto sinistro del funtore dimenticante dalle algebre di Lie agli spazi vettoriali e il funtore $\mathscr{U}$ è aggiunto sinistro al funtore L che "legge" un'algebra associativa come algebra di Lie col prodotto bracket $[a, b] = ab - ba$. Per il teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt, un'algebra di Lie è immersa nella sua algebra inviluppante universale.

Come era naturale far agire G su un modulo, è naturale far agire un'algebra di Lie su uno spazio vettoriale, cioè dare un omomorfismo di algebre di Lie $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$. In questo caso, si dirà che V è un $\mathfrak{g}$-*modulo*. Ma avere un omomorfismo di algebre di Lie $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ è equivalente ad avere un omomorfismo di algebre associative con unità $\mathscr{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$, per come è stata definita $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Come per la coomologia dei gruppi, si definisce l'*augmentazione*: la mappa $\varepsilon\colon \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \to K$ che manda ogni $x \in \mathfrak{g}$ in 0; il nucleo di questa mappa è $I_{\mathfrak{g}}$, l'*ideale di augmentazione.*

Definizione 5.5. Dati un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e un $\mathfrak{g}$-modulo A, si definisce l'*n-esima coomologia* di $\mathfrak{g}$ a valori in A come

$$H^n(\mathfrak{g}, A) := \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{U}(\mathfrak{g})}(K, A),$$

dove l'azione di $\mathfrak{g}$ su K è banale (cioè $xa = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$ e $a \in K$).

In analogia con quanto risultava per la coomologia di gruppi, $H^0(\mathfrak{g}, A) = A^{\mathfrak{g}}$, cioè gli elementi $a \in A$ tali che $xa = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$. Inoltre, a meno di definire opportunamente le derivazioni e le derivazioni interne, si riottiene $H^1(\mathfrak{g}, A) = {}^{\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, A)}\!/_{\mathrm{IDer}(\mathfrak{g}, A)}$.

Definizione 5.6. Una applicazione lineare $d\colon \mathfrak{g} \to A$ è una *derivazione* se $d([x,y]) = xd(y) - yd(x)$; la *derivazione interna* relativa ad $a \in A$ è d_a tale che $d_a(x) \coloneqq xa$.

C'è analogia anche per il secondo gruppo di coomologia, nel senso che si vedrà classificare delle estensioni. Si considera una successione esatta di algebre di Lie
$$0 \to A \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} \mathfrak{h} \to 0$$
con A abeliana. Se s è una sezione lineare di p (si può richiedere che sia lineare perché comunque i e p sono omomorfismi di spazi vettoriali), si può definire un'azione di $\mathfrak{h}$ su $i(A)$: $hi(a) \coloneqq [s(h), i(a)]$. Per l'abelianità di A, questa azione non dipende dalla scelta della sezione s.

Definizione 5.7. Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie e A è un $\mathfrak{g}$-modulo, una successione esatta di algebre di Lie
$$0 \to A \to E \to \mathfrak{g} \to 0,$$
dove A è vista come algebra abeliana, è detta *estensione* di $\mathfrak{g}$ tramite A se l'azione indotta su A coincide con quella di partenza. Si dice *estensione split* di $\mathfrak{g}$ tramite A la successione esatta di algebre di Lie
$$0 \to A \to A \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \to 0,$$
dove $A \times \mathfrak{g}$ ha una struttura di algebra di Lie data da $[(a_1, g_1), (a_2, g_2)] \coloneqq (g_1 a_2 - g_2 a_1, [g_1, g_2])$.

Teorema 5.8. *Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e un $\mathfrak{g}$-modulo A, c'è corrispondenza biunivoca tra $H^2(\mathfrak{g}, A)$ e $\mathscr{M}(\mathfrak{g}, A)$ (l'insieme delle classi di equivalenza di estensioni di $\mathfrak{g}$ tramite A). In particolare, si può definire su $\mathscr{M}(\mathfrak{g}, A)$ una struttura di spazio vettoriale.*

Una cosa diversa, e vantaggiosa, rispetto alla coomologia di gruppi, è l'esistenza di una risoluzione proiettiva di K particolarmente comoda, e inoltre $\mathfrak{g}$-libera. Si definisce $C_n \coloneqq \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \otimes_K \bigwedge^n V$ per $n \geq 0$, dove V è lo spazio vettoriale soggiacente a $\mathfrak{g}$ (in particolare $C_0 \coloneqq \mathscr{U}(\mathfrak{g})$). L'elemento $u \otimes \langle v_1, \dots, v_n \rangle \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^n V$ si indicherà con $u \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Il bordo è definito come
$$\begin{aligned} d_n(1 \langle x_1, \dots, x_n \rangle) \coloneqq & \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i < x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n > + \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \langle [x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n \rangle . \end{aligned}$$

Per la verifica che quella appena definita è una risoluzione $\mathfrak{g}$-libera di K si rimanda a [HS71]. Come conseguenza della definizione, se $H^s(\mathfrak{g}, A) = 0$ per ogni $s > \dim \mathfrak{g}$.

06/05/2008
Diciassettesima lezione

D'ora in poi si supporrà che K sia un campo di caratteristica 0 e A sia un $\mathfrak{g}$-modulo di dimensione finita.

Definizione 5.9. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice *semisemplice* se non ha ideali abeliani eccetto 0.

Il seguente è un importante teorema di struttura (vedi per esempio [Hum94]).

Teorema 5.10. *Un'algebra di Lie semisemplice è somma diretta di ideali* semplici*, cioè che non hanno ideali propri.*

Per il teorema, se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora si può scrivere $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_r$, dove la decomposizione è come ideali, ma anche come algebre: infatti, se $x_i \in \mathfrak{h}_i$, allora $[x_i, x_j] = 0$ per ogni $i \neq j$.

Usando la risoluzione $\mathfrak{g}$-libera di K (si veda [HS71], sezione VI.5), si dimostra il seguente.

