Appunti del corso:
Analisi Complessa
Prof. Francesca Acquistapace

Stefano Maggiolo
http://poisson.phc.unipi.it/~maggiolo/
maggiolo@mail.dm.unipi.it

2006–2007

Indice

1 Introduzione

2.10.2006

Definizione 1.1. Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio (cioè un aperto connesso); $f\colon D \to \mathbb{C}$ si dice olomorfa se per ogni $w \in D$ esistono un policilindro $\Delta(w, r) = \Delta(w_1, r_1) \times \ldots \times \Delta(w_n, r_n) \subseteq \mathbb{C}^n$ e una serie convergente in $\Delta(w, r)$ tale che $f(z) = \sum_{|\nu|\geq 0} a_\nu (z-w)^\nu$.

Osservazione 1.2. L'insieme delle funzioni olomorfe nel dominio D si nota $\mathscr{O}(D)$ ed è un anello, integro se D è connesso. L'anello $\mathscr{O}(D)$ è un sottoinsieme delle funzioni continue a valori complesse; inoltre se $f \in \mathscr{O}(D)$, è olomorfa se considerata funzione di una qualsiasi delle variabili. Infine, è possibile calcolare le derivate parziali termine a termine.

Teorema 1.3 (lemma di Osgood)**.** *Sia $f\colon D \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in ogni variabile $z_1, \ldots, z_n$, allora $f \in \mathscr{O}(D)$.*

Dimostrazione. Sia $w \in D$, $\bar{\Delta}(w, r) \subseteq D$. Poiché f è olomorfa in ogni z_i, se $z_i \in \Delta(w_i, r_i)$ per ogni i, si ha

$$\begin{aligned} f(z_1, \ldots, z_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi_1 - w_1| = r_1} \frac{f(\xi_1, z_2, \ldots, z_n)}{\xi_1 - z_1} \mathrm{d}\xi_1 = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{|\xi_1 - w_1| = r_1} \frac{\mathrm{d}\xi_1}{\xi_1 - z_1} \int\limits_{|\xi_2 - w_2| = r_2} \frac{f(\xi_1, \xi_2, z_3, \ldots, z_n)}{\xi_2 - z_2} \mathrm{d}\xi_2 = \ldots = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|\xi_1 - w_1| = r_1} \frac{\mathrm{d}\xi_1}{\xi_1 - z_1} \cdots \int\limits_{|\xi_n - w_n| = r_n} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\xi_1 - z_1} \mathrm{d}\xi_n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\frac{1}{\xi_j - z_j} = \frac{1}{\xi_j - w_j - (z_j - w_j)} = \frac{1}{(\xi_j - w_j)\left(1 - \frac{z_j - w_j}{\xi_j - w_j}\right)} = \sum_{k \geq 0} \frac{(z_j - w_j)^k}{(\xi_j - w_j)^{k+1}}.$$

Le serie sono assolutamente convergenti, quindi si possono estrarre dall'integrale e moltiplicare; in definitiva si ha $f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{|\nu| \geq 0} a_\nu (z-w)^\nu$ con

$$a_\nu = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\substack{|\xi_1 - w_1| = r_1 \\ \cdots \\ |\xi_n - w_n| = r_n}} \frac{f(\xi)}{(\xi_1 - w_1)^{\nu_1} \ldots (\xi_n - w_n)^{\nu_n}} \mathrm{d}\xi. \qquad \square$$

Osservazione 1.4. Dalla formula dell'integrale di Cauchy in più variabili si ottiene che se f è olomorfa in un intorno di $\bar{\Delta}(w, r)$ allora la formula di Cauchy vale per il prodotto dei bordi, insieme di dimensione n sui reali; non è necessario conoscere f su tutto il bordo, insieme di dimensione $2n - 1$ sui reali.

Inoltre se $f = \sum_{|\nu| \geq 0} a_\nu (z-w)^\nu$, risulta

$$\frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}} = \frac{k_1! \ldots k_n!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\substack{|\xi_1 - w_1| = r_1 \\ \cdots \\ |\xi_n - w_n| = r_n}} \frac{f(\xi)}{(\xi_1 - w_1)^{k_1 + 1} \ldots (\xi_n - w_n)^{k_n + 1}} \mathrm{d}\xi$$

da cui $a_\nu = \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_n!} \frac{\partial^{\nu_1 + \ldots + \nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n}}$.

Teorema 1.5 (Hartogs)**.** *Il lemma di Osgood si può dimostrare anche senza l'ipotesi che f sia continua.*

Definizione 1.6. Pensando a $D \subseteq \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, si definiscono gli operatori ${}^{\partial}\!/_{\partial z_i} = {}^1\!/_2 (\{{}^{\partial}\!/_{\partial x_i} - i{}^{\partial}\!/_{\partial y_i})$ e ${}^{\partial}\!/_{\partial \bar{z}_i} = {}^1\!/_2 ({}^{\partial}\!/_{\partial x_i} + i{}^{\partial}\!/_{\partial y_i})$

Osservazione 1.7. Gli operatori appena definiti non sono derivate, ma ${}^{\partial}\!/_{\partial z_i}$ agisce sui polinomi come la normale derivata parziale rispetto a z_i; inoltre sono derivazioni, cioè sono operatori lineari che soddisfano la regola di Leibniz.

Teorema 1.8 (Cauchy-Riemann)**.** *Una funzione $f\colon D \to \mathbb{C}$ continua è olomorfa se e solo se ${}^{\partial f}\!/_{\partial \bar{z}_j} = 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Dimostrazione. Per il lemma di Osgood, f è olomorfa se e solo se è olomorfa rispetto a ogni z_i e per Cauchy-Riemann in una variabile questo accade se e solo se ${}^{\partial f}\!/_{\partial \bar{z}_j} = 0$ per ogni j. □

Proposizione 1.9 (conseguenze di Cauchy-Riemann)**.** *Le unità di $\mathscr{O}(D)$ sono le funzioni prive di zeri e se $f \in \mathscr{O}(D)$ e $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}$ o $|f|$ è costante, allora f è costante.*

Dimostrazione. Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in D$, la funzione $g = {}^1\!/_f$ è ben definita e $0 = {}^{\partial}\!/_{\partial \bar{z}_i}(fg) = {}^{\partial}\!/_{\partial \bar{z}_j}(f)g + f{}^{\partial}\!/_{\partial \bar{z}_j}(g) = f{}^{\partial}\!/_{\partial \bar{z}_j}(g)$ in quanto f è olomorfa, quindi ${}^{\partial}\!/_{\partial \bar{z}_j}(g) = 0$ per ogni $z \in D$, cioè g è olomorfa.

Se $f(z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in D$, anche le sue derivate sono reali, ma per Cauchy-Riemann ${}^{\partial f}\!/_{\partial x_j} = i{}^{\partial f}\!/_{\partial y_j}$, quindi devono annullarsi entrambe e f è costante. Se $|f|$ è costante, $f = \rho e^{i\vartheta(z)}$ con ϑ funzione olomorfa a valori reali, quindi costante. □

Definizione 1.10. Una mappa olomorfa tra $D \subseteq \mathbb{C}^n$ e $D' \subseteq \mathbb{C}^m$ è una funzione $G\colon D \to D'$, $G = (g_1, \dots, g_m)$ con $g_i\colon D \to \mathbb{C}$ olomorfa per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$.

Teorema 1.11. *Siano $f \in \mathscr{O}(D')$ e $G\colon D \to D'$, allora $f \circ G \in \mathscr{O}(D)$; in particolare, G induce un morfismo di algebre $\mathscr{O}(D') \to \mathscr{O}(D)$.*

Dimostrazione. Siano $z_0 \in D$, $w_0 = G(z_0) = (g_1(z_0), \dots, g_m(z_0))$; senza perdere di generalità si può supporre $z_0 = 0$ e $w_0 = 0$. Le funzioni g_i sono olomorfe in 0, quindi si possono scrivere come serie di potenze in z e in particolare G come serie ha termine noto nullo. Per $|z|$ abbastanza piccolo, $g_j(z_1, \dots, z_n) \leq \eta_j$ (se si suppone f convergere in $\Delta(0, \eta)$). Quindi si può sostituire il valore della serie g_j in quella di f. Che l'applicazione che si ottiene sia un morfismo di algebre è banale. □

Teorema 1.12 (prolungamento analitico)**.** *Siano $f, g \in \mathscr{O}(D)$, $f_{|U} = g_{|U}$ con $U \subseteq D$ aperto non vuoto, allora $f = g$.*

Dimostrazione. Sia E la parte interna dell'insieme $\{\, z \in D \mid f(z) = g(z) \,\}$; E è aperto in quanto è una parte interna, è non vuoto perché $U \subseteq E$. Sia $w \in \bar{E} \cap D$, allora $\Delta(w, r)$ interseca E; sia $w' \in \Delta(w, r/2) \cap E$. Ancora, esiste un policilindro $\Delta(w', \delta)$ che contiene w ed è contenuto in $\Delta(w, r)$. Le funzioni f e g sono olomorfe in D e hanno la stessa serie nel policilindro $\Delta(w', \delta)$, che converge anche in w, cioè $w \in E$. □

Teorema 1.13 (principio del massimo)**.** *Siano $f \in \mathscr{O}(D)$, $w \in D$ tale che $|f(z)| \leq |f(w)|$ per ogni z in un intorno $U \subseteq D$ di w; allora f è costante.*

Dimostrazione. Si può assumere che $U = \Delta(w, r)$; per ogni $z \in U$, sia R la retta complessa per z e w. Allora $f_{|R\cap U}$ è una funzione di una variabile complessa con un massimo relativo in w, quindi è costante; si ottiene così che f è costante in U e per il prolungamento analitico lo è in tutto D. □

Definizione 1.14. Siano $f \in \mathscr{O}(D)$, $z_0 \in D$; si può scrivere $f(z) = \sum_{|\nu|\geq 0} a_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_{i\geq 0} p_i(z)$ con p_i polinomio omogeneo di grado i; si definisce l'ordine di f in z_0 come k tale che $p_k \neq 0$ e $p_0 = \ldots = p_{k-1} = 0$.

Lemma 1.15 (di Schwarz)**.** *Sia f olomorfa in un intorno di $\bar{\Delta}(0, r)$, con $r = (\rho, \ldots, \rho)$ e f sia di ordine k in 0. Se $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \bar{\Delta}(0, r)$ allora $|f(z)| \leq M \left|{}^{z}/_{\rho}\right|^k$ per ogni $z \in \bar{\Delta}(0, r)$.*

Dimostrazione. Poiché f è di ordine k in 0, si può scrivere $f = \sum_{i\geq k} p_i(z)$; sia $g(t) = t^{-k} f\left(t{}^{z}/_{|z|}\right)$ con $t \in \mathbb{C}$, $|t| \leq \rho$. La funzione g è analitica perché t^{-k} si semplifica e per $|t| = \rho$, $|g(t)| \leq M\rho^{-k}$. Per il principio del massimo, $|g(t)| = M\rho^{-k}$ per ogni t tale che $|t| \leq r$, quindi

$$\left| |z|^{-k} f(z) \right| = |g(z)| \leq M\rho^{-k}.$$ □

2 Spazi funzionali

4.10.2006

Definizione 2.1. Si consideri lo spazio $\mathrm{C}(D, \mathbb{C})$ delle funzioni continue a valori complessi nel dominio D; si definisce su questo spazio una topologia a partire da un sistema fondamentale di intorni di 0:

$$\{\, U(K, \varepsilon) \mid K \subsetneq D \text{ compatto}, \varepsilon > 0 \,\}$$

con $U(K, \varepsilon) = \{\, f \mid \sup\{\, |f(x)| \mid x \in K \,\} < \varepsilon \,\}$. Questa topologia si chiama compatto-aperta.

Osservazione 2.2. Con la topologia compatto-aperta, una successione $(f_n)_{n\geq 0}$ converge a f se converge uniformemente a f. Inoltre, $\mathrm{C}(D, \mathbb{C})$ diventa uno spazio vettoriale topologico completo (perché il limite uniforme di una successione di funzioni continue è continuo).

Osservazione 2.3. La topologia compatto-aperta è indotta da una metrica: si scriva $D = \bigcup_{s\geq 0} K_s$ con K_{s-1} contenuto nella parte interna di K_s e K_s compatto. Posto $\|f\|_{K_s} = \sup\{\, |f(x)| \mid x \in K_s \,\}$, $\|\bullet\|_{K_s}$ è una seminorma (ovvero è una norma per cui non necessariamente vale $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$). Per un teorema, data una famiglia infinita di seminorme, esiste una loro combinazione lineare che dà una norma; ad esempio la distanza

$$d(f, g) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{2^m} \frac{\|f - g\|_{K_m}}{1 + \|f - g\|_{K_m}}$$

induce la topologia compatto-aperta.

