

Appunti del corso:
Analisi Complessa
Prof. Francesca Acquistapace

Stefano Maggiolo

<http://poisson.phc.unipi.it/~maggiolo/>
maggiolo@mail.dm.unipi.it

2006–2007

Indice

1	Introduzione	3
2	Spazi funzionali	5
3	Teorema della mappa inversa	6
4	Sottovarietà	8
5	Singularità rimovibili	8
6	Forme differenziali	10
7	Germi di funzioni e di insiemi	14
8	Spazi analitici e germi di spazi analitici	18
9	Nullstellensatz per ideali primi	20

1 Introduzione

2.10.2006

Definizione 1.1. Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio (cioè un aperto connesso); $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ si dice olomorfa se per ogni $w \in D$ esistono un policilindro $\Delta(w, r) = \Delta(w_1, r_1) \times \dots \times \Delta(w_n, r_n) \subseteq \mathbb{C}^n$ e una serie convergente in $\Delta(w, r)$ tale che $f(z) = \sum_{|\nu| \geq 0} a_\nu (z - w)^\nu$.

Osservazione 1.2. L'insieme delle funzioni olomorfe nel dominio D si nota $\mathcal{O}(D)$ ed è un anello, integro se D è connesso. L'anello $\mathcal{O}(D)$ è un sottoinsieme delle funzioni continue a valori complesse; inoltre se $f \in \mathcal{O}(D)$, è olomorfa se considerata funzione di una qualsiasi delle variabili. Infine, è possibile calcolare le derivate parziali termine a termine.

Teorema 1.3 (lemma di Osgood). *Sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua e olomorfa in ogni variabile z_1, \dots, z_n , allora $f \in \mathcal{O}(D)$.*

Dimostrazione. Sia $w \in D$, $\bar{\Delta}(w, r) \subseteq D$. Poiché f è olomorfa in ogni z_i , se $z_i \in \Delta(w_i, r_i)$ per ogni i , si ha

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi_1 - w_1| = r_1} \frac{f(\xi_1, z_2, \dots, z_n)}{\xi_1 - z_1} d\xi_1 = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{|\xi_1 - w_1| = r_1} \frac{d\xi_1}{\xi_1 - z_1} \int_{|\xi_2 - w_2| = r_2} \frac{f(\xi_1, \xi_2, z_3, \dots, z_n)}{\xi_2 - z_2} d\xi_2 = \dots = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{|\xi_1 - w_1| = r_1} \frac{d\xi_1}{\xi_1 - z_1} \dots \int_{|\xi_n - w_n| = r_n} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\xi_n - z_n} d\xi_n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\frac{1}{\xi_j - z_j} = \frac{1}{\xi_j - w_j - (z_j - w_j)} = \frac{1}{(\xi_j - w_j) \left(1 - \frac{z_j - w_j}{\xi_j - w_j} \right)} = \sum_{k \geq 0} \frac{(z_j - w_j)^k}{(\xi_j - w_j)^{k+1}}.$$

Le serie sono assolutamente convergenti, quindi si possono estrarre dall'integrale e moltiplicare; in definitiva si ha $f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{|\nu| \geq 0} a_\nu (z - w)^\nu$ con

$$a_\nu = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\substack{|\xi_1 - w_1| = r_1 \\ \dots \\ |\xi_n - w_n| = r_n}} \frac{f(\xi)}{(\xi_1 - w_1)^{\nu_1} \dots (\xi_n - w_n)^{\nu_n}} d\xi. \quad \square$$

Osservazione 1.4. Dalla formula dell'integrale di Cauchy in più variabili si ottiene che se f è olomorfa in un intorno di $\bar{\Delta}(w, r)$ allora la formula di Cauchy vale per il prodotto dei bordi, insieme di dimensione n sui reali; non è necessario conoscere f su tutto il bordo, insieme di dimensione $2n - 1$ sui reali.

Inoltre se $f = \sum_{|\nu| \geq 0} a_\nu (z - w)^\nu$, risulta

$$\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} = \frac{k_1! \dots k_n!}{(2\pi i)^n} \int_{\substack{|\xi_1 - w_1| = r_1 \\ \dots \\ |\xi_n - w_n| = r_n}} \frac{f(\xi)}{(\xi_1 - w_1)^{k_1+1} \dots (\xi_n - w_n)^{k_n+1}} d\xi$$

da cui $a_\nu = \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_n!} \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \dots \partial z_n^{\nu_n}}$.