Teorema 5.11. *Siano $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice e A un $\mathfrak{g}$-modulo non banale e semplice; allora $H^q(\mathfrak{g}, A) = 0$ per ogni $q \geq 0$.*

Lemma 5.12 (Primo lemma di Whitehead)**.** *Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice, allora $H^1(\mathfrak{g}, A) = 0$ per ogni $\mathfrak{g}$-modulo A.*

Dimostrazione. Per assurdo, sia A un $\mathfrak{g}$-modulo di dimensione minimale tra quelli con prima coomologia non nulla. Se A non è semplice, allora esiste $A' \subseteq A$ non nullo e diverso da A tale che

$$0 \to A' \to A \to {}^{A}\!/_{A'} \to 0$$

è una successione esatta di $\mathfrak{g}$-moduli; per la minimalità di A, $H^1(\mathfrak{g}, A') = 0$ e $H^1(\mathfrak{g}, {}^{A}\!/_{A'}) = 0$, ma allora dalla successione esatta lunga in coomologia si ottiene $H^1(\mathfrak{g}, A) = 0$.

Allora A deve essere semplice e per il teorema 5.11, l'azione di $\mathfrak{g}$ deve essere banale. Ora, $H^1(\mathfrak{g}, A) \cong {}^{\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, A)}\!/_{\mathrm{IDer}(\mathfrak{g}, A)}$; poiché A è banale, $\mathrm{IDer}(\mathfrak{g}, A) = 0$.

Se $d\colon \mathfrak{g} \to A$ è una derivazione, dato che A è banale,

$$d([x, y]) = xd(y) - yd(x) = 0:$$

una derivazione deve annullarsi su tutti i bracket, cioè $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, A) \cong \mathrm{Hom}_K({}^{\mathfrak{g}}\!/_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}, A)$. Inoltre, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{h}_r, \mathfrak{h}_r]$; ma $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i] \subseteq \mathfrak{h}_i$ non può essere 0 (per la semisemplicità di $\mathfrak{g}$, che altrimenti avrebbe un ideale abeliano non banale), quindi per la semplicità di $\mathfrak{h}_i$ deve essere $\mathfrak{h}_i$, cioè $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. In particolare, non esistono derivazioni non nulle. □

Teorema 5.13 (Teorema di Weyl)**.** *Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice, ogni $\mathfrak{g}$-modulo A è* riducibile *(cioè è somma diretta di $\mathfrak{g}$-moduli semplici).*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su $\dim_K A$. Se $\dim_K A = 1$, non c'è niente da dimostrare. Se l'enunciato vale per tutti i $\mathfrak{g}$-moduli di dimensione minore di $\dim_K A$, sia $A' \subsetneq A$ un $\mathfrak{g}$-sottomodulo non nullo; si ottiene la successione esatta di $\mathfrak{g}$-moduli

$$0 \to A' \to A \to A'' := {}^{A}\!/_{A'} \to 0$$

che, applicando $\mathrm{Hom}_K(\bullet, A')$ diventa

$$0 \to \mathrm{Hom}_K(A'', A') \to \mathrm{Hom}_K(A, A') \to \mathrm{Hom}_K(A', A') \to 0,$$

esatta perché gli oggetti sono spazi vettoriali. Anche questa successione può essere vista come successione di $\mathfrak{g}$-moduli: se $g \in \mathfrak{g}$ e, per esempio, $f \in \mathrm{Hom}_K(A'', A')$, si definisce $(gf)(a'') := gf(a'') - f(ga'')$. Gli invarianti di queste azioni sono per definizione gli omomorfismi di $\mathfrak{g}$-moduli, cioè le applicazioni lineari f che soddisfano $gf(a'') = f(ga'')$. La successione esatta lunga è

$$0 \to H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A'', A')) \to H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A, A')) \to H^0(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A', A')) \to 0,$$

perché per il primo lemma di Whitehead, $H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(A'', A')) = 0$. Ma questa successione può essere riscritta come

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(A'', A') \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(A, A') \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(A', A') \to 0,$$

dato che le 0-esime algebre di coomologia sono gli elementi invarianti, che sono gli omomorfismi di $\mathfrak{g}$-moduli. Questo significa che la successione esatta originale di $\mathfrak{g}$-moduli, $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ spezza, cioè dentro A si può trovare un complementare di A' isomorfo ad A''. □

Lemma 5.14 (Secondo lemma di Whitehead)**.** *Siano $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice e A un $\mathfrak{g}$-modulo; allora $H^2(\mathfrak{g}, A) = 0$.*

Dimostrazione. Per assurdo, sia A un $\mathfrak{g}$-modulo di dimensione minimale tra quelli con seconda coomologia non nulla. Si esclude il caso che A non sia semplice nello stesso modo che si è visto per la prima algebra di coomologia nel primo lemma di Whitehead.

Quindi A è semplice; come prima, deve essere anche banale, cioè $A = K$; si deve dimostrare che $H^2(\mathfrak{g}, K) \neq 0$ è un assurdo. Questa algebra è in corrispondenza biunivoca con $\mathscr{M}(\mathfrak{g}, K)$, lo spazio delle estensioni $0 \to K \to E \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \to 0$, dove K è un $\mathfrak{g}$-modulo banale. Si deve quindi mostrare che ogni successione di questo tipo spezza. Come applicazioni lineari, esiste sempre una sezione $s\colon \mathfrak{g} \to E$ di p, cioè $ps = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$.

Si definisce un'azione di $\mathfrak{g}$ su E: $xe := [s(x), e]$; questo perché $s([x, y])$ differisce da $[s(x), s(y)]$ solo per un elemento $k \in K$. *TODO*

Allora, per il teorema di Weyl, dato che K è un sottomodulo di E, $E = K \oplus \mathfrak{h}$ come $\mathfrak{g}$-moduli, e $\mathfrak{h}$ è anche una sottoalgebra di Lie (per vederlo, si può scegliere s in modo che l'immagine coincida con $\mathfrak{h}$). In particolare, la successione spezza (poiché K è centrale, il prodotto semidiretto è in realtà diretto). □

12/05/2008 - rivedere
Diciottesima lezione

Definizione 5.15. Data un'algebra di Lie L, la *serie derivata* di L è definita da

$$L_n := \begin{cases} L & \text{se } n = 0, \\ [L_{n-1}, L_{n-1}] & \text{se } n > 0; \end{cases}$$

L è detta *risolubile* se $L_n = 0$ per qualche n; se L è risolubile, il primo n per cui $L_n = 0$ è detto *lunghezza derivata* di L.

Un esempio di algebra risolubile (e in realtà l'unico esempio) è un'algebra di matrici triangolari superiori (anche non strettamente).

Osservazione 5.16. Per ogni $n \geq 0$, L_n è un ideale di L (si dimostra usando l'uguaglianza di Jacobi).