Teorema 2.4. *$\mathscr{O}(D)$ è chiuso in $\mathrm{C}(D, \mathbb{C})$, quindi è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Data una successione $(f_m)_{m\geq 0}$ in $\mathscr{O}(D)$ che converge a f in $\mathrm{C}(D,\mathbb{C})$ con la topologia compatto-aperta, si deve dimostrare $f \in \mathscr{O}(D)$. Siano $w \in D$, $\bar{\Delta}(w,r) \subseteq D$; allora per ogni $m \geq 0$,

$$f_m(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\substack{|\xi_1 - w_1| = r_1 \\ \vdots \\ |\xi_n - w_n| = r_n}} \frac{f_m(\xi)}{(\xi_1 - z_1)\dots(\xi_n - z_n)} \mathrm{d}\xi.$$

Poiché la convergenza è uniforme, il limite passa sotto il segno dell'integrale, quindi vale la stessa formula con f al posto di f_m; ma l'integranda è sviluppabile in serie, quindi f è analitica. □

Teorema 2.5 (Ascoli-Arzelà)**.** *Ogni famiglia di funzioni equilimitate (cioè tale che per ogni K compatto esiste M tale che $|f| \leq M$ per ogni f) ha chiusura compatta.*

3 Teorema della mappa inversa

Definizione 3.1. Una funzione olomorfa f è regolare di ordine s rispetto a z_n nel punto w se come funzione della sola z_n ha uno zero di ordine s in w_n.

Lemma 3.2. *Sia f una funzione di ordine k in 0, allora esiste un cambio di coordinate lineare che rende f regolare di ordine k rispetto all'ultima variabile.*

Dimostrazione. Si può scrivere $f(z) = \sum_{i\geq k} p_i(z)$ e in particolare esiste un punto a tale che $p_k(a) \neq 0$. Chiaramente esiste una matrice $(n,(n-1))$ B tale che

$$A = \left(\begin{array}{c|c} & a_1 \\ B & \vdots \\ & a_n \end{array}\right)$$

abbia rango massimo. Con il cambio di coordinate dato da A si ha $z_i = \sum_{j=1}^{n-1} b_{i,j}\xi_j + a_i\xi_n$ e $g(\xi) = f(z(\xi))$. Essendo la trasformazione lineare, anche g ha ordine k in 0; inoltre $g(0,\dots,0,1) = f(a_1,\dots,a_n)$, quindi $g(0,\dots,0,\xi_n) = f(a_1,\dots,a_n)\xi_n^k + \dots$. Si è ottenuto che g è regolare di ordine k rispetto a ξ_n e in particolare che i cambi di coordinate che danno questo risultato sono, in un certo senso, molti. □

Lemma 3.3. *Sia f olomorfa in un disco di $\mathbb{C}$ con uno zero di ordine k in a; allora esiste un intorno U di a tale che per ogni $b \in U$, $f(z) - f(b)$ ha k radici distinte in U.*

Lemma 3.4. *Sia $f \in \mathscr{O}(\Delta(0,r))$, regolare di ordine k in 0 rispetto a z_n, allora esiste un policilindro $\Delta(0,\eta) \subseteq \Delta(0,r)$ tale che per ogni $(a_1,\dots,a_{n-1}) \in \Delta(0,(\eta_1,\dots,\eta_{n-1}))$, $f(a_1,\dots,a_{n-1},z_n)$ ha esattamente k zeri nel disco $|z_n| \leq \eta_n$ come funzione di z_n.*

Dimostrazione. Per ipotesi $f(0,\dots,0,z_n)$ ha uno zero di ordine k in 0; poiché gli zeri sono isolati, si può fissare η_n in modo che se z_n è tale che $0 < |z_n| \leq \eta_n$, $f(0,\dots,0,z_n) \neq 0$. Sia $\varepsilon = \inf\{\,|f(0,\dots,0,z_n)| \mid |z_n| = \eta_n\,\} > 0$. Ora, f è continua in un intorno del compatto $\{\,z \mid z_1 = \dots = z_{n-1} = 0, |z_n| = \eta_n\,\}$, quindi esiste un policilindro $\Delta(0,(\eta_1,\ldots,\eta_{n-1}))$ tale che per $z\in\Delta(0,\eta)$, si ha $|f(z)-f(0,\ldots,0,z_n)|<\varepsilon$.

Si prenda ora $(a_1,\ldots,a_{n-1})\in\Delta(0,(\eta_1,\ldots,\eta_{n-1}))$ e si fissino $g(z_n)=f(a_1,\ldots,a_{n-1},z_n)$, $h(z_n)=f(0,\ldots,0,z_n)$. Allora $|g|\leq|h|$ per $|z_n|=\eta_n$; per il teorema di Rouché, $g+f$ e h hanno lo stesso numero di zeri, e h ne ha k per il lemma precedente, quindi anche $f(a_1,\ldots,a_{n-1},z_n)$ ne ha k. □

9.10.2006

Teorema 3.5 (della funzione implicita)**.** *Sia f olomorfa in $\Delta(w,r)$, regolare di ordine 1 in w rispetto a z_n; allora esistono un policilindro $\Delta(w,\delta)\subsetneq\Delta(w,r)$ e un'unica funzione olomorfa φ, definita sulla proiezione D di $\Delta(w,\delta)$ nelle prime $n-1$ coordinate, tale che $f(z_1,\ldots,z_n)=0\Leftrightarrow\varphi(z_1,\ldots,z_{n-1})=z_n$.*

Dimostrazione. L'esistenza è data dal lemma precedente. Per l'ipotesi di regolarità, fissati $(z_1,\ldots,z_{n-1})\in D$ esiste un unica radice di $f(z_1,\ldots,z_{n-1},z_n)$ vista come funzione di z_n; sia $\varphi(z_1,\ldots,z_{n-1})$ questa radice; si deve dimostrate che φ è olomorfa. Grazie a una forma dell'indicatore logaritmico, si ha

$$\varphi(z_1,\ldots,z_{n-1})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-w_n|=\delta_n}\xi\frac{f'(z_1,\ldots,z_{n-1},\xi)}{f(z_1,\ldots,z_{n-1},\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

Quindi essendo rappresentata tramite un integrale di una funzione olomorfa (perché f non si annulla nell'insieme di integrazione), φ è olomorfa. □

Teorema 3.6. *Siano $f_{k+1},\ldots,f_n$ olomorfe in $\Delta(w,r)\subseteq\mathbb{C}^n$ tali che ${}^{\partial f_j}/_{\partial z_i}(w)=\delta_{i,j}$ e $f_j(w)=0$ per $i,j\in\{k+1,\ldots,n\}$. Allora esistono $\varphi_{k+1},\ldots,\varphi_n$ olomorfe in $\Delta(w,\delta)\subseteq\mathbb{C}^k$ tali che $f_j(z_1,\ldots,z_n)=0$ se e solo se $z_j=\varphi_j(z_1,\ldots,z_k)$ per $j\in\{k+1,\ldots,n\}$.*

Dimostrazione. Per induzione su $n-k$: il caso $n-k=1$ è il teorema precedente; si supponga ora che l'enunciato valga per ogni $k'>k$. Per il teorema della funzione implicita applicato a f_n, esiste un unica ψ tale che $f(z_1,\ldots,z_n)=0\Leftrightarrow z_n=\psi(z_1,\ldots,z_{n-1})$; sia $\bar{f}_j(z_1,\ldots,z_{n-1})=f_j(z_1,\ldots,z_{n-1},\psi)$. Per le $\bar{f}_j$ vale l'ipotesi induttiva, quindi esistono $\varphi_{k+1},\ldots,\varphi_{n-1}$ tali che $\bar{f}_j=0\Leftrightarrow z_j=\varphi_j$; risostituendo f_j si ottiene la tesi. □

Definizione 3.7. Sia $\Delta(w,r)\subseteq\mathbb{C}^m$, $F\colon\Delta(w,r)\to\mathbb{C}^m$, $F=(f_1,\ldots,f_m)$. La matrice jacobiana di F è $\mathrm{J}_F=({}^{\partial f_i}/_{\partial z_j})_{i,j}$. F si dice non singolare in w se $\mathrm{J}_F(w)$ ha rango massimo; è non singolare se lo è in ogni punto di $\Delta(w,r)$.

Teorema 3.8 (del rango)**.** *Sia $n\geq m$, $F\colon\Delta(0,r)\subseteq\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ non singolare con $F(0)=0$; allora esiste un cambio lineare di coordinate in $\mathbb{C}^m$, $w_i=\sum_{j=1}^m a_{i,j}z_j$ ed esistono funzioni olomorfe in un policilindro di centro 0, $\varphi_j(w_1,\ldots,w_{n-m})$ tali che $F(w_1,\ldots,w_n)=0\Leftrightarrow w_j=\varphi_j$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathrm{J}_F(0)$ ha rango m, esistono due matrici (cambiamenti lineari di coordinate) A e B tali che $B\,\mathrm{J}_F(0)A^{-1}=(\,0\mid I_m\,)$. Sia $G=B\circ F$; ancora, $G(0)=0$ e $G=(g_{n-m+1},\ldots,g_n)$, $g_i=\sum_{j=n-m}^n b_{i,j}f_j$. Quindi $\mathrm{J}_G(0)=(\,0\mid I_m\,)$ e si può applicare il teorema precedente. □

Teorema 3.9 (della mappa inversa)**.** *Sia $F\colon\Delta(0,r)\subseteq\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ olomorfa e regolare allora F è localmente invertibile con inversa olomorfa.*

Dimostrazione. Si ponga $H(z,w) = w - F(z)$; è olomorfa in un intorno di $0 \in (\mathbb{C}^n)^2$ e non singolare. Allora è possibile cambiare le coordinate in modo che $\mathrm{J}_H(0) = I_{2n}$, quindi esiste una mappa olomorfa $G = (g_1, \dots, g_n)$ tale che $H(w,z) = w - F(z) = 0 \Leftrightarrow z = G(w)$. □

4 Sottovarietà

11.10.2006

Definizione 4.1. Una *sottovarietà* di $\mathbb{C}^n$ è $M \subseteq \mathbb{C}^n$ tale che per ogni $p \in M$, esiste un intorno U di p e una mappa $F\colon U \to \mathbb{C}^m$ $(m \leq n)$ regolare in U e con $M \cap U = F^{-1}(0)$.

Teorema 4.2. *$M \subseteq \mathbb{C}^n$ è una sottovarietà se e solo se in ogni punto $p \in M$ c'è un sistema di coordinate olomorfe $w_1, \dots, w_n$ centrate in p su un policilindro $\Delta(p,r)$ tali che $M \cap \Delta(p,r) = \{ (w_1, \dots, w_n) \mid w_1 = \dots = w_m = 0 \}$.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$ Per ipotesi, esiste $F\colon \Delta(p,r) \to \mathbb{C}^m$, $F(q) = (w_1(q), \dots, w_m(q))$.

$\Rightarrow$ Per ipotesi esiste F tale che $M \cap U = F^{-1}(0)$ e $F(p) = 0$; sia $F = (f_1, \dots, f_m)$. Poiché F è regolare in p, i vettori $({}^{\partial f_j}/_{\partial z_1}, \dots, {}^{\partial f_j}/_{\partial z_n})$ con $j \in \{1, \dots, m\}$ sono linearmente indipendenti e si possono aggiungere $n - m$ righe che definiscono la matrice A in modo che $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{J}_F \\ A \end{smallmatrix}\right)$ sia invertibile. Ponendo $f_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} z_i$ per $m < j \leq n$ e $G = (f_1, \dots, f_n)$, si ottiene che G ha matrice jacobiana invertibile e quindi è un sistema di coordinate, che in più soddisfa la condizione $M \cap U = \{ (w_1, \dots, w_n) \mid w_1 = \dots = w_m = 0 \}$. □

Teorema 4.3. *$M \subseteq \mathbb{C}^n$ è una sottovarietà se e solo se per ogni $p \in M$ esiste un intorno U di p, un policilindro $\Delta(0,\delta) \subseteq \mathbb{C}^k$ e $F\colon \Delta(0,\delta) \to U$ olomorfa non singolare tale che $M \cap U = F(\Delta(0,\delta))$. Inoltre si definisce la* dimensione *di M come l'intero* $\dim M \coloneqq k$.

Dimostrazione. Innanzitutto, k è indipendente dalla parametrizzazione: se F e G soddisfano le richieste, allora $G^{-1}F$ è localmente un biolomorfismo, quindi le dimensioni degli spazi di partenza e destinazione devono coincidere.

Se M è una sottovarietà e $p \in M$, esiste un policilindro $\Delta(p,r) \subseteq \mathbb{C}^n$ e un sistema di coordinate $w_1, \dots, w_n$ tale che $M \cap \Delta(p,r) = \{ (w_1, \dots, w_n) \mid w_1 = \dots = w_m = 0 \}$; siano $k = n - m$ e $F\colon \Delta(0,\delta) \subseteq \mathbb{C}^k \to \Delta(p,r)$ con $F(z_1, \dots, z_k) = (0, \dots, 0, z_1, \dots, z_k)$. Allora $F(\Delta(0,\delta)) = M \cap \Delta(p, (r_1, \dots, r_m, \delta_1, \dots, \delta_k))$. □

5 Singolarità rimovibili

Teorema 5.1 (delle singolarità rimovibili di Riemann)**.** *Sia $f\colon \Delta(0,r) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, allora f si estende a una funzione olomorfa $\hat{f}\colon \Delta(0,r) \to \mathbb{C}$ se e solo se f è limitata in un intorno di 0.*

Definizione 5.2. Un insieme X è detto *magro* se la sua parte interna è vuota.