Teorema 1.5 (Hartogs). *Il lemma di Osgood si può dimostrare anche senza l'ipotesi che f sia continua.*

Definizione 1.6. Pensando a $D \subseteq \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, si definiscono gli operatori $\partial/\partial z_i = 1/2(\partial/\partial x_i - i\partial/\partial y_i)$ e $\partial/\partial \bar{z}_i = 1/2(\partial/\partial x_i + i\partial/\partial y_i)$

Osservazione 1.7. Gli operatori appena definiti non sono derivate, ma $\partial/\partial z_i$ agisce sui polinomi come la normale derivata parziale rispetto a z_i ; inoltre sono derivazioni, cioè sono operatori lineari che soddisfano la regola di Leibniz.

Teorema 1.8 (Cauchy-Riemann). *Una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua è olomorfa se e solo se $\partial f/\partial \bar{z}_j = 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Dimostrazione. Per il lemma di Osgood, f è olomorfa se e solo se è olomorfa rispetto a ogni z_i e per Cauchy-Riemann in una variabile questo accade se e solo se $\partial f/\partial \bar{z}_j = 0$ per ogni j . \square

Proposizione 1.9 (conseguenze di Cauchy-Riemann). *Le unità di $\mathcal{O}(D)$ sono le funzioni prive di zeri e se $f \in \mathcal{O}(D)$ e $\text{Im } f \subseteq \mathbb{R}$ o $|f|$ è costante, allora f è costante.*

Dimostrazione. Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in D$, la funzione $g = 1/f$ è ben definita e $0 = \partial/\partial \bar{z}_j(fg) = \partial/\partial \bar{z}_j(f)g + f\partial/\partial \bar{z}_j(g) = f\partial/\partial \bar{z}_j(g)$ in quanto f è olomorfa, quindi $\partial/\partial \bar{z}_j(g) = 0$ per ogni $z \in D$, cioè g è olomorfa.

Se $f(z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in D$, anche le sue derivate sono reali, ma per Cauchy-Riemann $\partial f/\partial x_j = i\partial f/\partial y_j$, quindi devono annullarsi entrambe e f è costante. Se $|f|$ è costante, $f = \rho e^{i\vartheta(z)}$ con ϑ funzione olomorfa a valori reali, quindi costante. \square

Definizione 1.10. Una mappa olomorfa tra $D \subseteq \mathbb{C}^n$ e $D' \subseteq \mathbb{C}^m$ è una funzione $G: D \rightarrow D'$, $G = (g_1, \dots, g_m)$ con $g_i: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$.

Teorema 1.11. *Siano $f \in \mathcal{O}(D')$ e $G: D \rightarrow D'$, allora $f \circ G \in \mathcal{O}(D)$; in particolare, G induce un morfismo di algebre $\mathcal{O}(D') \rightarrow \mathcal{O}(D)$.*

Dimostrazione. Siano $z_0 \in D$, $w_0 = G(z_0) = (g_1(z_0), \dots, g_m(z_0))$; senza perdere di generalità si può supporre $z_0 = 0$ e $w_0 = 0$. Le funzioni g_i sono olomorfe in 0, quindi si possono scrivere come serie di potenze in z e in particolare G come serie ha termine noto nullo. Per $|z|$ abbastanza piccolo, $g_j(z_1, \dots, z_n) \leq \eta_j$ (se si suppone f convergere in $\Delta(0, \eta)$). Quindi si può sostituire il valore della serie g_j in quella di f . Che l'applicazione che si ottiene sia un morfismo di algebre è banale. \square

Teorema 1.12 (prolungamento analitico). *Siano $f, g \in \mathcal{O}(D)$, $f|_U = g|_U$ con $U \subseteq D$ aperto non vuoto, allora $f = g$.*

Dimostrazione. Sia E la parte interna dell'insieme $\{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$; E è aperto in quanto è una parte interna, è non vuoto perché $U \subseteq E$. Sia $w \in \bar{E} \cap D$, allora $\Delta(w, r)$ interseca E ; sia $w' \in \Delta(w, r/2) \cap E$. Ancora, esiste un policilindro $\Delta(w', \delta)$ che contiene w ed è contenuto in $\Delta(w, r)$. Le funzioni f e g sono olomorfe in D e hanno la stessa serie nel policilindro $\Delta(w', \delta)$, che converge anche in w , cioè $w \in E$. \square

Teorema 1.13 (principio del massimo). *Siano $f \in \mathcal{O}(D)$, $w \in D$ tale che $|f(z)| \leq |f(w)|$ per ogni z in un intorno $U \subseteq D$ di w ; allora f è costante.*