Lemma 5.17. *Se $0 \to \mathfrak{h} \to L \to L/\mathfrak{h} \to 0$ è una successione esatta di algebre di Lie, allora L è risolubile se e solo se lo sono $\mathfrak{h}$ e $L/\mathfrak{h}$.*

Lemma 5.18. *Se A e B sono ideali risolubili di L, anche $A + B$ è risolubile.*

Grazie a questi due lemmi la cui dimostrazione è semplice, si prova l'esistenza di un ideale risolubile massimale, detto *radicale* di L.

Proposizione 5.19. *Se $\mathfrak{r}$ è il radicale di L, allora $L/\mathfrak{r}$ è semisemplice.*

Dimostrazione. Sia $A/\mathfrak{r}$ un ideale abeliano di $L/\mathfrak{r}$; allora $[A/\mathfrak{r}, A/\mathfrak{r}] = 0$ e in particolare è risolubile; dalla successione esatta $0 \to \mathfrak{r} \to A \to A/\mathfrak{r} \to 0$ si ottiene la risolubilità di A, per il lemma 5.17. Ma allora $A \subseteq \mathfrak{r}$ per la massimalità di $\mathfrak{r}$, e quindi $A = \mathfrak{r}$ e $A/\mathfrak{r} = 0$. $\square$

Teorema 5.20 (Levi-Malcev)**.** *Ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di dimensione finita è la estensione split di un'algebra di Lie semisemplice per il radicale $\mathfrak{r}$ di $\mathfrak{g}$.*

Dimostrazione. Sia $l(\mathfrak{r})$ la lunghezza derivata di $\mathfrak{r}$. Se $l(\mathfrak{r}) = 1$, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$ e $\mathfrak{r}$ è abeliano. Questo significa che l'azione di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{r}$ data dal bracket passa al quoziente, cioè c'è un'azione di $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ su $\mathfrak{r}$. Si può calcolare la seconda coomologia, $H^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$, ma questa è 0 per il secondo lemma di Whitehead. Di conseguenza, c'è una sola estensione di $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ su $\mathfrak{r}$, l'estensione split. Allora l'estensione ovvia $0 \to \mathfrak{r} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \to 0$ deve essere equivalente all'estensione split, cioè $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{r} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$.

Se $\mathfrak{r}$ non è abeliana, si suppone che il teorema valga se il radicale ha lunghezza derivata minore di $l(\mathfrak{r})$. Da $L := [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \neq 0$, si può scrivere il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{r}/L \arrow[r] & \mathfrak{g}/L \arrow[r] & \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Per il caso $l(\mathfrak{r}) = 1$, la successione della seconda riga è l'estensione split. Perciò, esiste un omomorfismo di algebre di Lie $s\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \to \mathfrak{g}/L$. Sia $\mathfrak{h}/L$ l'immagine di s.
TODO Ma s è iniettiva, quindi $\mathfrak{h}/L \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ è semisemplice. Allora L è il radicale di $\mathfrak{h}$, quindi per ipotesi induttiva la successione verticale nel diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & \\
L \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[dd] & \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
\mathfrak{h} \arrow[d, shift left] & & & \\
\mathfrak{h}/L \arrow[u, dashed, shift left, "t"] \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g}/L \arrow[r] & \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[ll, bend left, "s"] & 0 \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

è split, cioè esiste $t\colon \mathfrak{h}/L \to \mathfrak{h}$. Infine, $t \circ s$ dà lo spezzamento richiesto. Per induzione, il teorema è dimostrato. $\square$

Combinando i prossimi due teoremi, si ottiene che un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita è, modulo isomorfismo, un'algebra di matrici triangolare superiore.

Teorema 5.21 (Lie)**.** *Sia K un campo di caratteristica 0 e algebricamente chiuso; sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie risolubile su K e sia ρ una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su K. Allora, esiste una base di V tali che per ogni $X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X)$ è una matrice triangolare superiore con diagonale costituita da elementi non nulli.*

Teorema 5.22 (Ado)**.** *Sia K un campo di caratteristica* 0*. Ogni algebra di Lie di dimensione finita su K hanno un embedding dentro* $\mathrm{End}(V)$ *con V spazio vettoriale di dimensione finita.*

Se $K = \mathbb{C}$, le algebre di Lie semisemplici su $\mathbb{C}$ sono tutte e sole le somme di copie di $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ e di cinque algebre straordinarie, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

6 Successioni spettrali

Definizione 6.1. Un *modulo bigraduato differenziale* su un anello R è una collezione di R-moduli $E^{p,q}$ dove $p, q \in \mathbb{Z}$, con un differenziale d di grado $(r, 1-r)$ (oppure $(-r, r-1)$) che soddisfa $d^2 = 0$.

Si può visualizzare un modulo bigraduato differenziale ponendo il modulo $E^{p,q}$ sul punto (p, q) del piano cartesiano. I differenziali sono "vettori" che hanno tutti la stessa direzione e lunghezza. Punto per punto, si può fare la coomologia del complesso che passa per quel punto.

Definizione 6.2. Una *successione spettrale* è una famiglia di R-moduli bigraduati differenziali, $(E_r^{\bullet,\blacktriangle}, d_r)$ per $r > 0$, con tutti i differenziali d_r di grado $(r, 1-r)$ (o tutti di grado $(-r, r-1)$). Inoltre, per ogni p, q, r, $E_{r+1}^{p,q} = H^{p,q}(E_r^{\bullet,\blacktriangle}, d_r)$.

Osservazione 6.3. Se una successione spettrale soddisfa $E_1^{p,q} = 0$ per $p < 0$ o $q < 0$, cioè nella prima pagina si ha solo il primo quadrante, allora per ogni punto (p, q), a una certa pagina r i differenziali da e per il punto (p, q) arriveranno e punteranno fuori dal primo quadrante. Perciò, dopo quella pagina, l'elemento $E_r^{p,q}$ si stabilizza in tutte le pagine successive. Esistono molti casi dello stesso tipo, cioè in cui, dall'annullarsi dei moduli in certe parti del piano, si ricava la stabilizzazione di altri punti.