Definizione 5.3. Un sottoinsieme $X \subseteq D$ è *sottile* se per ogni $z \in D$ esiste una funzione olomorfa non nulla in un intorno U di z tale che $X \cap U \subseteq f^{-1}(0)$.

Osservazione 5.4. Essenzialmente, gli insiemi sottili sono (localmente) luoghi di zeri di funzioni olomorfe. In particolare, insiemi sottili sono magri.

Teorema 5.5. *Sia $X \subseteq D$ un insieme sottile, $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, $f \in \mathscr{O}(D \setminus X)$, localmente limitata in ogni punto di X (cioè, per ogni $p \in X$, esiste $\Delta(p,r)$ tale che $f_{|\Delta(p,r)\setminus X}$ è limitata), allora f si estende a $\hat{f} \in \mathscr{O}(D)$.*

Dimostrazione. Si può supporre $D = \Delta(0,r)$, $X = g^{-1}(0)$, $0 \in X$ e che a meno di un cambio di coordinate, g sia regolare di ordine $k \geq 1$ rispetto all'ultima variabile. Per il teorema degli zeri, esiste un polidisco $\Delta(0,\delta) \subseteq D$ tale che se $z_1, \ldots, z_{n-1}$ sono fissati in modo che $|z_i| < \delta_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, e $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$, allora $g(z_1, \ldots, z_{n-1}, \xi)$ ha k radici in $\{\, \xi \mid |\xi| \leq \delta_n \,\}$ ed è non nulla per $|\xi| = \delta_n$. Si può allora definire

$$\hat{f}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=\delta_n} \frac{f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} \mathrm{d}\xi.$$

Così definita, $\hat{f}$ è olomorfa in $z_1, \ldots, z_{n-1}$; lo è in z_n in quanto la formula è quella dell'integrale di Cauchy. Inoltre $\hat{f}$ estende f, poiché in un aperto dove f è definita coincidono, quindi devono coincidere ovunque per il teorema del prolungamento analitico. □

Corollario 5.6. *Sia D un aperto connesso e $X \subseteq D$ sottile, allora $D \setminus X$ è connesso.*

Dimostrazione. Si dimostra che $D \setminus \bar{X}$ è connesso: siano D_1 e D_2 due aperti di D tali che $D \setminus \bar{X} = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$; sia $f \colon D_1 \cup D_2 \to \mathbb{C}$ la funzione olomorfa definita da $f_{|D_1} \equiv 1$, $f_{|D_2} \equiv 2$. Allora per il teorema, f si estende ad una funzione olomorfa $\hat{f} \colon D \to \mathbb{C}$, che per il prolungamento analitico deve essere costantemente 1 o costantemente 2, perciò $D_1 = \varnothing$ o $D_2 = \varnothing$. □

Teorema 5.7. *Sia $n \geq 2$, $\Delta(0,r) \subseteq \mathbb{C}^n$, f olomorfa in un intorno connesso U di $\partial\Delta(0,r)$, allora f si estende a $\hat{f} \in \mathscr{O}(\Delta(0,r) \cup U)$.*

Dimostrazione. Siano $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \Delta(0, (r_1, \ldots, r_{n-1}))$, allora si ponga

$$\hat{f}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r_n} \frac{f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} \mathrm{d}\xi;$$

ancora, $\hat{f}$ è olomorfa in tutte le variabili ed è un'estensione di f: se $z_1, \ldots, z_{n-1}$ sono fissati opportunamente, $\{\, z \mid |z_n| \leq r_n \,\} \subseteq U$ e si ha $f(z_1, \ldots, z_n) = \hat{f}(z_1, \ldots, z_n)$. □

Corollario 5.8. *Se $n \geq 2$, le singolarità isolate di una funzione olomorfa sono rimovibili (rispetto al teorema di Riemann, cade la richiesta che la funzione sia limitata in un intorno della singolarità).*

Teorema 5.9. *Sia $D_i = \Delta(0,1) \subseteq \mathbb{C}$, $D'_i = \Delta(0, 1+\varepsilon_i) \subseteq \mathbb{C}$, $D \supseteq D_1 \times \ldots \times D_n$, $D \supseteq \partial D_1 \times \ldots \times \partial D_k \times D'_{k+1} \times \ldots \times D'_n$, $f \in \mathscr{O}(D)$; allora f si estende a $\hat{f}$ olomorfa in $D_1 \times \ldots \times D_k \times D'_{k+1} \times \ldots \times D'_n$.*

Dimostrazione. Si definisce

$$\hat{f}(z_1,\dots,z_n) \coloneqq \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \int\limits_{|\xi_1|=\dots=|\xi_k|=1} \frac{f(\xi_1,\dots,\xi_k,z_{k+1},\dots,z_n)}{(\xi_1-z_1)\dots(\xi_k-z_k)}\mathrm{d}\xi_1\dots\mathrm{d}\xi_k. \qquad \square$$

Teorema 5.10. *Siano* $\Delta(0,r) \subseteq \mathbb{C}^n$, $g_1, g_2 \in \mathscr{O}(\Delta(0,r))$, $g_1(0) = g_2(0) = 0$, $V = \{\, z \in \Delta(0,r) \mid g_1(z) = g_2(z) = 0 \,\}$*; allora* $f \in \mathscr{O}(\Delta(0,r) \setminus V)$ *si estende ad una funzione olomorfa in* $\Delta(0,r)$.

Dimostrazione. Si può supporre che g_1 sia regolare in 0 rispetto alla variabile z_n e che g_2 lo sia rispetto alla variabile z_{n-1}. Allora esiste un policilindro $D = \Delta(0,\delta)$ tale che $\bar{D} \subseteq \Delta(0,r)$ e $g_1(z_1,\dots,z_n) \neq 0$ per $|z_i| \leq \delta_i$, per ogni $i \in \{1,\dots,n-1\}$ e $|z_n| = \delta_n$. Allo stesso modo, si può trovare un altro policilindro che soddisfi la stessa condizione per g_2 rispetto a z_{n-1}, ed eventualmente prendendone uno più piccolo si può supporre che questi due policilindri coincidano. Allora $V \cap \Delta(0,r) \cap (tciz|z_{n-1}| = \delta_{n-1} \cup \{\, z \mid |z_n| = \delta_n \,\}) = \varnothing$ e si può definire

$$\hat{f}(z_1,\dots,z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\substack{|\xi_{n-1}|=\delta_n \\ |\xi_n|=\delta_n}} \frac{f(z_1,\dots,z_{n-2},\xi_{n-1},\xi_n)}{(\xi_{n-1}-z_{n-1})(\xi_n-z_n)}\mathrm{d}\xi_{n-1}\mathrm{d}\xi_n. \qquad \square$$

6 Forme differenziali

16.10.2006

Definizione 6.1. Dato D dominio di $\mathbb{C}^n$, l'algebra esterna generata da $\mathrm{d}z_1,\dots,\mathrm{d}z_n,\mathrm{d}\bar{z_1},\dots,\mathrm{d}\bar{z_n}$ su $\mathrm{C}^\infty(D)$, con

$$\mathrm{C}^\infty(D) = \left\{\, f\colon D \to \mathbb{C} \mid f \in \mathrm{C}^\infty(D \subseteq \mathbb{R}^{2n}) \,\right\},$$

cioè il $\mathrm{C}^\infty(D)$-modulo libero quozientato in modo da verificare le relazioni

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_j &= -\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}z_i \\ \mathrm{d}\bar{z_i} \wedge \mathrm{d}z_j &= -\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z_i} \\ \mathrm{d}\bar{z_i} \wedge \mathrm{d}\bar{z_j} &= -\mathrm{d}\bar{z_j} \wedge \mathrm{d}\bar{z_i}, \end{aligned}$$

si denota con $\mathscr{E}^{p,q}(D)$; un suo elemento è della forma

$$\varphi = \sum_{i,j} \varphi_{i,j}\mathrm{d}z_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z_{j_1}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z_{j_q}};$$

con $\mathscr{E}^\star(D)$ si intende $\sum_{p,q} \mathscr{E}^{p,q}(D)$ e $\varphi \in \mathscr{E}^{p,q}(D) \subseteq \mathscr{E}^\star(D)$ si dice avere *grado* (p,q) e *grado totale* $p+q$.

Definizione 6.2. A $\varphi \in \mathscr{E}^{p,q}$ si possono applicare gli operatori $\partial/\partial z_k$ e $\partial/\partial \bar{z_k}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial z_k} &= \sum_{i,j} \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z_{j_1}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z_{j_q}}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z_k}} &= \sum_{i,j} \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial \bar{z_k}}\mathrm{d}\bar{z_k} \wedge \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z_{j_1}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z_{j_q}}. \end{aligned}$$

Si hanno inoltre i seguenti operatori:

$$\begin{array}{rccl} \partial\colon & \mathscr{E}^{p,q} & \longrightarrow & \mathscr{E}^{p+1,q} \\ & \varphi & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}, \\ \bar{\partial}\colon & \mathscr{E}^{p,q} & \longrightarrow & \mathscr{E}^{p,q+1} \\ & \varphi & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k}, \\ d\colon & \mathscr{E}^{p,q} & \longrightarrow & \mathscr{E}^{p+1,q+1} \\ & \varphi & \longmapsto & \partial\varphi + \bar{\partial}\varphi. \end{array}$$

Osservazione 6.3. Si ricavano come regole di calcolo:

$$\begin{aligned} &\partial(\varphi \wedge \psi) = \partial\varphi \wedge \psi + (-1)^{pq}\varphi \wedge \partial\psi \\ &dd = \partial\partial = \bar{\partial}\bar{\partial} = 0 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}d \end{aligned}$$

Teorema 6.4 (di Cauchy generalizzato)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso con $\gamma = \partial D$ una curva semplice chiusa rettificabile; siano $U \supseteq \bar{D}$ un aperto e $f \in \mathrm{C}^{\infty}(U)$. Allora per ogni $z \in D$, valgono*

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) &= \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi + \iint\limits_{D} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\bar{\xi}}{\xi - z}, \\ 2\pi i f(z) &= -\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\bar{\xi} + \iint\limits_{D} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \frac{\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\bar{\xi}}{\xi - z}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Fissato $z \in D$, si sceglie un disco $\Delta = \Delta(z, r)$ con chiusura contenuta in D e si pone $D_r = D \setminus \bar{\Delta}$; D_r è ancora un dominio, di frontiera $\partial D - \partial\bar{\Delta} = \gamma - \gamma_r$. Poiché in D_r la funzione $(\xi - z)^{-1}$ è olomorfa, ${}^{\partial}/_{\partial\bar{\xi}}(\xi - z)^{-1}$ si annulla e

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\bar{\xi}}{\xi - z} = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\bar{\xi} = \mathrm{d} \left(\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z} \right).$$

Per il teorema di Stokes si ha:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{D_r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{\mathrm{d}\bar{\xi} \wedge \mathrm{d}\xi}{\xi - z} &= \iint\limits_{D_r} \mathrm{d} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) \mathrm{d}\xi = \int\limits_{\gamma - \gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = \\ &= \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z} - \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = \\ &= \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{f(re^{it} + z)}{re^{it}} ire^{it} \mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \int\limits_{0}^{2\pi} if(re^{it} + z) \mathrm{d}t \xrightarrow{r \to 0} \\ &\to \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - 2\pi i f(z). \end{aligned}$$

La seconda uguaglianza si ottiene allo stesso modo. □

Lemma 6.5. *Siano D, γ, f come nel teorema precedente, allora esistono $g, h \in \mathrm{C}^{\infty}(D)$ tali che ${}^{\partial g(z)}/_{\partial \bar{z}} = f(z)$, ${}^{\partial h}/_{\partial z} = f(z)$; inoltre, se f è differenziabile o olomorfa in altri parametri, anche g e h lo sono.*

Dimostrazione. Si definisce

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\bar{\xi},$$

da cui si deduce l'ultima parte dell'enunciato; fissato z, sia D_r come nell'ultima dimostrazione, allora

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\log|\xi - z|^2) &= \mathrm{d}(\log(\xi - z)(\bar{\xi} - \bar{z})) = \\ &= \mathrm{d}(\log(\xi - z) + \log(\bar{\xi} - \bar{z})) = \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} + \frac{\mathrm{d}\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{z}}, \end{aligned}$$

in quanto $\log(\xi - z)$ è olomorfa mentre $\log(\bar{\xi} - \bar{z})$ è antiolomorfa, quindi per Stokes

$$\begin{aligned} \iint_{D_r} \mathrm{d}(f(\xi)\log|\xi - z|^2 \,\mathrm{d}\bar{\xi}) &= \int_\gamma f(\xi)\log|\xi - z|^2 \,\mathrm{d}\bar{\xi} - \int_{\gamma_r} f(\xi)\log|\xi - z|^2 \,\mathrm{d}\bar{\xi} = \\ = \iint_{D_r} &\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \log|\xi - z|^2 \,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\bar{\xi} + \iint_{D_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\bar{\xi} + \\ &+ \cancel{\iint_{D_r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \log|\xi - z|^2 \,\mathrm{d}\bar{\xi} \wedge \mathrm{d}\bar{\xi}} + \cancel{\int_{D_r} \frac{f(\xi)}{\bar{\xi} - \bar{z}} \mathrm{d}\bar{\xi} \wedge \mathrm{d}\bar{\xi}}. \end{aligned}$$