Dimostrazione. Si può assumere che $U = \Delta(w, r)$; per ogni $z \in U$, sia R la retta complessa per z e w . Allora $f|_{R \cap U}$ è una funzione di una variabile complessa con un massimo relativo in w , quindi è costante; si ottiene così che f è costante in U e per il prolungamento analitico lo è in tutto D . \square

Definizione 1.14. Siano $f \in \mathcal{O}(D)$, $z_0 \in D$; si può scrivere $f(z) = \sum_{|\nu| \geq 0} a_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_{i \geq 0} p_i(z)$ con p_i polinomio omogeneo di grado i ; si definisce l'ordine di f in z_0 come k tale che $p_k \neq 0$ e $p_0 = \dots = p_{k-1} = 0$.

Lemma 1.15 (di Schwarz). *Sia f olomorfa in un intorno di $\bar{\Delta}(0, r)$, con $r = (\rho, \dots, \rho)$ e f sia di ordine k in 0 . Se $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \bar{\Delta}(0, r)$ allora $|f(z)| \leq M |z/\rho|^k$ per ogni $z \in \bar{\Delta}(0, r)$.*

Dimostrazione. Poiché f è di ordine k in 0 , si può scrivere $f = \sum_{i \geq k} p_i(z)$; sia $g(t) = t^{-k} f(tz/|z|)$ con $t \in \mathbb{C}$, $|t| \leq \rho$. La funzione g è analitica perché t^{-k} si semplifica e per $|t| = \rho$, $|g(t)| \leq M\rho^{-k}$. Per il principio del massimo, $|g(t)| = M\rho^{-k}$ per ogni t tale che $|t| \leq r$, quindi

$$\left| |z|^{-k} f(z) \right| = |g(z)| \leq M\rho^{-k}. \quad \square$$

2 Spazi funzionali

4.10.2006

Definizione 2.1. Si consideri lo spazio $C(D, \mathbb{C})$ delle funzioni continue a valori complessi nel dominio D ; si definisce su questo spazio una topologia a partire da un sistema fondamentale di intorni di 0 :

$$\{U(K, \varepsilon) \mid K \subseteq D \text{ compatto}, \varepsilon > 0\}$$

con $U(K, \varepsilon) = \{f \mid \sup \{|f(x)| \mid x \in K\} < \varepsilon\}$. Questa topologia si chiama compatto-aperta.

Osservazione 2.2. Con la topologia compatto-aperta, una successione $(f_n)_{n \geq 0}$ converge a f se converge uniformemente a f . Inoltre, $C(D, \mathbb{C})$ diventa uno spazio vettoriale topologico completo (perché il limite uniforme di una successione di funzioni continue è continuo).

Osservazione 2.3. La topologia compatto-aperta è indotta da una metrica: si scriva $D = \bigcup_{s \geq 0} K_s$ con K_{s-1} contenuto nella parte interna di K_s e K_s compatto. Posto $\|f\|_{K_s} = \sup \{|f(x)| \mid x \in K_s\}$, $\|\bullet\|_{K_s}$ è una seminorma (ovvero è una norma per cui non necessariamente vale $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$). Per un teorema, data una famiglia infinita di seminorme, esiste una loro combinazione lineare che dà una norma; ad esempio la distanza

$$d(f, g) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^m} \frac{\|f - g\|_{K_m}}{1 + \|f - g\|_{K_m}}$$

induce la topologia compatto-aperta.

Teorema 2.4. $\mathcal{O}(D)$ è chiuso in $C(D, \mathbb{C})$, quindi è uno spazio metrico completo.

3. Teorema della mappa inversa

Dimostrazione. Data una successione $(f_m)_{m \geq 0}$ in $\mathcal{O}(D)$ che converge a f in $C(D, \mathbb{C})$ con la topologia compatto-aperta, si deve dimostrare $f \in \mathcal{O}(D)$. Siano $w \in D$, $\bar{\Delta}(w, r) \subseteq D$; allora per ogni $m \geq 0$,

$$f_m(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\substack{|\xi_1 - z_1| = r_1 \\ \dots \\ |\xi_n - z_n| = r_n}} \frac{f_m(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_n - z_n)} d\xi.$$

Poiché la convergenza è uniforme, il limite passa sotto il segno dell'integrale, quindi vale la stessa formula con f al posto di f_m ; ma l'integranda è sviluppabile in serie, quindi f è analitica. \square

Teorema 2.5 (Ascoli-Arzelà). *Ogni famiglia di funzioni equilimitate (cioè tale che per ogni K compatto esiste M tale che $|f| \leq M$ per ogni f) ha chiusura compatta.*

3 Teorema della mappa inversa

Definizione 3.1. Una funzione olomorfa f è regolare di ordine s rispetto a z_n nel punto w se come funzione della sola z_n ha uno zero di ordine s in w_n .