Si considera $E_2^{\bullet,\blacktriangle}$; si indicherà con Z_2 il nucleo di d_2 e con B_2 l'immagine di d_2 (si omettono gli indici in alto, quindi si considerano questi oggetti come distribuiti in tutti i moduli $E_2^{p,q}$). Per costruzione, $E_3 = {}^{Z_2}/_{B_2}$ e $d_r \colon {}^{Z_2}/_{B_2} \to {}^{Z_2}/_{B_2}$ e si può identificare Z_3 con un sottomodulo di Z_2, e così B_3. Ma allora $B_2 \subseteq B_3 \subseteq Z_3 \subseteq Z_2$; si può iterare questa costruzione e definire $B_\infty := \bigcup_i B_i$ e $Z_\infty := \bigcap_i Z_i$; chiaramente $B_\infty \subseteq Z_\infty$ e si definisce $E_\infty := {}^{Z_\infty}/_{B_\infty}$.

6.1 Moduli filtrati graduati

13/05/2008 - rivedere
Diciannovesima lezione

Definizione 6.4. Una *filtrazione* F di un R-modulo A è una famiglia di sottomoduli $F^p = F^pA$ con $p \in \mathbb{Z}$ tali che $\cdots \subseteq F^{p+1} \subseteq F^p \subseteq \cdots \subseteq A$ oppure $\cdots \subseteq F^p \subseteq F^{p+1} \subseteq \cdots \subseteq A$.

Esempio 6.5. Si può filtrare $\mathbb{Z}$ mediante $F^p\mathbb{Z} := 2^p\mathbb{Z}$; questa è una filtrazione discendente, infinita da una parte e finita (perché $F^0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$) dall'altra.

Definizione 6.6. Data una filtrazione F, il *modulo graduato associato alla filtrazione* è il modulo graduato $E_0^p(A) := {}^{F^pA}/_{F^{p+1}A}$ (qualora la filtrazione sia decrescente).

In generale, dal modulo graduato associato alla filtrazione non si riesce a ricavare il modulo di partenza: per esempio, sia la filtrazione vista nell'esempio che quella dei numeri 2-adici danno come modulo graduato associato una somma di copie di $\mathbb{Z}_2$. Si vorrebbe sapere quali sono le ostruzioni a ottenere il modulo di partenza dal modulo graduato associato alla filtrazione.

Sia A un modulo con una filtrazione tale che $F^pA = 0$ per $p > n$ e $F^pA = A$ per $p < 0$. Allora $E_0^n(A) \cong F^nA$, $E_0^{n-1}(A) = {}^{F^{n-1}A}/_{F^nA}$ e così via fino a $E_0^{-1} = {}^{A}/_{F^0A}$; tutti gli altri $E_0^k(A)$ sono nulli. Allora si possono costruire le seguenti successioni:

$$
\begin{gathered}
F^nA = E_0^n(A) \\
0 \to F^nA \to F^{n-1}A \to E_0^{n-1} \to 0 \\
0 \to F^{n-1}A \to F^{n-2}A \to E_0^{n-2} \to 0 \\
\dots \\
0 \to F^0A \to F^{-1}A = A \to E_0^{-1}(A) \to 0;
\end{gathered}
$$

se si conoscono tutti gli $E_0^k(A)$, la variabilità che si ottiene nella determinazione degli F^kA è esattamente dato dai moduli Ext.

Se $H^\star$ è un modulo graduato, filtrato tramite F, si definisce F^pH^n come $(F_pH^\star) \cap H^n$. In questo caso, si può ottenere un modulo bigraduato $E_0(H^\star, F) := \bigoplus_p {}^{F^pH^\star}/_{F^{p+1}H^\star} = \bigoplus E_0^p(H^\star)$, dove la bigraduazione è data da $E_0^{p,q}(H^\star, F) := {}^{F^pH^{p+q}}/_{F^{p+1}H^{p+q}}$.

Definizione 6.7. Una successione spettrale $(E_r^{\bullet,\blacktriangle}, d_r)$ *converge* al modulo graduato $H^\star$ se esiste una filtrazione F di $H^\star$ tale che $E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^\star, F)$.

Quindi la convergenza della successione spettrale non dà la conoscenza di $H^\star$, ma le sue componenti bigraduate rispetto a una certa filtrazione.

Definizione 6.8. Un *modulo filtrato graduato differenziale* è un modulo A:

1. graduato, cioè $A = \bigoplus_{n=0}^\infty A_n$;
2. differenziale, cioè è fissato un omomorfismo $d\colon A \to A$ di grado -1 (o $+1$) con $d^2 = 0$;
3. filtrato, cioè esiste una filtrazione F di A tale che $d\colon F^pA \to F^pA$.

Se $H^\star$ è la coomologia di A, allora si può definire una filtrazione compatibile con il differenziale, mediante $F^pH^\star(A) := \mathrm{Im}(H^\star(F^pA, d) \to H^\star(A, d))$ (è possibile perché F^pA è ancora un modulo graduato differenziale). La mappa va da ogni $H^n(F^pA, d) = {}^{\ker F^nA \to F^nA}/_{\mathrm{Im}\, F^nA \to F^nA}$; un elemento del nucleo del differenziale di F^nA è nel nucleo anche del differenziale di A, e se è nell'immagine del differenziale di F^nA è di sicuro anche nell'immagine del differenziale di A.

Teorema 6.9. *Ogni modulo filtrato graduato differenziale (A, d, F) determina una successione spettrale $(E_r^{\bullet,\blacktriangle}, d_r)$ con $E_r^{p,q} := H^{p,q}({}^{F^pA}/_{F^{p+1}}A)$. Inoltre, se la filtrazione è limitata (cioè, per ogni n esistono s_n e t_n tali che $F^kA^n = 0$ per $n > s$ e $F^kA^n = A$ per $k < t$) allora la successione spettrale converge a $H^\star(A, d)$.*

Nelle ipotesi del teorema, si può tentare di ricostruire $H^\star(A, d)$ a partire da $E_\infty^{p,q}$: le componenti del grado n sono sulla retta $p + q = n$. Se la filtrazione è limitata, su queste rette c'è solo un tratto limitato in cui non si annullano.

6.2 Coppie esatte

Nell'enunciato del teorema, manca la definizione del differenziale a ogni pagina. Per definirlo si usa una costruzione generale, dovuta a Massey.

Definizione 6.10. Una *coppia esatta* è una coppia di oggetti A e C legati dalla relazione

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "a"] & & A \arrow[dl, "b"] \\ & C, \arrow[ul, "\omega"] & \end{tikzcd}$$

dove la successione è esatta.

Esempio 6.11. Da una successione esatta corta di complessi $0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$ risulta la coppia esatta $(H^\star(A), H^\star(C))$; per esempio, a partire dall'usuale successione $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \to 0$ si ottiene una coppia esatta tensorizzando per un complesso C.