Facendo tendere r a 0, gli integrali in D_r si trasformano in integrali in D, quelli in γ rimandono uguali e rimane da capire a cosa tende quello in γ_r: si pone $\xi = z + re^{it}$, $M = \sup\{\,|f(\xi)| \mid \xi \in \partial D\,\} < \infty$, allora

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} \left| \int_{\gamma_r} f(\xi)\log|\xi - z|^2 \,\mathrm{d}\bar{\xi} \right| &= \lim_{r\to 0} \left| \int_0^{2\pi} -f(z + re^{it}) 2r\log(r) i e^{-it} \mathrm{d}t \right| \le \\ &\le \lim_{r\to 0} M 4\pi r \log(r) = 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza si ha

$$2\pi i g(z) = -\iint_{D_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\bar{\xi} + \int_\gamma f(\xi)\log|\xi - z|^2 \,\mathrm{d}\bar{\xi}$$

e la derivata di g rispetto a $\bar{z}$ per il teorema di Cauchy generalizzato dà f. Rimane da dimostrare che anche la derivata di g rispetto a z è differenziabile; per h si procede allo stesso modo. □

Teorema 6.6 (lemma di Dolbeaut)**.** *Sia $\bar{\Delta}$ un polidisco chiuso, $\omega \in \mathscr{E}^{p,q}(U)$ con $U \supseteq \bar{\Delta}$ aperto e $q > 0$; allora $\bar{\partial}\omega = 0$ se e solo se esiste $\eta \in \mathscr{E}^{p,q-1}(D)$ tale che $\bar{\partial}\eta = \omega$.*

Dimostrazione. Sia ν il massimo j per cui $\mathrm{d}\bar{z}_j$ è coinvolto in ω; la dimostrazione è per induzione su ν. Se $\nu = 0$, $\omega = 0$ e si può prendere $\eta = 0$. Supponiamo ora l'asserto vero per le (p,q)-forme $\bar{\partial}$-chiuse che non contengono $\mathrm{d}\bar{z_\nu}, \dots, \mathrm{d}\bar{z_n}$ e sia $\omega = \mathrm{d}\bar{z_\nu} \wedge \alpha + \beta$, dove α e β non contengono $\mathrm{d}\bar{z_\nu}, \dots, \mathrm{d}\bar{z_n}$. Il coefficiente di ogni termine di α è una funzione $\alpha_{i,j} \in \mathrm{C}^\infty(U)$, quindi per il lemma precedente esiste $g_{i,j}$ tale che ${}^{\partial g_{i,j}}/_{\partial \bar{z_\nu}} = \alpha_{i,j}$; sia γ la forma che si ottiene sostituendo i coefficienti $\alpha_{i,j}$ con i $g_{i,j}$.

Inoltre, si ha $0 = \bar{\partial}\omega = \mathrm{d}\bar{z_\nu} \wedge \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}\beta$, quindi se $\alpha_{i,j}$ non fosse olomorfo in z_k, $k \geq \nu$ (equivalentemente, ${}^{\partial \alpha_{i,j}}/_{\partial \bar{z_k}} \neq 0$), in $\bar{\partial}\omega$ ci sarebbe un termine che non può essere cancellato da $\bar{\partial}\beta$, e viceversa, quindi $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$ sono olomorfi in z_k, $k \geq \nu$.

Si ottiene che $\bar{\partial}\gamma = d\bar{z_\nu} \wedge \alpha + \delta$ e si pone $\varphi \coloneqq \omega - \bar{\partial}\gamma = \beta - \delta$; in particolare $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\omega - \bar{\partial}\bar{\partial}\gamma = 0$ e φ soddisfa l'ipotesi induttiva, perché né β né δ contengono $\bar{z_\nu}$. Quindi esiste ψ tale che $\bar{\partial}\psi = \varphi$ e $\omega = \bar{\partial}\psi + \bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}(\psi + \varphi)$. □

18.10.2006

Grazie al lemma di Dolbeaut si può costruire la successione

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{E}^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{E}^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{E}^{p,q+1} \longrightarrow \cdots$$

che soddisfa $\bar{\partial}^2 = 0$; si può quindi parlare di coomologia e si definiscono i gruppi di coomologia di Dolbeaut come $h^{p,q}(U)$, le (p,q)-forme $\bar{\partial}$-chiuse modulo quelle esatte.

Teorema 6.7 (Dolbeaut)**.** *Sia Δ un polidisco (anche non compatto), allora:*

- *$h^{p,0}(\Delta)$ è costituito dalle $(p,0)$-forme con coefficienti olomorfi (in particolare $h^{0,0}(D) = \mathscr{O}(D)$);*
- *$h^{p,q}(\Delta) = 0$ per ogni $q \geq 1$.*

Dimostrazione. Se $\varphi \in h^{p,0}(\Delta)$, $\varphi = \sum_i \varphi_i \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_p}$ e $0 = \bar{\partial}\varphi = \sum_{j=1}^n {}^{\partial}/_{\partial \bar{z}_j} \left(\sum_i \varphi_i \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_p}\right) \wedge \mathrm{d}z_j$, da cui si deduce che ${}^{\partial \varphi_i}/_{\partial \bar{z}_j} = 0$ per ogni i e j.

Per il secondo punto, si suppone $\Delta = \bigcup_\nu \Delta_\nu$ con Δ_ν polidisco con lo stesso centro e a chiusura compatta, tale che $\bar{\Delta_\nu} \subseteq \Delta_{\nu+1}$. Si supponga inoltre $q > 1$; per induzione su ν si vuole trovare una φ_ν definita in un intorno di $\bar{\Delta_\nu}$ e tale che $\bar{\partial}\varphi_\nu = \varphi$, $\varphi_{\nu+1|\Delta_\nu} = \varphi_\nu$. Per $\nu = 1$ si tratta del lemma di Dolbeaut; si suppone ora di aver già trovato $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$ con quelle proprietà, con il lemma di Dolbeaut si ha una ψ tale che $\bar{\partial}\psi = \varphi$ in un intorno di $\Delta_{\nu+1}$; sia $\sigma \in \mathrm{C}^\infty$ una funzione tale che $\sigma_{|\Delta_\nu} \equiv 1$ e $\sigma_{|\mathbb{C}^n \setminus \Delta_{\nu+1}} \equiv 0$. Dove sono entrambe definite, $\bar{\partial}(\psi - \varphi_\nu) = \varphi - \varphi = 0$, allora ancora per il lemma ($q > 1$ implica $q - 1 > 0$) esiste ϑ di grado $(p, q-1)$ tale che $\bar{\partial}\vartheta = \psi - \varphi_\nu$. La funzione $\varphi_{\nu+1} = \psi - \bar{\partial}\sigma\vartheta$ soddisfa le richieste e se si prende η con $\eta_{|\Delta_\nu} = \varphi_\nu$, si ha $\bar{\partial}\Delta = \varphi$, quindi $\varphi = 0$ in $h^{p,q}(\Delta)$.

Nel caso $q = 1$, si costruiscono le φ_ν in modo che $\bar{\varphi_\nu} = \varphi$ e $\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu$ sia una forma olomorfa di $\mathscr{E}^{p,0}$ e $|\varphi_{\nu+1\,i}(z) - \varphi_{\nu\,i}(z)| < 2^{-\nu}$ su Δ_ν. Ancora, φ_1 si costruisce con il lemma di Dolbeaut; per il passo induttivo si trova ψ con $\bar{\partial}(\psi - \varphi_\nu) = 0$, per cui $\psi - \varphi_\nu$ ha coefficienti olomotfi; per soddisfare la condizione di convergenza, si possono sviluppare questi coefficienti in serie di potenze; le somme parziali di queste serie sono polinomi p_i che singolarmente convergono uniformemente, ma essendo in numero finito convergono uniformemente insieme. Allora esistono dei polinomi tali che $|\varphi_{\nu+1\,i}(z) - \varphi_{\nu\,i}(z) - p_i(z)| < 2^{-\nu}$ su

Δ_ν. Ma $P = \sum_i p_i \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_p}$ è una forma $\bar\partial$-chiusa in quanto ha i coefficienti olomorfi e si può fissare $\varphi_{\nu+1} = \psi - P$. Allora $\bar\partial\varphi_{\nu+1} = \varphi - 0 = \varphi$ e per costruzione si ha la condizione di convergenza. Ora, per ogni punto di Δ, la successione $(\varphi_\nu(z))_\nu$ è definita da un certo ν in poi e i coefficienti convergono uniformemente, quindi la successione determina una $(p,0)$-forma η e $\eta - \varphi_\mu = \lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu - \varphi_\mu$. La differenza ha coefficienti olomorfi quindi il limite ha coefficienti olomorfi per la chiusura delle funzioni olomorfe, quindi $0 = \bar\partial\eta - \bar\partial\varphi_\mu = \bar\partial\Delta - \varphi$. □

Esempio 6.8. Sia $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$; U è semplicemente connesso, ma $h^{p,1}(U) \neq 0$. Siano $U_i = \{\, (z_1, z_2) \mid z_i \neq 0 \,\}$, $r^2 = \left|z_1^2\right| + \left|z_2^2\right|$ e si definiscono

$$\omega_{|U_1} = \bar\partial \frac{\bar z_2}{z_1 r^2},$$
$$\omega_{|U_2} = -\bar\partial \frac{\bar z_1}{z_2 r^2};$$

sono entrambe forme chiuse su U_1 e U_2. Ora, $(z_1 z_2)^{-1}$ è olomorfa, quindi

$$0 = \bar\partial \frac{1}{z_1 z_2} = \bar\partial \frac{\bar z_1}{z_2 r^2} + \bar\partial \frac{\bar z_2}{z_1 r^2} = \omega_{|U_1} - \omega_{|U_2}:$$

questo significa che le due forme ne definiscono una globale. Per assurdo, sia f una primitiva di ω, allora $g = z_1 f - {}^{\bar z_2}/_{r^2}$ è ben definita su U e in U_1, ${}^{g}/_{z_1}$ soddisfa $\bar\partial {}^{g}/_{z_1} = \bar\partial f - \omega = 0$, il che significa che ${}^{g}/_{z_1}$ è olomorfa in U_1, quindi a maggior ragione lo è g. Ma g è localmente limitata in un intorno dell'origine, perciò si estende a $\mathbb{C}^2$ e $g(0, z_2) = {}^{\bar z_2}/_{|z_2|^2} = z_2^{-1}$ che non è olomorfa in 0, assurdo.

Problema 6.9 (Cousin). Siano $\Delta \subseteq \mathbb{C}^n$ un policilindro non necessariamente compatto, $\{U_i\}$ un suo ricoprimento aperto; dei dati di Cousin per questo ricoprimento sono delle funzioni $h_{i,j} \in \mathscr{O}(U_i \cap U_j)$ per ogni i e j tali che $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ tali che $h_{i,j} = -h_{j,i}$ e $h_{i,j} + h_{j,k} + h_{k,i} = 0$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$ (condizione di cociclo). Il problema consiste nel trovare $f_i \in \mathscr{O}(U_i)$ tali che $h_{i,j} = f_i - f_j$.

Esempio 6.10. Si suppone di avere delle primitive locali di una 1-forma, φ_i per ogni U_i e sia $h_{i,j} = \varphi_i - \varphi_j$; risolvere il problema di Cousin con questi dati significa riuscire a incollare le primitive (prendendo $\varphi_i - f_i$).

Teorema 6.11 (Cousin)**.** *Assegnati dei salti locali $h_{i,j} \in \mathscr{O}(U_i \cap U_j)$ per un ricoprimento di un polidisco Δ, esistono $f_i \in \mathscr{O}(U_i)$ tali che $h_{i,j} = f_i - f_j$.*

7 Germi di funzioni e di insiemi

25.11.2006

Definizione 7.1. Un *germe di funzione olomorfa* in $w \in \mathbb{C}^n$ è una classe di equivalenza di funzioni olomorfe in un intorno di w rispetto alla relazione $f \sim g$ se e solo se esiste un intorno W di w contenuto nell'intersezione dei domini di definizione e tale che $f_{|W} = g_{|W}$. L'insieme dei germi in w si denota con $\mathscr{O}_{n,w}$.

Osservazione 7.2. Si ha ovviamente $\mathscr{O}_{n,w} \cong \mathscr{O}_{n,0}$, che si indica anche solo con $\mathscr{O}_n$. Questo è un anello integro: se $fg = 0$, esiste un intorno U di 0 tale che $(fg)_{|U} = 0$ come funzione; se esiste $z \in U$ tale che $f(z) \neq 0$, per continuità f è non nulla in un aperto contenente z e ivi g è identicamente nulla, quindi $g = 0$ per il teorema d'identità.