Lemma 3.2. *Sia f una funzione di ordine k in 0 , allora esiste un cambio di coordinate lineare che rende f regolare di ordine k rispetto all'ultima variabile.*

Dimostrazione. Si può scrivere $f(z) = \sum_{i \geq k} p_i(z)$ e in particolare esiste un punto a tale che $p_k(a) \neq 0$. Chiaramente esiste una matrice $(n, (n-1))$ B tale che

$$A = \left(B \mid \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right)$$

abbia rango massimo. Con il cambio di coordinate dato da A si ha $z_i = \sum_{j=1}^{n-1} b_{i,j} \xi_j + a_i \xi_n$ e $g(\xi) = f(z(\xi))$. Essendo la trasformazione lineare, anche g ha ordine k in 0 ; inoltre $g(0, \dots, 0, 1) = f(a_1, \dots, a_n)$, quindi $g(0, \dots, 0, \xi_n) = f(a_1, \dots, a_n) \xi_n^k + \dots$. Si è ottenuto che g è regolare di ordine k rispetto a ξ_n e in particolare che i cambi di coordinate che danno questo risultato sono, in un certo senso, molti. \square

Lemma 3.3. *Sia f olomorfa in un disco di \mathbb{C} con uno zero di ordine k in a ; allora esiste un intorno U di a tale che per ogni $b \in U$, $f(z) - f(b)$ ha k radici distinte in U .*

Lemma 3.4. *Sia $f \in \mathcal{O}(\Delta(0, r))$, regolare di ordine k in 0 rispetto a z_n , allora esiste un polcilindro $\Delta(0, \eta) \subseteq \Delta(0, r)$ tale che per ogni $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \Delta(0, (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}))$, $f(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n)$ ha esattamente k zeri nel disco $|z_n| \leq \eta_n$ come funzione di z_n .*

Dimostrazione. Per ipotesi $f(0, \dots, 0, z_n)$ ha uno zero di ordine k in 0 ; poiché gli zeri sono isolati, si può fissare η_n in modo che se z_n è tale che $0 < |z_n| \leq \eta_n$, $f(0, \dots, 0, z_n) \neq 0$. Sia $\varepsilon = \inf \{ |f(0, \dots, 0, z_n)| \mid |z_n| = \eta_n \} > 0$. Ora, f è continua in un intorno del compatto $\{ z \mid z_1 = \dots = z_{n-1} = 0, |z_n| = \eta_n \}$,

quindi esiste un policilindro $\Delta(0, (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}))$ tale che per $z \in \Delta(0, \eta)$, si ha $|f(z) - f(0, \dots, 0, z_n)| < \varepsilon$.

Si prenda ora $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \Delta(0, (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}))$ e si fissino $g(z_n) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n)$, $h(z_n) = f(0, \dots, 0, z_n)$. Allora $|g| \leq |h|$ per $|z_n| = \eta_n$; per il teorema di Rouché, $g + f$ e h hanno lo stesso numero di zeri, e h ne ha k per il lemma precedente, quindi anche $f(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n)$ ne ha k . \square

9.10.2006

Teorema 3.5 (della funzione implicita). *Sia f olomorfa in $\Delta(w, r)$, regolare di ordine 1 in w rispetto a z_n ; allora esistono un policilindro $\Delta(w, \delta) \subsetneq \Delta(w, r)$ e un'unica funzione olomorfa φ , definita sulla proiezione D di $\Delta(w, \delta)$ nelle prime $n - 1$ coordinate, tale che $f(z_1, \dots, z_n) = 0 \Leftrightarrow \varphi(z_1, \dots, z_{n-1}) = z_n$.*

Dimostrazione. L'esistenza è data dal lemma precedente. Per l'ipotesi di regolarità, fissati $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in D$ esiste un'unica radice di $f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$ vista come funzione di z_n ; sia $\varphi(z_1, \dots, z_{n-1})$ questa radice; si deve dimostrare che φ è olomorfa. Grazie a una forma dell'indicatore logaritmico, si ha

$$\varphi(z_1, \dots, z_{n-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - w_n| = \delta_n} \xi \frac{f'(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)} d\xi.$$