A partire da una coppia esatta se ne può costruire un'altra, detta *coppia derivata*: se si ha la coppia esatta

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E, \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

si considera $d\colon E \to E$ definita da $d := j \circ k$; $d^2 = j \circ (k \circ j) \circ k = 0$, quindi d è un differenziale (se E fosse graduato). Se $E' := {}^{\ker d}\!/_{\operatorname{Im} d}$ e $D' := i(D)$, si ottiene la coppia esatta (D', E') con le mappe i', j', k', definite da

$$\begin{aligned} &i'(i(\gamma)) := i(i(\gamma)), \\ &j'(i(\gamma)) := [j(\gamma)] \qquad \text{(se } i(\gamma) = i(\delta),\ j(\gamma) \text{ e } j(\delta) \text{ differiscono per un bordo) e} \\ &k'([e]) := k(e). \end{aligned}$$

Teorema 6.12. *Una coppia derivata è una coppia esatta.*

Il teorema permette di iterare il procedimento con cui si ottiene una coppia derivata; se C è una coppia esatta, la sua n-esima coppia derivata si indica con $C^{(n)}$.

Teorema 6.13. *Siano $D^{\bullet,\blacktriangle}$ e $E^{\bullet,\blacktriangle}$ moduli bigraduati su R tali che $(D^{\bullet,\blacktriangle}, E^{\bullet,\blacktriangle})$ sia una coppia esatta, con le mappe i, j, k; se $\deg i = (-1, 1)$, $\deg j = (0, 0)$ e $\deg k = (1, 0)$, allora è determinata una successione spettrale $(E_r^{\bullet,\blacktriangle}, d_r)$ con $E_r^{p,q} := (E^{p,q})^{(r-1)}$ e $d_r := j^{(r)} \circ k^{(r)}$.*

Sia A un modulo graduato filtrato differenziale; allora dalla successione esatta $0 \to F^{p+1}A \to F^pA \to {}^{F^pA}\!/_{F^{p+1}A} \to 0$ si può costruire la successione esatta lunga e anche una coppia esatta (D, E), dove E è un modulo bigraduato definito da $E^{p,q} := H^{p+q}({}^{F^pA}\!/_{F^{p+1}A})$, mentre D è definito da $D^{p,q} := H^{p+q}(F^pA)$, ottenendo il diagramma

$$\begin{tikzcd} H^{p+q+1}(F^{p+1}A) \arrow[rr, "i"] & & H^{p+q}(F^pA) \arrow[dl, "j"] \\ & H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A). \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

Quindi da A si è trovata una coppia esatta con i gradi degli omomorfismi giusti per ottenere una successione spettrale. Se inoltre la filtrazione è limitata, c'è convergenza.

6.3 Calcolo dell'omologia dei gruppi di trecce

19/05/2008 - rivedere
Ventesima lezione

Definizione 6.14. Il *gruppo delle trecce* su n fili è $\mathrm{Br}(n) := \pi_1(C_n, x)$, dove C_n è lo spazio $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup(t_i = t_j)$ quozientato per S_n e $x := (1, \dots, n)$; C_n è l'insieme delle configurazioni non ordinate di n punti.

Si può definire il gruppo delle trecce su varietà di dimensione 2 più generali.

Proposizione 6.15. *Il gruppo delle trecce è generato dagli elementi σ_n, che scambiano i fili n e $n+1$ e fissano gli altri; tra questi elementi, si hanno le relazioni $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ per i e j tali che $|i-j| \geq 2$ e la* relazione di treccia*: $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. Questi generatori e queste relazioni danno una presentazione di* $\mathrm{Br}(n)$.

Proposizione 6.16. *Lo spazio C_n è uno spazio $k(\pi, 1)$.*

Dimostrazione. Sia $F(n, \mathbb{C})$ lo spazio delle configurazioni di n punti ordinati, cioè $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup(t_i = t_j)$. Allora si ha una struttura di fibrato $S_n \to F(n, \mathbb{C}) \to C_n$; visto che la fibra, S_n, è discreta, i suoi gruppi di omotopia sono banali. Dalla successione esatta lunga di omotopia, $\pi_i(F(n, \mathbb{C})) = \pi_i(C_n)$ per ogni $i \geq 2$. Ci si riduce quindi a dimostrare che $\pi_i(F(n, \mathbb{C})) = \{1\}$ per ogni $i \geq 2$. Si considera la proiezione $F(n, \mathbb{C}) \to F(n-1, \mathbb{C})$ che dimentica l'ultima coordinata. La fibra di questa proiezione sopra il punto $(z_1, \dots, z_{n-1})$ è $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, cioè, omotopicamente, un bouquet di S^1. Dalla successione esatta lunga di omotopia, si ha per induzione che $F(n, \mathbb{C})$ è un $k(\pi, 1)$ (il passo base può essere $F(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\star$). $\square$

Grazie al teorema di Hopf, si può studiare l'omologia di $\mathrm{Br}(n)$ tramite l'omologia di C_n, dato che questo è uno spazio $k(\mathrm{Br}(n), 1)$. Si userà in particolare, senza specificarlo ogni volta, l'omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$. La scelta di $\mathbb{Z}_2$ è una via di mezzo tra il risultato banale che si otterrebbe usando come coefficienti i numeri razionali e le complicazioni date dal fatto che il risultato di una computazione con le successioni spettrali è dato a meno di estensioni di moduli, ed essendo $\mathbb{Z}_2$ un campo, le cose si semplificano dato che conta solo la dimensione di uno $\mathbb{Z}_2$-modulo (cioè, di uno $\mathbb{Z}_2$-spazio vettoriale).

Lo spazio $F(n, \mathbb{C})$ è un caso particolare di una struttura più generale, cioè degli spazio $V \setminus \mathscr{A}$, dove V è uno spazio vettoriale complesso e $\mathscr{A}$ è una famiglia di iperpiani. Se le equazioni degli iperpiani di $\mathscr{A}$ sono a coefficienti reali, lo spazio complementare, $M(\mathscr{A}) := V \setminus \mathscr{A}$, è omotopicamente equivalente a un

CW-complesso finito. Nel caso particolare di $F(n,\mathbb{C})$, si ha anche la struttura che proviene dall'azione di S_n.