Si può allora costruire il campo dei quozienti dell'anello $\mathscr{O}_n$, il campo dei germi delle funzioni meromorfe in 0, che verrà denotato $\mathscr{M}_n$. Le unità dell'anello $\mathscr{O}_n$ sono i germi delle funzioni che non si annullano in 0; i germi che si annullano in 0 formano invece un ideale massimale, perciò $\mathscr{O}_n$ è locale.

L'anello $\mathscr{O}_n$ si può vedere come l'anello delle serie analitiche convergenti in n variabili, $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Per lavorare su $\mathscr{O}_n$ si considereranno le inclusioni $\mathscr{O}_{n-1} \hookrightarrow \mathscr{O}_{n-1}[z_n] \hookrightarrow \mathscr{O}_n$: il primo passaggio è semplice, si tratta soltanto dell'anello dei polinomi in una variabile; il secondo richiede invece il teorema di preparazione di Weierstrass.

Definizione 7.3. Un polinomio $q \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ è detto *polinomio di Weierstrass* se $q = z_n^k + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z_n^i$ con $a_i \in \mathfrak{m} \leq \mathscr{O}_{n-1}$, cioè se per ogni i, a_i si annulla in 0.

Teorema 7.4 (di preparazione di Weierstrass)**.** *Sia $f \in \mathscr{O}_n$ regolare di ordine k in 0, allora esiste un unico polinomio di Weierstrass h di grado k tale che $f = uh$ con $u \in \mathscr{O}_n$ unità.*

Dimostrazione. Si può pensare che f sia regolare di ordine k in 0 rispetto a z_n; allora esiste un policilindro $\Delta(0, \delta)$ dove f è definita e tale che per ogni $z_1, \dots, z_{n-1}$ con $|z_i| < \delta_i$, f come funzione della sola z_n ha k radici in $|z_n| < \delta_n$ e non ne ha in $|z_n| = \delta_n$. Siano $\varphi_i(z_1, \dots, z_{n-1})$ con $i \in \{1, \dots, k\}$ le radici: le φ_i non sono necessariamente continue perché non c'è un modo canonico di ordinare le radici, ma le funzioni simmetriche elementari $\sum \varphi_i, \sum \varphi_i\varphi_j, \dots, \prod \varphi_i$ sono ben definite. Si ha

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(z_1, \dots, z_{n-1})^r = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=\delta_n} \frac{\partial f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{\partial \xi} \frac{\xi^r}{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)} \mathrm{d}\xi;$$

la funzione $f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)$ è non nulla per $|\xi| = \delta_n$, quindi le φ_i^r sono olomorfe. Denotando con $a_1, \dots, a_n$ le funzioni simmetriche elementari, si ha che $h = z_n^k + \sum_{i=1}^{n} a_i z_n^{n-i}$ è un polinomio di Weierstrass in quanto le a_i sono olomorfe e soddisfano $a_i(0) = 0$, dato che $\varphi_j(0) = 0$. Infine, $f/h \in \mathscr{M}_n$ è in realtà un'unità, poiché le radici di h sono le stesse di quelle di f e con la stessa molteplicità, e h per costruzione è l'unico polinomio di Weierstrass con questa proprietà. $\square$

Teorema 7.5 (di divisione)**.** *Siano $h \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ un polinomio di Weierstrass di grado k e $f \in \mathscr{O}_n$; allora esistono unici $g \in \mathscr{O}_n$ e $r \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ con $\deg r < k$ tali che $f = gh + r$. Inoltre, se $f \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$, anche $g \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$.*

Dimostrazione. Sia $\Delta(0, \delta)$ un policilindro dove f e h sono definite tale che $h(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ per $|z_i| < \delta_i$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e $|z_n| = \delta_n$. Siano

$$g(z_1, \dots, z_n) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=\delta_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{h(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)(\xi - z_n)} \mathrm{d}\xi$$

e $r := f - gh$, cioè

$$\begin{aligned} r(z_1,\dots,z_n) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=\delta_n}\frac{f(z_1,\dots,z_{n-1},\xi)}{\xi - z_n}\mathrm{d}\xi - \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=\delta_n}\frac{h(z_1,\dots,z_n)}{h(z_1,\dots,z_{n-1},\xi)}\frac{f(z_1,\dots,z_{n-1},\xi)}{\xi - z_n}\mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=\delta_n}\frac{f(z_1,\dots,z_{n-1})}{h(z_1,\dots,z_{n-1},\xi)}\frac{h(z_1,\dots,z_n) - h(z_1,\dots,z_{n-1},\xi)}{\xi - z_n}\mathrm{d}\xi; \end{aligned}$$

la variabile z_n viene coinvolta solo nell'ultima frazione e se $h(z_1,\dots,z_n) = z_n^k + \sum_{i=1}^n a_i z_n^{n-i}$, il numeratore risulta $(\xi^k - z_n^k) + \sum_{i=1}^n a_i(\xi^{n-i} - z_n^{n-i})$, che è divisibile per $\xi - z_n$: quindi r è un polinomio in z_n di grado al più $k-1$. Se inoltre $f \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$, l'ultima conclusione deriva dal teorema di divisione nell'anello dei polinomi.

Per l'unicità, se $f = gh + r = g'h + r'$, allora $r - r' = h(g - g')$; poiché il secondo membro si annulla in generale k volte e il primo al più $k-1$, segue che $r = r'$ e di conseguenza $g = g'$. □

Lemma 7.6. *Sia f un polinomio di Weierstrass, allora f è riducibile in $\mathscr{O}_n$ se e solo se è riducibile in $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$ Se f è riducibile in $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ allora $f = g_1 g_2$ con g_i non unità; se per assurdo g_1 fosse una unità di $\mathscr{O}_n$, si potrebbe scrivere $f/g_1 = g_2$ e applicando il teorema di preparazione seguirebbe che $g_1^{-1} \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$, assurdo.

$\Rightarrow$ Se $f = g_1 g_2$ in $\mathscr{O}_n$ con g_i non unità, allora $g_i = u_i h_i$ e $f = u_1 u_2 h_1 h_2$, ma $h_1 h_2$ è ancora un polinomio di Weierstrass e per l'unicità della preparazione $u_1 u_2 = 1$ e $h_1 h_2 = f$, quindi f è riducibile in $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. □

Proposizione 7.7. *L'anello $\mathscr{O}_n$ è un UFD noetheriano.*

Dimostrazione. Per induzione su n: se $n = 0$, $\mathscr{O}_n \cong \mathbb{C}$ quindi la tesi è verificata; se $\mathscr{O}_k$ è un UFD noetheriano per ogni $k < n$, sia $f \in \mathscr{O}_n$, allora $f = uh$ e h si scrive a meno di unità in modo unico come prodotto di fattori irriducibili, che sono irriducibili anche in $\mathscr{O}_n$ per il lemma, quindi si ha la decomposizione, che è unica perché gli irriducibili di $\mathscr{O}_n$ lo sono anche in $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. Per la noetherianità, $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ è noetheriano per il teorema della base di Hilbert; sia $I \leq \mathscr{O}_n$ un ideale, allora $A \cap \mathscr{O}_{n-1}[z_n] = (h_1,\dots,h_s)$. Sia $g \in A$ regolare in z_n; per il teorema di preparazione si può assumere che $g \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. Si dimostrerà che $I = (h_1,\dots,h_s,g)$: se $f \in I$, $f = gt + r$, per cui $r \in I \cap \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ e $r = \sum_{i=1}^s h_i r_i$, da cui $f = gt + \sum_{i=1}^s h_i r_i$. □

30.11.2006: TODO
6.11.2006

Definizione 7.8. Dato $K \subseteq \mathbb{C}^n$ chiuso, l'*insieme dei germi di funzioni olomorfe* su K è $\mathscr{O}_K$ ed è l'insieme delle funzioni olomorfe su un aperto che contiene K modulo l'uguaglianza su un aperto che contiene K.

Osservazione 7.9. Poiché $\mathscr{O}_K \subseteq \mathrm{C}(K,\mathbb{C})$, se K è compatto si può definire la seminorma $\|f\|_K = \sup\{\, |f(z)| \mid z \in K \,\}$; questa, vista in $\mathscr{O}_K$ (non in $\mathrm{C}(K,\mathbb{C})$), diventa una norma se K° non è vuoto. Se $F = (f_1,\dots,f_p) \in \mathscr{O}_K^p$, si definisce $\|F\|_K = \max \|f\|_K$.

Teorema 7.10 (di divisione esteso)**.** *Sia h olomorfa in $U \supseteq \bar{\Delta}(0,r)$, tale che h_0, il suo germe in 0, sia un polinomio di Weierstrass in z_n di grado k. Si supponga inoltre che per ogni $(a_1,\dots,a_{n-1})$ con $|a_j| \le r_j$, tutte le radici di $h(a_1,\dots,a_{n-1},z_n)$ siano in $|z_n| < r_n$. Allora, per ogni $f \in \mathscr{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$, esiste $k > 0$ tale che $f = gh + p$, con $g \in \mathscr{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ e $p = \sum p_j(z_1,\dots,z_{n-1})z_n$; inoltre $\|g\|_{\bar{\Delta}(0,r)} \le k\,\|f\|_{\bar{\Delta}(0,r)}$ e $\|p_j\|_{\bar{\Delta}(0,r)} \le k\,\|f\|_{\bar{\Delta}(0,r)}$.*

Dimostrazione. Poiché $f \in \mathscr{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$, f è olomorfa in un aperto $U \supsetneq \bar{\Delta}(0,r+2\varepsilon)$ e si può supporre che le ipotesi valgano anche su questo policilindro allargato; si integra relativamente al policilindro $\bar{\Delta}(0,r+\varepsilon)$, per cui risulta, con procedimenti simili a quelli del teorema di divisione,

$$g(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r_n+\varepsilon_n} \frac{f(z_1,\dots,z_{n-1},\xi)}{h(z_1,\dots,z_{n-1},\xi)(\xi - z_n)}\mathrm{d}\xi,$$

mentre $p = f - gh$ risulta determinato da

$$p_j(z_1,\dots,z_{n-1}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_n+\varepsilon_n} \frac{h_j^\star(z_1,\dots,z_{n-1},t)f(z_1,\dots,z_{n-1},t)}{h(z_1,\dots,z_{n-1},t)}\mathrm{d}t,$$

dove le $h_j^\star$ sono funzioni simmetriche dei coefficienti di h.

Si maggiorano i coefficienti di p: il denominatore all'interno dell'integrale non si annulla mai, inoltre l'integrale dipende solo dalla classe di omotopia del cammino, per cui equivale allo stesso integrale calcolato in $|t| = r_n$. Sia ora

$$k_j = \sup\left\{ \left|\frac{h_j^\star(z_1,\dots,z_{n-1},t)}{h(z_1,\dots,z_{n-1},t)}\right| \mid |z_j| \le r_j, |t| = r_n \right\},$$

allora $|p_j(z_1,\dots,z_{n-1})| \le r_n k_j \,\|f\|_{\bar{\Delta}(0,r)}$.

Per g, si nota che $h(z)$ non si annulla sulla circonferenza, quindi per ogni punto sul bordo del policilindro vale

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z) - p(z)}{h(z)}\right| \le \frac{1}{m}\left(1 + \sum r_j k_j\right)\|f\|_{\bar{\Delta}(0,r)}.$$

Ponendo k il massimo delle costanti trovate finora, si trova la maggiorazione. □

Osservazione 7.11. Il teorema non è un'estensione banale del teorema di divisione: scegliendo opportunamente l'ultima dimensione, il teorema vale su "molti" policilindri contenuti in un aperto fissato.

Teorema 7.12. *Sia U un aperto contenente 0 in $\mathbb{C}^n$ e siano $G_1,\dots,G_q \in \mathscr{O}(U)^p$, con i germi di $G_1,\dots,G_q$ in 0 che generano un certo modulo $M \subseteq \mathscr{O}_n^p$; allora eventualmente cambiando linearmente le coordinate, esiste un policilindro $\bar{\Delta}(0,r)$ contenuto in U tale che per ogni $F \in M_{\bar{\Delta}(0,r)}$, dove*

$$M_{\bar{\Delta}(0,r)} = \left\{ F \in \mathscr{O}^p_{\bar{\Delta}(0,r)} \mid F_0 \in M \right\}$$

e F_0 è il germe di F in 0, F è generato dalle G_i con coefficienti olomorfi nel policilindro: $F = \sum_{i=1}^q h_i G_i$ con $h_i \in \mathscr{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ e $\|h_j\|_{\bar{\Delta}(0,r)} \le k\,\|F\|_{\bar{\Delta}(0,r)}$.

Osservazione 7.13. Anche qui, il policilindro è fissato prima della F: non è la banale considerazione che se i germi in 0 sono in numero finito, allora esiste un aperto su cui sono tutte olomorfe.

8 Spazi analitici e germi di spazi analitici

Si sono già definite le sottovarietà $U \subseteq \mathbb{C}^n$: localmente, sono luoghi di zeri di funzione olomorfe (per ogni punto della varietà, esiste un intorno in cui la varietà si descrive come $z_1 = \ldots = z_r = 0$). Non è vero il contrario, che il luogo degli zeri di polinomi descriva una varietà; ad esempio, per $X = \{ (z_1, z_2) \mid z_1 z_2 = 0 \}$, al di fuori dell'origine per il criterio Jacobiano si ha una varietà; nell'origine però non può essere una varietà: se si prende un intorno opportuno U di 0, $X \cap U \setminus \{(0,0)\}$ dovrebbe apparire come un policilindro in $\mathbb{C}^{n-1}$ meno un punto, quindi sarebbe connesso, ma questo è sconnesso e quindi X non è una varietà.