Quindi essendo rappresentata tramite un integrale di una funzione olomorfa (perché f non si annulla nell'insieme di integrazione), φ è olomorfa. \square

Teorema 3.6. *Siano f_{k+1}, \dots, f_n olomorfe in $\Delta(w, r) \subseteq \mathbb{C}^n$ tali che $\partial f_j / \partial z_i(w) = \delta_{i,j}$ e $f_j(w) = 0$ per $i, j \in \{k+1, \dots, n\}$. Allora esistono $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n$ olomorfe in $\Delta(w, \delta) \subseteq \mathbb{C}^k$ tali che $f_j(z_1, \dots, z_n) = 0$ se e solo se $z_j = \varphi_j(z_1, \dots, z_k)$ per $j \in \{k+1, \dots, n\}$.*

Dimostrazione. Per induzione su $n - k$: il caso $n - k = 1$ è il teorema precedente; si supponga ora che l'enunciato valga per ogni $k' > k$. Per il teorema della funzione implicita applicato a f_n , esiste un'unica ψ tale che $f(z_1, \dots, z_n) = 0 \Leftrightarrow z_n = \psi(z_1, \dots, z_{n-1})$; sia $\bar{f}_j(z_1, \dots, z_{n-1}) = f_j(z_1, \dots, z_{n-1}, \psi)$. Per le \bar{f}_j vale l'ipotesi induttiva, quindi esistono $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{n-1}$ tali che $\bar{f}_j = 0 \Leftrightarrow z_j = \varphi_j$; risostituendo f_j si ottiene la tesi. \square

Definizione 3.7. Sia $\Delta(w, r) \subseteq \mathbb{C}^m$, $F: \Delta(w, r) \rightarrow \mathbb{C}^m$, $F = (f_1, \dots, f_m)$. La matrice jacobiana di F è $J_F = (\partial f_i / \partial z_j)_{i,j}$. F si dice non singolare in w se $J_F(w)$ ha rango massimo; è non singolare se lo è in ogni punto di $\Delta(w, r)$.

Teorema 3.8 (del rango). *Sia $n \geq m$, $F: \Delta(0, r) \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ non singolare con $F(0) = 0$; allora esiste un cambio lineare di coordinate in \mathbb{C}^m , $w_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} z_j$ ed esistono funzioni olomorfe in un policilindro di centro 0, $\varphi_j(w_1, \dots, w_{n-m})$ tali che $F(w_1, \dots, w_n) = 0 \Leftrightarrow w_j = \varphi_j$.*

Dimostrazione. Poiché $J_F(0)$ ha rango m , esistono due matrici (cambiamenti lineari di coordinate) A e B tali che $B J_F(0) A^{-1} = (0 | I_m)$. Sia $G = B \circ F$; ancora, $G(0) = 0$ e $G = (g_{n-m+1}, \dots, g_n)$, $g_i = \sum_{j=n-m}^n b_{i,j} f_j$. Quindi $J_G(0) = (0 | I_m)$ e si può applicare il teorema precedente. \square

Teorema 3.9 (della mappa inversa). *Sia $F: \Delta(0, r) \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ olomorfa e regolare allora F è localmente invertibile con inversa olomorfa.*

Dimostrazione. Si ponga $H(z, w) = w - F(z)$; è olomorfa in un intorno di $0 \in (\mathbb{C}^n)^2$ e non singolare. Allora è possibile cambiare le coordinate in modo che $J_H(0) = I_{2n}$, quindi esiste una mappa olomorfa $G = (g_1, \dots, g_n)$ tale che $H(w, z) = w - F(z) = 0 \Leftrightarrow z = G(w)$. \square

4 Sottovarietà

11.10.2006

Definizione 4.1. Una *sottovarietà* di \mathbb{C}^n è $M \subseteq \mathbb{C}^n$ tale che per ogni $p \in M$, esiste un intorno U di p e una mappa $F: U \rightarrow \mathbb{C}^m$ ($m \leq n$) regolare in U e con $M \cap U = F^{-1}(0)$.

Teorema 4.2. $M \subseteq \mathbb{C}^n$ è una sottovarietà se e solo se in ogni punto $p \in M$ c'è un sistema di coordinate olomorfe w_1, \dots, w_n centrate in p su un policilindro $\Delta(p, r)$ tali che $M \cap \Delta(p, r) = \{(w_1, \dots, w_n) \mid w_1 = \dots = w_m = 0\}$.