Si vorrebbe ora descrivere C_n come un CW-complesso finito. Si considera un grafo lineare con nodi chiamati da 1 a $n-1$. Per identificare un sottoinsieme dei vertici del grafo si usa una stringa binaria di $n-1$ cifre, con 1 in posizione i se il nodo i è nel sottoinsieme. Quindi un sottoinsieme Γ può essere visto come una stringa di 1 lunga m_1 (eventualmente con $m_1 = 0$), seguita da uno 0, seguita da una stringa di 1 lunga m_2, seguita da uno 0 e così via fino all'ultima stringa di 1 lunga m_h. Si definisce $\Gamma! \coloneqq \prod_{i=1}^{h}(m_i+1)!$.

Teorema 6.17. *Lo spazio C_n è omotopicamente equivalente a un CW-complesso finito di dimensione $n-1$; le celle di dimensione i sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi Γ di $\{1,\dots,n-1\}$ con $|\Gamma| = i$. Se e_Γ è la cella relativa a Γ, allora modulo 2, la mappa di bordo è data da $\partial e_\Gamma \coloneqq \sum_{i\in\Gamma} \Gamma!/(\Gamma\setminus\{i\})! e_{\Gamma\setminus\{i\}}$ (e facile vedere che togliendo un elemento che stava in posizione j in una stringa lunga m, il coefficiente della corrispondente cella è $\binom{m+1}{i}$).*

Si può costruire C_n come CW-complesso in un altro modo: un punto $x \in C_n$ è una n-upla di numeri complessi distinti, che possono essere visti tutti in un unico piano complesso; si considerano le parti reali di questi numeri e per ogni parte reale si prende il numero di punti di x con quella parte reale; si ottiene quindi una stringa di numeri ordinata (per parte reale) positivi; se s è la stringa di x, si scrive $x \in e(s)$. I punti in $e(s)$ sono descritti da un numero reale che indica la prima parte reale, da altre $l-1$ numeri reali positivi per indicare le distanze dell'i-esimo punto dall'$(i-1)$-esimo, se l è la lunghezza di s, e da altri n numeri reali che indicano le coordinate immaginarie dei punti. Quindi $e(s)$ è una cella di dimensione $h+n$, e $h \leq n$. Se si compattifica C_n aggiungendo un punto, ottenendo $C_n^\star$, si può usare un argomento di dualità di Poincaré per dire che $H^{2n-1}(C_n^\star) = H_i(C_n)$. Questo dà sostanzialmente la stessa costruzione del teorema, dato che si può codificare una stringa s, di elementi $m_1,\dots,m_h$, con una stringa binaria, con h stringhe di 1 lunghe $m_i - 1$ separati da 0. Si potrebbe verificare che le mappe di bordo che si ottengono corrispondono con quelle enunciate nel teorema.

Si denoterà con X_n il modulo su $\mathbb{Z}_2$ generato dalle stringhe binarie di lunghezza $n-1$; X_n è uno $\mathbb{Z}_2$-spazio vettoriale di dimensione 2^{n-1}. La dimensione di un certo elemento $A \in X_n$ è data dal numero di 1 nella stringa A. Per studiare questo complesso con le successioni spettrali, si deve fornire una filtrazione ragionevole di X_n. Dato che il bordo, in un sottografo fissato, può solo abbassare il numero di 1, si può definire F_iX_n come il sottospazio di X_n costituito dalle stringhe che hanno almeno uno 0 nelle ultime $i+1$ posizioni, e questa filtrazione sarà compatibile con il bordo. Inoltre, $F_iX_n \subseteq F_{i+1}X_n$, cioè la filtrazione è crescente, e per i abbastanza grande la condizione è vuota (per definizione), mentre per $i < 0$ la condizione è troppo restrittiva; in altre parole, la filtrazione è limitata.

Si era vista la seguente proposizione nel caso della coomologia.

Proposizione 6.18. *Se X è un complesso di catene (con un bordo di grado -1) filtrato con una filtrazione crescente e limitata, allora esiste una successione spettrale di omologia (con bordo d_r, di grado $(-r, r-1)$) con $E^1_{s,t} \coloneqq H_{s+t}(F_sX/F_{s-1}X)$. Inoltre, questa successione spettrale converge a $E^\infty = H_\star(X)$.*

Nel caso in esame, ${}^{F_i X_n}/_{F_{i-1} X_n}$ è costituito dalle stringhe che hanno 0 nella $(i+1)$-ultima posizione e 1 nelle ultime i posizioni. Se si fa agire il bordo, quando si toglie un 1 dalle ultime i posizioni, si va a finire in 0, quindi il complesso che si ottiene è X_{n-i-1} (si sono tolte $i+1$ cifre). L'unica cosa che cambia è il grado: $\left({}^{F_i X_n}/_{F_{i-1} X_n}\right)_{j+i} \cong (X_{n-i-1})_j$. Quindi $H_{s+t}({}^{F_s X_n}/_{F_{s+1} X_n}) = H_{s+t}(X_{n-s-1}[s]) = H_t(X_{n-s-1})$. La prima pagina a questo punto è:

$$
\begin{array}{cccccc}
3 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
2 & H_2(X_{n-1}) & H_2(X_{n-2}) & \cdots & H_2(X_0) & H_2(X_{-1}) \\
1 & H_1(X_{n-1}) & H_1(X_{n-2}) & \cdots & H_1(X_0) & H_1(X_{-1}) \\
0 & H_0(X_{n-1}) & H_0(X_{n-2}) & \cdots & H_0(X_0) & H_0(X_{-1}) \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
$$

Lemma 6.19. *Il binomio $\binom{m}{n}$ è pari se e solo se la somma $n+(m-n)$ non ha riporto scritta in base 2.*

Grazie al lemma, le stringhe che contengono una sola stringa di 1 lunga 2^k-1, sono necessariamente bordi, perché per ottenere 2^k come somma di due numeri più piccoli si deve necessariamente fare riporto. Quindi $\partial(A01^{2^k-1}) = \partial A01^{2^k-1}$. Inoltre, se una stringa contiene una sola stringa di 1 lunga 2^a+2^b-1, con $a \neq b$, allora 2^a+2^b si può scrivere senza riporti solo in due modi; allora $\partial 1^{2^a+2^b-1} = 1^{2^a-1}01^{2^b-1} + 1^{2^b-1}01^{2^a-1}$.