Se si prende il cono, $X = \left\{ (z_1, z_2, z_3) \mid z_3^2 = z_1 z_2 \right\} \subseteq \mathbb{C}^3$, è una varietà al di fuori di $(0,0,0)$ ma nell'origine non lo è: X intersecato un intorno dell'origine dovrebbe apparire come una sfera 4-dimensionale, quindi togliendo l'origine rimane semplicemente connessa; ma la mappa $(u, v) \mapsto (u^2, v^2, uv)$ è un rivestimento doppio e il bordo dell'intorno si mostra essere un $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

Definizione 8.1. Un insieme $X \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$, con U aperto, è uno spazio analitico se per ogni $a \in U$, esiste un intorno V_a di a tale che $X \cap V_a = \{ z \in V_a \mid f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0 \}$ con $f_j \in \mathscr{O}(V_a)$. In particolare, tutte le varietà algebriche affini (luoghi di zeri di polinomi) sono spazi analitici.

Teorema 8.2. *Se $X \subseteq U$ è un insieme analitico, allora è chiuso, magro e non sconnette U.*

Dimostrazione. Per dimostrare che è chiuso, sia $x \in U$ e sia $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ con $x_n \in X$, si deve dimostrare che $x \in X$. Per definizione x ha un intorno V tale che $X \cap V = \{ z \in V \mid f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0 \}$; definitivamente, $x_n \in V$, ma f_j sono in particolare continue e se si annullano in ogni x_n si annullano anche in x, cioè $x \in X$. Gli altri punti erano già stati dimostrati. ☐

Teorema 8.3. *Siano $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{O}(U)$ una famiglia di funzioni olomorfe, $X = \mathrm{Z}(\mathscr{F}) := \{ x \in U \mid (\forall f \in \mathscr{F}) f(x) = 0 \}$. Allora X è uno spazio analitico*[1].

Dimostrazione. Sia $z \in U$ e $\mathscr{F}_z = \{ f_z \mid f \in \mathscr{F} \}$; si considera l'ideale I generato da $\mathscr{F}_z$ in $\mathscr{O}_{n,z}$, ma questo è un anello noetheriano, quindi $I = (g_1, \ldots, g_q)$ con $g_i = \sum_{j=1}^t h_{i,j} f_j$ con $f_j \in \mathscr{F}_z$: si possono scegliere i generatori di I in $\mathscr{F}_z$ (le f_j generano I e sono un numero finito).

Si applica il teorema dei moduli: g_j sono germi di funzioni olomorfe su U e se $f \in \mathscr{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ e $f_z \in \mathscr{F}_z$, allora $f = \sum_{j=1}^q h_j g_j$ con $h_j \in \mathscr{O}(\bar{\Delta}(0,r))$. Si scrive $X \cap \bar{\Delta}(0,r) = \{ z \mid g_1(z) = \ldots = g_q(z) = 0 \}$: infatti $X \cap \bar{\Delta}(0,r) = \mathrm{Z}(\mathscr{F}) \cap \bar{\Delta}(0,r) \supseteq \mathrm{Z}(g_1, \ldots, g_q) \supseteq \mathrm{Z}(\mathscr{F}) \cap \bar{\Delta}(0,r)$: la seconda inclusione è banale, la prima deriva dalla scrittura di f fatta precedentemente. ☐

Definizione 8.4. Siano X e Y insiemi qualunque definiti in U e V, con $0 \in U \cap V$; si dice che X e Y sono equivalenti se esiste W con $0 \in W \subseteq U \cap V$ tale che $X \cap W = Y \cap W$. La classe di equivalenza corrispondente si chiama *germe d'insieme* in 0.

Definizione 8.5. Un *germe di spazio analitico* in 0 è un luogo di zeri di un ideale in $\mathscr{O}_n$. L'insieme dei germi si denota con $\mathscr{B}_n$.

[1] $\mathscr{O}(U)$ non è un anello noetheriano, quindi questo teorema ha senso

Esercizio 8.6. Il luogo di zeri di un'ideale in $\mathscr{O}_n$ è una classe di equivalenza di insiemi analitici definiti in un intorno di 0.

Teorema 8.7. *Se X e Y sono germi di spazi analitici, allora lo sono anche $X \cap Y$ e $X \cup Y$.*

Dimostrazione. Si ha $X = \mathrm{Z}(f_1, \dots, f_q)$ e $Y = \mathrm{Z}(g_1, \dots, g_s)$, allora si avrà $X \cap Y = \mathrm{Z}(f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_s)$ e $X \cup Y = \mathrm{Z}(f_i g_j)$. □

Osservazione 8.8. Sia $X \in \mathscr{B}_n$, allora $\mathrm{I}(X) \coloneqq \{ f \in \mathscr{O}_n \mid \mathrm{Z}(f) \supseteq X \}$ è un ideale di $\mathscr{O}_n$; viceversa, se I è un ideale in $\mathscr{O}_n$, $\mathrm{Z}(I) \in \mathscr{B}_n$.

Teorema 8.9. *Dati $V_1, V_2 \in \mathscr{B}_n$, allora:*

1. $V_1 \supseteq V_2 \Rightarrow \mathrm{I}(V_1) \subseteq \mathrm{I}(V_2)$*;*
2. $V_1 \neq V_2 \Rightarrow \mathrm{I}(V_1) \neq \mathrm{I}(V_2)$*;*
3. $I_1 \supseteq I_2 \Rightarrow \mathrm{Z}(I_1) \subseteq \mathrm{Z}(I_2)$*;*
4. $\mathrm{I}(V)$ *è radicale;*
5. $\mathrm{Z}\,\mathrm{I}(V) = V$*;*
6. $\mathrm{Z}(I) = \mathrm{Z}(\mathrm{r}(I))$*;*
7. $\mathrm{I}\,\mathrm{Z}(I) \supseteq \mathrm{r}(I)$[2].

Dimostrazione. 1. Ovvio.

2. Se $V_1 = \mathrm{Z}(g_1, \dots, g_q) \neq \mathrm{Z}(f_1, \dots, f_s) = V_2$ allora esiste un intorno W di zero in cui tutto e definito ed esiste $z_W \in V_1 \setminus V_2 \cup V_2 \setminus V_1$. Si può quindi trovare una successione (z_n) convergente a 0 e tale che $z_n \in V_2 \setminus V_1$ e $g_n(z_n) \neq 0$, quindi $g_n \notin \mathrm{I}(V_2)$.
3. Si procede allo stesso modo del punto precedente.
4. Sia $f \in \mathrm{r}(\mathrm{I}(V))$, cioè $f^r \in \mathrm{I}(V)$, allora $\mathrm{Z}(f^r) \supseteq V$, ma $\mathrm{Z}(f^r) = \mathrm{Z}(f)$, quindi $f \in \mathrm{I}(V)$.
5. Ogni $f \in \mathrm{I}(V)$ si annulla in tutto V, quindi $V \subseteq \mathrm{Z}\,\mathrm{I}(V)$; viceversa, poiché V è un germe, $V = \mathrm{Z}(f_1, \dots, f_r)$ con $f_i \in \mathrm{I}(V)$, cioè f_i si annulla su $\mathrm{Z}\,\mathrm{I}(V)$, il che significa che $\mathrm{Z}\,\mathrm{I}(V) \subseteq \mathrm{Z}(f_i)$ per ogni i, da cui la tesi.
6. Poiché $I \subseteq \mathrm{r}(I)$, sicuramente $\mathrm{Z}(I) \supseteq \mathrm{Z}(\mathrm{r}(I))$, viceversa, se $f \in \mathrm{r}(I)$, $f^n \in I$ e quindi f si annulla su $\mathrm{Z}(I)$, da cui si ha l'altra inclusione.
7. Se $f \in \mathrm{r}(I)$, f si annulla su $\mathrm{Z}(\mathrm{r}(I))$ quindi $f \in \mathrm{I}\,\mathrm{Z}(\mathrm{r}(I)) = \mathrm{I}\,\mathrm{Z}(I)$. □

8.11.2006

Definizione 8.10. Sia $V \in \mathscr{B}_n$, V si dice riducibile se esistono $V_1, V_2 \in \mathscr{B}_n$ tali che $V_i \neq V$ e $V = V_1 \cup V_2$; V è irriducibile se non è riducibile.

Teorema 8.11. *V è irriducibile se e solo se $\mathrm{I}(V)$ è primo.*

[2] In un anello dei polinomi, questa sarebbe un'uguaglianza (teorema degli zeri o Nullstellensatz). Nel caso analitico, si vorrà dimostrare che si ha l'uguaglianza almeno nel caso che I sia primo

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Se $\mathrm{I}(V)$ non è primo, esistono $f_1, f_2 \in \mathscr{O}_n$ tali che $f_i \notin V$ ma $f_1 f_2 \in V$; allora si pone $V_i = \mathrm{Z}(f_i)$ e $V = (V_1 \cap V) \cup (V_2 \cup V)$.

$\Leftarrow$ Si suppone che V sia riducibile, allora $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \neq V$, allora $\mathrm{I}(V) \subsetneq \mathrm{I}(V_i)$; esiste allora $f_i \in \mathrm{I}(V_i) \setminus \mathrm{I}(V)$ e $f_1 f_2 \in \mathrm{I}(V)$. ☐

Corollario 8.12. *Sia $V = \mathrm{Z}(f)$, allora V è irriducibile se e solo se $f = p^k$ con $p \in \mathscr{O}_n$ irriducibile*[3].

Teorema 8.13. *Sia $V \in \mathscr{B}_n$, allora esiste un'unica decomposizione $V = \bigcup_{i=1}^{s} V_j$ con V_j irriducibile e tale che per ogni j, $V_j \subsetneq \bigcup_{i \in \{1,\dots,\hat{j},\dots,s\}} V_i$.*

Dimostrazione. Si può scrivere $\mathrm{I}(V) = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_s$ con $\mathfrak{p}_i$ primo e la decomposizione non è ridondante perché l'anello è a fattorizzazione unica. Allora $V_i = \mathrm{Z}(\mathfrak{p}_i)$ dà una decomposizione che soddisfa le richieste. Per l'unicità, se $V = \bigcup_i V_i = \bigcup_j W_j$, allora per ogni j, $W_j \subseteq \bigcup_i V_i$, allora per l'irriducibilità di W_j, deve esistere σ tale che $W_j \subseteq V_{\sigma(j)}$; viceversa, $V_i \subseteq W_{\tau\sigma(j)}$ e così via. Si conclude che le due decomposizioni sono uguali. ☐

9 Nullstellensatz per ideali primi

Lemma 9.1. *Siano $f, g \in \mathscr{O}_n$ primi fra loro (grazie alla fattorizzazione unica questo significa soltanto che le loro decomposizioni non hanno fattori comuni); allora esiste un sistema di coordinate*[4] *$z_1, \dots, z_n$ ed esistono $\lambda, \mu \in \mathscr{O}_n$ tali che $0 \neq \lambda f + \mu g \in \mathscr{O}_{n-1}$.*

Dimostrazione. Esiste un sistema di coordinate in cui $f = uP$ e $g = vQ$ con u, v unità e P, Q polinomi di Weierstrass coprimi (l'irriducibilità in $\mathscr{O}_n$ è la stessa che in $\mathscr{O}_{n-1}$). Sia $\mathscr{F}$ il campo dei quozienti di $\mathscr{O}_{n-1}$, allora esistono $h, k \in \mathscr{F}[z_n]$ tali che $hP + kQ = 1$ per il teorema di Bézout. Liberando dai denominatori si ottiene la relazione $\lambda' P + \mu' Q = a \in \mathscr{O}_{n-1}$; ponendo $\lambda = \lambda' u^{-1}$ e $\mu = \mu' v^{-1}$ si ha la relazione $\lambda f + \mu g = a \neq 0$. ☐

Teorema 9.2 (Nullstellensatz per ideali principali)**.** *Sia $g \in \mathscr{O}_n$ irriducibile (in particolare, (g) è un ideale primo di $\mathscr{O}_n$); allora $\mathrm{I}\,\mathrm{Z}(g) = (g)$ in $\mathscr{O}_n$.*

Dimostrazione. Si può supporre che g non sia la funzione nulla né un'unità; cambiando opportunamente le coordinate, si può scrivere $g = uP$ con P polinomio di Weierstrass irriducibile di grado k. Ovviamente si può supporre che $g = P$ senza perdità di generalità. Sia $f \in \mathrm{I}\,\mathrm{Z}(g)$; si sa esistere un sistema di coordinate in cui sia f che g sono entrambi polinomi. Se f non è un multiplo di g, f e g sono coprimi in quanto g è irriducibile, allora dal lemma si ha $0 \neq \lambda f + \mu g = p \in \mathscr{O}_{n-1}$. Questa è una relazione tra funzioni (non solo tra germi) in un opportuno $\Delta(0, r)$, scelto in modo che per ogni $(a_1, \dots, a_{n-1})$ con $a_j < r_j$, il polinomio $g(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n)$ abbia almeno una radice in $|z_n| < r_n$. Preso $z_0 \in \Delta(0, (r_1, \dots, r_{n-1}))$ esiste z_n tale che $(z_0, z_n) \in \Delta(0, r)$ e $g(z_0, z_n) = 0$. Ne consegue che $f(z_0, z_n) = 0$ e $p(z_0) = 0$, in quanto p non dipende da z_n. Allora per l'arbitrarietà di z_0, p è identicamente nulla, che contraddice l'ipotesi usata per il lemma, cioè f e g non sono coprimi o equivalentemente $f \in (g)$. ☐

[3] Non è detto che f generi $\mathrm{I}(V)$.