20/05/2008 - rivedere
Ventunesima lezione

Teorema 6.20. *Sia R l'anello dei polinomi su $\mathbb{Z}_2$ con infinite variabili $x_0, \ldots, x_n, \ldots$; si definisce $\dim x_i := 2^i - 1$ e $\deg x_i := 2^i$; allora $H_\star(\mathrm{Br}(n), \mathbb{Z}_2)$ è la parte di grado n di R, con la graduazione data dalla dimensione.*

Esempio 6.21. Si considera il gruppo delle trecce su due fili; lo spazio corrispondente è $C_2 := {}^{\mathbb{C}^2 \setminus (z_1 = z_2)}/_{S_2} \cong \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}$. In effetti, $\mathrm{Br}(2) = \mathbb{Z}$; X_2 è fatto da due stringhe di lunghezza 1 e la mappa di bordo manda la stringa 1 nella stringa 0 con coefficiente $\binom{2}{1} \equiv 0 \ (2)$, quindi $H_0(\mathrm{Br}(2), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ e $H_1(\mathrm{Br}(2), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, come si poteva già vedere dal fatto che $C_2 \simeq S^1$.

Esempio 6.22. Il gruppo delle trecce su tre fili ha X_2 fatto da stringhe di lunghezza 2; $\partial(11) \equiv (10) + (01) \ (2)$, mentre $\partial(10) = \partial(01) = 0$; quindi $H_2(\mathrm{Br}(3), \mathbb{Z}_2) = 0$, $H_1(\mathrm{Br}(3), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, $H_0(\mathrm{Br}(3), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Con la successione spettrale si ottiene lo stesso risultato: la prima pagina è

$$
\begin{array}{cccc}
1 & \mathbb{Z}_2 & & \\
0 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\
 & 0 & 1 & 2
\end{array}
$$

dove $E^1_{1,0}$ è lo $\mathbb{Z}_2$ generato dalla stringa 01, mentre $E^1_{2,0}$ è lo $\mathbb{Z}_2$ generato dalla stringa 11; allora $d^1(11) = 01$ perché 10 non c'è in $E^1_{1,0}$; allo stesso modo, $d^1(01) = 0$. La seconda pagina allora risulta essere

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & \mathbb{Z}_2 & & \\ 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

e le mappe di bordo sono tutte banali. Quindi la successione spettrale collassa alla pagina 2 e si ottiene che $H_0(X_3, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ (la prima diagonale) e $H_0(X_3, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ (la seconda diagonale). Il generatore del grado 0 dell'omologia è la stringa 00, corrispondente al polinomio x_0^3, mentre il generatore del grado 1 dell'omologia è la stringa 10, corrispondente al polinomio x_0x_1. Questi sono i soli due polinomi di grado 3.

Più in generale, per calcolare $H_\star(X_n)$ con la successione spettrale, si costruisce la prima pagina; a un elemento di un modulo nella i-esima colonna si fa corrispondere una stringa concatenandola con 0 seguita da 1^i). Per ottenere la mappa di bordo si osserva che per passare da una colonna a quella a sinistra, si possono eliminare solo gli 1 posti alla fine della stringa (quelli che vengono concatenati), dato che altrimenti l'immagine è 0. Allora, le mappe sono alternativamente isomorfismi o mappe nulle a seconda della parità del numero di 1 alla fine della stringa (o dell'indice di colonna, equivalentemente), dato che il coefficiente dipende dalla parità del numero di 1 alla fine della stringa. Vista come polinomi, la mappa di bordo corrisponde a moltiplicare per x_0.

Alla seconda pagina, la prima colonna resta uguale, dato che le mappe di bordo che ci arrivavano erano tutte nulle. La seconda colonna viene quozientata per x_0, mentre la terza diventa 0 perché il nucleo delle mappe di bordo è banale. Le colonne successive vengono alternativamente quozientate per x_0 o annullate per lo stesso motivo. Ora, rimangono le mappe di bordo dai moduli contenenti stringhe che terminano per un numero dispari di 1; per ottenere un coefficiente non nullo (cioè, dispari), è necessario eliminare gli 1 in posizione pari. Analogamente a quanto succedeva per la prima pagina, le mappe di bordo corrispondono alternativamente alla moltiplicazione per x_1 o alle mappe nulle, a seconda della parità del numero di 1 in posizioni pari nella parte terminale della stringa.

Quindi, alla terza pagina, la prima colonna non viene ancora modificata, la seconda nemmeno, la terza rimane 0; dalla quarta in poi, di quattro colonne in quattro colonne la prima viene quozientata per x_1, mentre le altre tre vengono annullate. Il processo si itera indefinitamente, ottenendo come E^∞ una pagine che ha: una prima colonna uguale a $H_\star(X_{n-1})$, la seconda uguale a $H_\star(X_{n-2})/(x_0)$, la terza uguale a 0, la quarta uguale a $H_\star(X_{n-3})/(x_0, x_1)$, poi tre colonne nulle e la ottava uguale a $H_\star(X_{n-4})/(x_0, x_1, x_2)$ e così via, con una colonna non nulla se e solo se il suo indice è una potenza di due. Per ricostruire l'omologia, si ragiona in questo modo: se un polinomio contiene x_0 (corrispondente alla stringa 0), allora si trova nella prima colonna e si riottiene la stringa originale aggiungendo lo 0 alla fine; se un polinomio non contiene x_0 ma contiene x_1 (corrispondente alla stringa 01), si trova nella colonna 2 e si riottiene la stringa concatenandola con 01, e così via.

6.4 Calcolo dell'omologia

Teorema 6.23. *Sia $F \to E \to B$ una fibrazione con B semplicemente connesso e sia R un anello commutativo; allora esiste una successione spettrale di omologia E^r, nulla al di fuori del primo quadrante, naturale rispetto alle mappe di fibrazioni e che converge all'omologia dello spazio totale E a coefficienti in R. Questa successione spettrale è data da $E^2_{p,q} := H_p(B, R) \otimes_R H_q(F, R)$.*

Esempio 6.24. Si suppone che l'omologia di F sia uguale all'omologia di una sfera di dimensione h e quella di B sia uguale all'omologia di una sfera di dimensione k. Allora gli unici moduli non nulli sono in corrispondenza di $p \in \{1, k\}$ e $q \in \{1, h\}$. L'unico modo per non avere una mappa non banale è che $(1, h) - (k, 1)$ sia uguale a $(-2, 1)$.

Definizione 6.25. Sia X uno spazio topologico puntato; la *sospensione* di X è ΣX, uguale a $X \times I$ identificando i punti agli estremi dell'intervallo.