[4] Ciò significa sempre un cambiamento lineare di coordinate, che induce un automorfismo dell'algebra $\mathscr{O}_n$.

Corollario 9.3. *Sia $f \in \mathscr{O}_n$, $f = \prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i}$ la sua decomposizione nell'UFD $\mathscr{O}_n$; allora $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(p_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Z}(p_s)$ è la decomposizione di $\mathrm{Z}(f)$ in componenti irriducibili.*

Dimostrazione. I fattori di f sono irriducibili, quindi (p_i) è primo e $\mathrm{Z}(p_i)$ è irriducibile; l'uguaglianza insiemistica è banale in quanto $\mathscr{O}_n$ è un anello integro. Se la decomposizione fosse ridondante, si avrebbe $\mathrm{Z}(p_i) \subseteq \mathrm{Z}(p_j)$, allora $\mathrm{I}\,\mathrm{Z}(p_i) \supseteq \mathrm{I}\,\mathrm{Z}(p_j)$ e $(p_i) \supseteq (p_j)$, ma questo non è possibile perché si avrebbe $p_i \mid p_j$. $\square$

Osservazione 9.4. Sia $I \subseteq \mathscr{O}_n$ un ideale; $\mathscr{O}_n$ è un anello noetheriano quindi esiste la decomposizione primaria $I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ con Q_i primari. Ma $\mathrm{I}\,\mathrm{Z}(I) \supseteq \mathrm{r}(I) \supseteq I$ quindi si può partire da un ideale radicale, che nella decomposizione primaria ha solo ideali primi: $\mathrm{r}(I) = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$ in modo non ridondante (questi ideali primi sono quelli associati agli ideali primari Q_i). Allora $\mathrm{I}\,\mathrm{Z}(\mathrm{r}(I)) = \mathrm{I}(\mathrm{Z}(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Z}(\mathfrak{p}_s)) = \mathrm{I}\,\mathrm{Z}(\mathfrak{p}_1) \cap \ldots \cap \mathrm{I}\,\mathrm{Z}(\mathfrak{p}_s)$. Quindi si osserva che per dimostrare il Nullstellensatz è sufficiente dimostrarlo per gli ideali primi.

13.11.2006

Sia quindi $\mathfrak{p}$ primo in $\mathscr{O}_n$; se è l'ideale nullo, $\mathrm{Z}(\mathfrak{p}) = \mathbb{C}^n$ e chiaramente $\mathrm{I}(\mathbb{C}^n) = (0)$. Ci si restringe quindi al caso $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq (1)$; $\mathscr{O}_n/\mathfrak{p}$ è un dominio, quindi si può costruire il suo campo dei quozienti. Si vuole dimostrare che $\mathscr{F}$, il campo dei quozienti di $\mathscr{O}_n/\mathfrak{p}$, è un'estensione algebrica finita di $\mathscr{F}_k$, il campo dei quozienti di $\mathscr{O}_k$, per un preciso k, che rappresenterà la dimensione[5] di $\mathrm{Z}(\mathfrak{p})$ e che $\mathscr{O}_n/\mathfrak{p}$ è intero su $\mathscr{O}_k$.

Definizione 9.5. Un sistema di coordinate $z_1, \ldots, z_n$ è *regolare* per $\mathfrak{p}$ se esiste $k \leq n$ tale che $\mathfrak{p} \cap \mathscr{O}_k = \{0\}$ (quindi si può pensare a $\mathscr{O}_n/\mathfrak{p}$ come a un $\mathscr{O}_k$-modulo), $\mathscr{O}_n/\mathfrak{p}$ è intero su $\mathscr{O}_k$ e $\eta_{k+1} = \pi(z_{k+1})$ è un elemento primitivo di $\mathscr{F}$ su $\mathscr{F}_k$. Il massimo k per cui questo avviene è detto *dimensione* di $\mathfrak{p}$.

Teorema 9.6. *Ogni ideale primo ammette un sistema di coordinate regolare.*

Dimostrazione. Si dimostrerà inizialmente, al posto della terza condizione, che $\pi(z_{k+1}), \ldots, \pi(z_n)$ sono algebrici su $\mathscr{F}_k$ e generano $\mathscr{F}$ (il che implica che $[\mathscr{F} : \mathscr{F}_k] < \infty$).

Per induzione su n: se $n = 0$ non ci sono ideali primi non nulli, quindi non c'è niente da dimostrare. Si suppone che le prime due condizioni e la quarta valgano per ideali primi di $\mathscr{O}_{n-1}$ e sia $\mathfrak{p}$ primo in $\mathscr{O}_n$. Se $\mathfrak{p} = 0$, chiaramente $k = n$ e ancora non c'è niente da dimostrare. Si suppone quindi $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathscr{O}_n$ e sia $0 \neq f \in \mathfrak{p}$; con un cambio di coordinate, $f = up$ con u unità e $p = z_n^r + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z_n^i$, $a_i \in \mathscr{O}_{n-1}$, $a_i(0) = 0$ polinomio di Weierstrass, che differendo da f per una unità, appartiene a $\mathfrak{p}$.

L'ideale $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathscr{O}_{n-1}$ è primo e vale l'ipotesi induttiva, quindi a meno di un cambio di coordinate, esiste $k \leq n-1$ tale che $\mathfrak{p}' \cap \mathscr{O}_k = (0)$, $\mathscr{O}_n/\mathfrak{p}'$ è intero su $\mathscr{O}_k$ e $z_{k+1}, \ldots, z_{n-1}$ generano $\mathscr{F}'$ su $\mathscr{F}_k$. In questo caso si sceglie lo stesso k: $\mathfrak{p} \cap \mathscr{O}_k = (\mathfrak{p}' \cap \mathscr{O}_{n-1}) \cap \mathscr{O}_k = (0)$ e la prima condizione è verificata; in $\mathscr{O}_n/\mathfrak{p}$, z_n verifica un polinomio monico a coefficienti in $\mathscr{O}_{n-1}/\mathfrak{p}'$, quindi η_n è intera su $\mathscr{O}_{n-1}/\mathfrak{p}'$ che è intero su $\mathscr{O}_k$, quindi la prima è intera sul terzo. Sia $g \in \mathscr{O}_n$ generico, dividendo si ha $g = pH + \sum_{i=1}^{r-1} b_i z_n^i$ con $b_i \in \mathscr{O}_{n-1}$, allora $\pi(g) = \sum_{i=1}^{r-1} b_i \eta_i$. Si ottiene che g modulo $\mathfrak{p}$ è un polinomio in η_n e η_n è intero

[5]Nel caso algebrico si ha l'invariante del grado di trascendenza del campo delle funzioni sul campo base; questo non è più significativo nel caso analitico in quando anche solo in $\mathbb{C}$ si possono avere con facilità gradi infiniti.

su $\mathscr{O}_k$, perciò $\pi(g)$ è intero su $\mathscr{O}_k$. Per l'ultima proprietà, η_n genera ${}^{\mathscr{O}_n}/_{\mathfrak{p}}$ su ${}^{\mathscr{O}_{n-1}}/_{\mathfrak{p}'}$, il quale è generato su $\mathscr{O}_k$ da $\eta_{k+1}, \dots, \eta_{n-1}$ per ipotesi induttiva; allora $\eta_{k+1}, \dots, \eta_n$ generano $\mathscr{F}$ su $\mathscr{F}_k$. È un'estensione algebrica con un numero finito di generatori, allora $[\mathscr{F} : \mathscr{F}_k] < \infty$.

Rimane da provare la terza condizione: un elemento primitivo di $\mathscr{F}$ su $\mathscr{F}_k$ è della forma $\sum_{i=k+1}^{n} c_i \eta_i$ con $c_i \in \mathbb{C}$. Si possono cambiare le coordinate con $z'_i = z_i$ per ogni $i \leq k$, $z'_{k+1} = \sum_{i=k+1}^{n} c_i z_i$ e si scelgono le ultime tra $z_{k+1}, \dots, z_n$ in modo che siano linearmente indipendenti. □

Sia quindi $z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n$ un sistema di coordinate regolari per $\mathfrak{p}$. Sia $\eta_j = \pi(z_j)$; questo è intero su $\mathscr{O}_k$ e sia $q_j \in \mathscr{O}_k[x]$ il suo polinomio minimo, di grado r_j. Si ha $q_j(z_j) \in \mathscr{O}_k[z_j] \cap \mathfrak{p}$ poiché $\pi(q_j) = q_j(\pi(z_j)) = q_j(\eta_j) = 0$; in particolare per l'elemento primitivo, $q_{k+1}(z_{k+1}) \in \mathscr{O}_k[z_{k+1}] \cap \mathfrak{p}$. Sia $h \in \mathscr{O}_k[x]$, allora $h(\eta_{k+1}) = 0$ se e solo se h è multiplo di q_{k+1} (perché q_{k+1} è il polinomio minimo) se e solo se $h(z_{k+1}) \in \mathfrak{p}$, cioè $\mathscr{O}_k[z_{k+1}] \cap \mathfrak{p}$ è un ideale principale generato da q_{k+1}.

Poiché η_{k+1} è un elemento primitivo, tutti gli elementi di $\mathscr{F}$ sono polinomi in η_{k+1} e in particolare $\eta_j = s_j(\eta_{k+1})$ con $s_j \in \mathscr{F}_k[x]$.

Teorema 9.7. *Sia D il discriminante di q_{k+1}, cioè il risultante di q_{k+1} e q'_{k+1}; $D \in \mathscr{O}_k$ e si ha $s_j = {}^{t_j}/_{D}$ (cioè $Ds_j \in \mathscr{O}_k[x]$).*

Grazie al teorema, $Dz_j - t_j(z_{k+1}) = D(z_j - s_j(z_{k+1})) \in \mathfrak{p}$. Si è dimostrato che $\mathfrak{p} \cap \mathscr{O}_{k+1} = (q_{k+1}(z_{k+1}))$ e che tutte le altre variabili sono funzioni razionali di z_{k+1} con denominatore universale D.

Lemma 9.8. *I polinomi $q_j(z_j)$ sono polinomi di Weierstrass in $\mathscr{O}_k[z_j]$.*

Dimostrazione. Il polinomio q_j è minimo in z_j, perciò è regolare in z_j di ordine r_j. Per il teorema di preparazione, $q_j = uv_j$ con v_j polinomio di Weierstrass di grado r_j e u unità di $\mathscr{O}_n$. Allora in ${}^{\mathscr{O}_n}/_{\mathfrak{p}}$, $0 = q_j(\eta_j) = u(\eta)v_j(\eta_j)$; $u(\eta) \neq 0$ in quanto è un'unità, ma allora $v_j(\eta_j) = 0$, allora $q_j(x) \mid v_j(x)$, ma hanno lo stesso grado e sono monici, perciò deve essere $q_j = v_j$ e q_j è un polinomio di Weierstrass. □

Si hanno quindi i polinomi $q_j(z_j)$ e $Dz_j - t_j(z_j)$ dentro $\mathfrak{p}$; si considera I_1 l'ideale generato da questi polinomi e

$$I_2 = (q_{k+1}(z_{k+1}), Dz_{k+1} - t_{k+1}(z_{k+1}), \dots, Dz_n - t_n(z_n));$$

si ha la relazione $I_2 \subseteq I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, quindi $\mathrm{Z}(I_2) \supseteq \mathrm{Z}(I_1) \supseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{p})$ e si vuole dimostrare
15.11.2006 che $\mathrm{Z}(I_2) \setminus \mathrm{Z}(D) = \mathrm{Z}(I_1) \setminus \mathrm{Z}(D) = \mathrm{Z}(\mathfrak{p}) \setminus \mathrm{Z}(D)$.