L'omologia ridotta della sospensione di uno spazio è uguale all'omologia ridotta dello spazio.

Definizione 6.26. Dato uno spazio topologico puntato (X, x), si definisce $\mathscr{P}X$, lo *spazio dei cammini* su X come l'insieme dei cammini $F\colon I \to X$ con $F(0) = x$.

TODO

Se X e Y sono spazio topologici puntati, si indica con $[X, Y]$ l'insieme delle funzioni $f\colon X \to Y$ come spazi puntati a meno di omotopia. Si ha in particolare $[\Sigma X, Y] = [X, \Omega Y]$: un elemento del primo spazio è una funzione $(t, x) \mapsto y$, e nel secondo spazio si associa il cammino $x \mapsto \gamma$ dove γ è un cammino con $\gamma(t) = y$.

Se X è uno spazio topologico, si può definire un'operazione $\mu\colon \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$, associando a γ_1 e γ_2 il cammino che si ottiene percorrendo prima γ_1 e poi γ_2 e riparametrizzando sull'intervallo unitario. A meno di omotopia, questa operazione ammette un elemento neutro, il cammino banale. Uno spazio dotato di un'operazione che ha un'identità modulo omotopia, è detto *H-spazio*. Inoltre, μ è associativa, sempre a meno di omotopia; su $\Omega^2 X$, μ a meno di omotopia è anche commutativa: infatti $\Omega^2 X$ è costituito dalle mappe da S^2 a X, e su S^2 si può, modulo omotopia, scambiare i due operandi. Questo permette di dire che μ induce su $H_\star(\Omega_X)$ una struttura di algebra, detta *algebra di Pontryagin.*

Per la naturalità del teorema 6.23, questa struttura di algebra esiste anche sulla successione spettrale corrispondente. Questo a sua volta significa che una mappa di bordo si comporta come una derivazione.

Esempio 6.27. Si vuole calcolare $H_\star(\Omega\Sigma X, \mathbb{Z}_2)$ per $X = S^2$. La sospensione di S^2 è S^3 e si costruisce la fibrazione $\Omega\Sigma X \to \mathscr{P}X \to \Sigma X$; per il teorema, $E^2_{p,q} = H_p(S^3, \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H_q(\Omega\Sigma S^2, \mathbb{Z}_2)$. Sia 1 il generatore di $H_0(S^3, \mathbb{Z}_2)$ e x quello di $H_3(S^3, \mathbb{Z}_2)$. Allora i moduli non nulli di E^2 possono essere solo sulle colonne 0 e 3. Ma la successione spettrale deve convergere all'omologia dello spazio totale, semplicemente connesso. Quindi ci deve essere una mappa che annulla la posizione $(3, 0)$, e l'unico bordo che può farlo (cioè, con immagine non nulla) è $d^3\colon E^3_{3,0} \to E^3_{0,2}$. Allora $E^3_{0,2} \neq 0$, e così anche $E^2_{0,2}$. Sia y un generatore di $E^2_{0,2}$; allora per l'elemento $x \otimes y \in E^2_{3,2}$ si può fare lo stesso discorso, ottenendo che $y^2 \in E^2_{0,4}$ è un generatore. Si è scoperto che $H_\star(\Omega S^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[y]$ con $\deg y = 2$.

Teorema 6.28 (di confronto)**.** *Siano E, F due successioni spettrali tali che $E^2 = E^2_{x,0} \otimes E^2_{0,x}$ e $F^2 = F^2_{x,0} \otimes F^2_{0,x}$ e sia $\varphi\colon E \to F$ un morfismo di successioni spettrali; allora due delle seguenti proposizioni implicano la terza:*

1. *$\varphi^2\colon E^2_{x,0} \to F^2_{x,0}$ è un isomorfismo;*
2. *$\varphi^2\colon E^2_{0,x} \to F^2_{0,x}$ è un isomorfismo;*
3. *$\varphi^\infty\colon E^\infty \to F^\infty$ è un isomorfismo.*

Teorema 6.29. *Sia $V \coloneqq H_\star(X, K)$, allora $H_\star(\Omega\Sigma X, K) \cong T(V)$, l'algebra tensoriale su V.*

Esempio 6.30. Si considera la fibrazione $\Omega^2 S^3 \to \mathscr{P}\Omega S^3 \to \Omega S^3$; dato che su $\Omega^2 S^3$ il prodotto è commutativo, la sua omologia sarà un anello commutativo. Si costruisce la prima pagina della successione spettrale, a partire dal fatto che si conosce $H_\star(\Omega S^3, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[y]$. Con ragionamenti analoghi a quelli visti in precedenza, $d^2(y)$ deve andare in un generatore z di $E^2_{0,1}$. Quindi in tutta la seconda riga si hanno gli elementi non nulli $z \otimes y^k$. Dato che il bordo si comporta come una derivazione, $d^2 y^{2k} = 0$, quindi per annullare $z \otimes y^2$ ci deve essere un generatore z^2 in $E^2_{0,2}$. Nella pagina successiva, sopravvivono 1, y^2, e così via. L'unico altro differenziale che può annullare y^2 è d^4, quindi ci deve essere un altro elemento, $z_2 \in E^4_{0,3}$. Questo problema si ripete, perché alla quinta pagina sopravvive ancora y^4; ci deve essere allora un elemento $z_3 \in E^8_{0,7}$. Ci si aspetta quindi che $H_\star(\Omega^2 S^3, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[z, z_2, z_3, \ldots]$, dove $\dim z_i = 2^i - 1$ e $d^{2^i}(y^{2^i}) = z_i$.

Riferimenti bibliografici

[GM99] Gelfand, S. I. e Yuri Ivanovich Manin: *Methods of homological algebra.* Springer-Verlag, 1999.

[HS71] Hilton, Peter J. e Urs Stammbach: *A course in homological algebra.* Graduate texts in mathematics 4. Springer-Verlag, 1971.

[Hum94] Humphreys, James E.: *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Graduate texts in mathematics 9. Springer-Verlag, 1994.

[Lan93] Lang, Serge: *Algebra.* Addison Wesley, 1993.

[Mas77] Massey, William S.: *Algebraic topology: an introduction.* Springer-Verlag, 1977.

[Mas91] Massey, William S.: *A basic course in algebraic topology.* Springer-Verlag, 1991.

[McC] McCleary: *A user's guide to spectral sequences.* Cambridge University Press, ????