Teorema 9.9. *Sia $\mathscr{O}_K \subseteq {}^{\mathscr{O}_n}/_{\mathfrak{p}}$, $\eta \coloneqq \eta_{k+1} = \pi(z_{k+1})$ genera $\mathscr{F}$ su $\mathscr{F}_k$; sia q il polinomio minimo di η (di grado r) e D il suo discriminante. Allora, per ogni $y \in {}^{\mathscr{O}_n}/_{\mathfrak{p}}$, $y = \sum_{i=0}^{r-1} b_i \eta^i$ con $Db_j \in \mathscr{O}_k$.*

Dimostrazione. Si sa che $\mathscr{O}_n$ è integralmente chiuso in $\mathscr{F}_n$ (con la stessa dimostrazione che si fa per ogni UFD), allora basta dimostrare che $Db_j \in \mathscr{F}_k$ è intero su $\mathscr{O}_k$. Ora, η ha tutti i coniugati in F, il campo di spezzamento di q, e il gruppo di Galois è transitivo sulle radici. Sia $\sigma_j \in \mathrm{Gal}\left({}^{\mathscr{F}}/_{\mathscr{F}_k}\right)$ tale che $\sigma_j(\eta) = \vartheta_j$ è il

j-esimo coniugato, con $\sigma_1 = \mathrm{Id}_F$. Si trasforma l'equazione di y tramite questi automorfismi:

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1\eta + \ldots + b_{n-1}\eta^{n-1} \\ \sigma_2(y) &= b_0 + b_1\vartheta_2 + \ldots + b_{n-1}\vartheta_2^{n-1} \\ &\vdots \\ \sigma_r(y) &= b_0 + b_1\vartheta_r + \ldots + b_{n-1}\vartheta_r^{n-1}. \end{aligned}$$

Questo insieme di equazioni si può pensare come un sistema di equazioni con incognite $b_0, \ldots, b_{n-1}$ e termini noti $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r$, ma la matrice del sistema è la matrice di Vandermonde di $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r$, quindi si conosce il suo determinante. Applicando Cramer, $b_j = {}^1\!/\!_\delta \det A_j$ dove δ è il determinante di Vandermonde di $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r$, che risulta $\prod_{i<j}(\vartheta_i - \vartheta_j)$, ma il discriminante è dato da $D = \delta^2$. Allora $Db_j = \delta \det A_j$, dove $\det A_j = h_j(\vartheta_1, \ldots, \hat{\vartheta}_j, \ldots, \vartheta_r, \sigma_1(y), \ldots, \sigma_r(y))$ con h_j un polinomio a coefficienti interi. Inoltre, dal fatto che η è intero su $\mathscr{O}_k$ si deduce che ϑ_i lo è per ogni i, quindi anche y e $\sigma_i(y)$ lo sono. Poiché Db_j è un polinomio di elementi interi a coefficienti interi, è intero su $\mathscr{O}_k$, ma poiché $\mathscr{O}_k$ è integralmente chiuso in $\mathscr{F}_k$, a cui Db_j appartiene, $Db_j \in \mathscr{O}_k$. □

Lemma 9.10. *Siano $Z_i = \mathrm{Z}(I_i)$ e $Z = \mathrm{Z}(\mathfrak{p})$. Allora $Z_1 \setminus \mathrm{Z}(D) = Z_2 \setminus \mathrm{Z}(D)$.*

Dimostrazione. L'inclusione $Z_1 \setminus \mathrm{Z}(D) \supseteq Z_2 \setminus \mathrm{Z}(D)$ è chiara; per l'altra si deve dimostrare che $q_j(z_j)$ si annulla su $Z_2 \setminus \mathrm{Z}(D)$ per $j > k+1$. Si aveva che $0 = q_j(\eta_j) = q_j(D^{-1}t_j(\eta_{k+1}))$ in quanto $D\pi(z_j) = t_j(\pi(z_{k+1}))$. Una potenza di D abbastanza elevata, moltiplicata per $q_j(\eta_j)$, elimina tutti i denominatori e dà come risultato un polinomio $h_j(x) \in \mathscr{O}_k[x]$. In particolare, η_{k+1} è una radice di h_j, quindi $q_{k+1} \mid h_j$ perché q_{k+1} ne è il polinomio minimo, e $h_j = Q_j q_{k+1}$.

Tutti i germi visti sinora sono in numero finito e quindi si estendono a funzioni olomorfe su un polidisco $\Delta(0, r)$. Sia $a = (a_0, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ con $a_0 = (a_1, \ldots, a_k) \in (Z_2 \setminus \mathrm{Z}(D)) \cap \Delta_k$, $\Delta_k := \Delta(0, (r_1, \ldots, r_k))$. Allora $q_{k+1}(a_0, a_{k+1}) = 0$ perché $a \in Z_2$, ma $D(a_0) \neq 0$ perché $a \notin \mathrm{Z}(D)$; inoltre poichè $a \in Z_2$, sono verificate le $D(a_0)a_j = t_j(a_0, a_{k+1})$. Si ha

$$\begin{aligned} 0 = Q_j(a_0, a_{k+1})q_{k+1}(a_0, a_{k+1}) = h_j(a_0, a_{k+1}) = \\ = D(a_0)^{r_j} \frac{t_j(a_0, a_{k+1})}{D(a_0)} = D(a_0)^{r_j} q_j(a_0, a_j), \end{aligned}$$

cioè q_j si annulla su $Z_2 \setminus \mathrm{Z}(D)$. □

Lemma 9.11. *Siano $\alpha = \sum_{j=k+2}^{n}(r_j - 1)$ e $f \in \mathscr{O}_n$; allora esiste $\tilde{R} \in \mathscr{O}_k[z_{k+1}]$ con grado minore di r_{k+1} tale che $D^\alpha f - \tilde{R} \in I_1$.*

Dimostrazione. Si divide f per q_n: $f = A_n q_n + \sum_{i=0}^{r_{n-1}} A_{i,n} z_n^i$ con $A_{i,n} \in \mathscr{O}_k$; si dividono gli $A_{i,n}$ per q_{n-1}: $f = A_n q_n + A_{n-1} q_{n-1} + R_{n-1}$ con $R_{n-1} \in \mathscr{O}_{n-2}[z_{n-1}, z_n]$; proseguendo, si arriva a $f = \sum_{j=k+1}^{n} A_j q_j + R'$ con $R' \in \mathscr{O}_k[z_{k+1}, \ldots, z_n]$ e $D^\alpha R'$ è un polinomio in $z_{k+1}, Dz_{k+2}, \ldots, Dz_n$. Ora, $Dz_j = Dz_j - t_j(z_{k+1}) + t_j(z_{k+1})$ e si ha

$$\begin{aligned} D^\alpha f = \sum_{j=k+1}^{n} A'_j q_j(z_j) + R''(z_{k+1}, Dz_{k+2} - t_{k+2}(z_{k+1}), \ldots, Dz_n - t_n(z_{k+1})) + \\ + R''(z_{k+1}, t_{k+2}(z_{k+1}), \ldots, t_n(z_{k+1})). \end{aligned}$$

Dividendo R'' per q_{k+1} si ottiene $R''' := Qq_{k+1}(z_{k+1}) + \tilde{R}$ con $\deg \tilde{R} < r_{k+1}$; allora

$$D^\alpha f - \tilde{R} = \sum_{j=k+1}^{n} A'_j q_j + R'' + Qq_{k+1}(z_{k+1}) \in I_1. \qquad \square$$

Proposizione 9.12. *$Z \setminus \mathrm{Z}(D) = Z_1 \setminus \mathrm{Z}(D)$.*

Dimostrazione. Ancora, l'inclusione $Z \setminus \mathrm{Z}(D) \subseteq Z_1 \setminus \mathrm{Z}(D)$ è ovvia; per l'altra si deve dimostrare che se $f \in \mathfrak{p}$, $D^\alpha f \in I_1$. Per il lemma precedente, esiste $\tilde{R} \in \mathscr{O}_k[z_{k+1}]$ di grado minore di r_{k+1} tale che $D^\alpha f - \tilde{R} \in I_1$; poiché $f \in \mathfrak{p}$ e $I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, si ha $\tilde{R} \in I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, quindi $\pi(\tilde{R}(z_{k+1})) = \tilde{R}(\eta_{k+1}) = 0$, cioè η_{k+1} è radice di $\tilde{R}$ che quindi deve essere divisibile per q_{k+1}, ma per il grado di $\tilde{R}$ questo significa che $\tilde{R} = 0$ e quindi $D^\alpha f \in I_1$. $\square$

Teorema 9.13 (Nullstellensatz)**.** *Sia $\mathfrak{p} \subseteq \mathscr{O}_n$ ideale primo, allora $\mathrm{I}\,\mathrm{Z}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.*

Dimostrazione. Siano $Z = \mathrm{Z}(\mathfrak{p})$, e $f \in \mathrm{I}(Z)$; allora $D^\alpha f = Q + \tilde{R}(z_{k+1})$ con $Q \in I_1$ e $\tilde{R}$ di grado minore di r_{k+1}. Poiché $I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, sia Q che $\tilde{R}$ appartengono a $\mathrm{I}(Z)$; dai lemmi precedenti, segue che $\tilde{R}$ si annulla su $Z_2 \setminus \mathrm{Z}(D)$. Si possono rappresentare tutti questi germi come funzioni olomorfe sul polidisco $\Delta_k \subseteq \Delta(0,r)$; sia $a_0 \in \Delta_k$ tale che $D(a_0) \neq 0$; scegliendo opportunamente il polidisco, esiste a_{k+1} con $|a_{k+1}| < r_{k+1}$ radice di $q_{k+1}(a_0, x)$ e sia $a_j = {}^{t_j(a_{k+1})}/_{D(a_0)}$. Allora $q_j(a_0, a_j) = 0$ e $(a_0, a_{k+1}, \ldots, a_n) \in (Z_2 \setminus \mathrm{Z}(D)) \cap \Delta(0,r)$ e in particolare la n-upla annulla $\tilde{R}$. Ma questi punti sono r_{k+1} per ogni a_0 e per il grado di $\tilde{R}$, questo deve essere nullo ovunque.

Allora, $D^\alpha f = Q + \tilde{R} = Q \in I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, ma $\mathfrak{p}$ è primo e non contiene D, quindi $D^\alpha f \in \mathfrak{p}$ implica $f \in \mathfrak{p}$. $\square$

Teorema 9.14.

- *$Z \setminus \mathrm{Z}(D)$ è un manifold complesso di dimensione k;*
- *se $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ è la proiezione sulle prime coordinate, $\pi_{|Z\setminus \mathrm{Z}(D)}\colon Z \setminus \mathrm{Z}(D) \to \Delta_k \setminus \mathrm{Z}(D)$ è un rivestimento a r_{k+1} fogli;*
- *$\pi_{|Z}\colon Z \to \Delta_k$ è una mappa olomorfa e propria, e Z è la chiusura di $Z \setminus \mathrm{Z}(D)$;*
- *$Z \setminus \mathrm{Z}(D)$ è connesso e V è irriducibile.*

20.11.2006

Definizione 9.15. Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $\mathscr{O}_n$ con coordinate regolari $z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n$; il policilindro $\Delta(0,r) \subseteq \mathbb{C}^n$ è *ammissibile* per $\mathfrak{p}$ se, posto $\Delta(0,\rho) \subseteq \mathbb{C}^k$ con $\rho_i = r_i$ per $1 \leq i \leq k$, si verifica che:

- tutti i germi q_j e t_j sono ben definite funzioni olomorfe in $\Delta(0,\rho)$;
- D è olomorfo in $\Delta(0,\rho)$;
- se $a \in \Delta(0,\rho)$ e $q_j(a, b_j) = 0$ allora $|b_j| < r_j$ per $j \in \{k+1, \ldots, n\}$.

Lemma 9.16. *Se $z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n$ è un sistema di coordinate regolari per $\mathfrak{p}$, allora per ogni r sufficientemente piccolo, $\Delta(0,r)$ è ammissibile per $\mathfrak{p}$.*

Dimostrazione. I germi considerati sono in numero finito, per cui in un policilindro sufficientemente piccolo sono tutti definiti come funzioni olomorfe; la seconda condizione è verificata grazie a un lemma precedente; la terza deriva dalla regolarità di q_j. $\square$

Lemma 9.17. *Se* $\Delta(0,r)$ *è un policilindro ammissibile per* $\mathfrak{p}$ *allora il germe* $Z \setminus \mathrm{Z}(D)$ *è rappresentato da* $\Delta(0,r)$.

Dimostrazione. Si deve verificare che

$$\Delta(0,r) \cap (Z \setminus \mathrm{Z}(D)) = \left\{ z \in \Delta(0,r) \mid q_{k+1}(z_{k+1}) = 0, z_j = \frac{t_j(z_{k+1})}{D(z_1,\dots,z_k)} \right\},$$

ma questo deriva dal fatto che $Z_1 \setminus \mathrm{Z}(D) = Z \setminus \mathrm{Z}(D) = Z_2 \setminus \mathrm{Z}(D)$. □

Teorema 9.18. *Siano* $\Delta(0,r)$ *ammissibile per* $\mathfrak{p}$, $\pi \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ *la proiezione naturale e* $s = \deg q_{k+1}$*; allora:*

- $Z \setminus \mathrm{Z}(D)$ *è una sottovarietà complessa di* $\Delta(0,r)$ *e* $\pi_{|Z\setminus \mathrm{Z}(D)} \colon Z \setminus \mathrm{Z}(D) \to \Delta(0,\rho) \setminus \mathrm{Z}(D)$ *è un rivestimento a* s *fogli;*
- $\pi \colon \bar{V} \to \Delta(0,\rho)$ *è una mappa propria (la preimmagine di un compatto è compatta);*
- $Z \setminus \mathrm{Z}(D)$ *è connesso e* $\bar{V}$ *è un rappresentante per* $\mathrm{Z}(\mathfrak{p})$.