Dimostrazione. \Leftarrow Per ipotesi, esiste $F: \Delta(p, r) \rightarrow \mathbb{C}^m$, $F(q) = (w_1(q), \dots, w_m(q))$.

\Rightarrow Per ipotesi esiste F tale che $M \cap U = F^{-1}(0)$ e $F(p) = 0$; sia $F = (f_1, \dots, f_m)$. Poiché F è regolare in p , i vettori $(\partial f_j / \partial z_1, \dots, \partial f_j / \partial z_n)$ con $j \in \{1, \dots, m\}$ sono linearmente indipendenti e si possono aggiungere $n - m$ righe che definiscono la matrice A in modo che $\begin{pmatrix} J_F \\ A \end{pmatrix}$ sia invertibile. Ponendo $f_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} z_i$ per $m < j \leq n$ e $G = (f_1, \dots, f_n)$, si ottiene che G ha matrice jacobiana invertibile e quindi è un sistema di coordinate, che in più soddisfa la condizione $M \cap U = \{(w_1, \dots, w_n) \mid w_1 = \dots = w_m = 0\}$. \square

Teorema 4.3. $M \subseteq \mathbb{C}^n$ è una sottovarietà se e solo se per ogni $p \in M$ esiste un intorno U di p , un policilindro $\Delta(0, \delta) \subseteq \mathbb{C}^k$ e $F: \Delta(0, \delta) \rightarrow U$ olomorfa non singolare tale che $M \cap U = F(\Delta(0, \delta))$. Inoltre si definisce la dimensione di M come l'intero $\dim M := k$.

Dimostrazione. Innanzitutto, k è indipendente dalla parametrizzazione: se F e G soddisfano le richieste, allora $G^{-1}F$ è localmente un biolomorfismo, quindi le dimensioni degli spazi di partenza e destinazione devono coincidere.

Se M è una sottovarietà e $p \in M$, esiste un policilindro $\Delta(p, r) \subseteq \mathbb{C}^n$ e un sistema di coordinate w_1, \dots, w_n tale che $M \cap \Delta(p, r) = \{(w_1, \dots, w_n) \mid w_1 = \dots = w_m = 0\}$; siano $k = n - m$ e $F: \Delta(0, \delta) \subseteq \mathbb{C}^k \rightarrow \Delta(p, r)$ con $F(z_1, \dots, z_k) = (0, \dots, 0, z_1, \dots, z_k)$. Allora $F(\Delta(0, \delta)) = M \cap \Delta(p, (r_1, \dots, r_m, \delta_1, \dots, \delta_k))$. \square

5 Singolarità rimovibili

Teorema 5.1 (delle singolarità rimovibili di Riemann). *Sia $f: \Delta(0, r) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, allora f si estende a una funzione olomorfa $\hat{f}: \Delta(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ se e solo se f è limitata in un intorno di 0.*

Definizione 5.2. Un insieme X è detto *magro* se la sua parte interna è vuota.

Definizione 5.3. Un sottoinsieme $X \subseteq D$ è *sottile* se per ogni $z \in D$ esiste una funzione olomorfa non nulla in un intorno U di z tale che $X \cap U \subseteq f^{-1}(0)$.

Osservazione 5.4. Essenzialmente, gli insiemi sottili sono (localmente) luoghi di zeri di funzioni olomorfe. In particolare, insiemi sottili sono magri.

Teorema 5.5. *Sia $X \subseteq D$ un insieme sottile, $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, $f \in \mathcal{O}(D \setminus X)$, localmente limitata in ogni punto di X (cioè, per ogni $p \in X$, esiste $\Delta(p, r)$ tale che $f|_{\Delta(p, r) \setminus X}$ è limitata), allora f si estende a $\hat{f} \in \mathcal{O}(D)$.*

Dimostrazione. Si può supporre $D = \Delta(0, r)$, $X = g^{-1}(0)$, $0 \in X$ e che a meno di un cambio di coordinate, g sia regolare di ordine $k \geq 1$ rispetto all'ultima variabile. Per il teorema degli zeri, esiste un polidisco $\Delta(0, \delta) \subseteq D$ tale che se z_1, \dots, z_{n-1} sono fissati in modo che $|z_i| < \delta_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$, e $(z_1, \dots, z_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$, allora $g(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)$ ha k radici in $\{\xi \mid |\xi| \leq \delta_n\}$ ed è non nulla per $|\xi| = \delta_n$. Si può allora definire

$$\hat{f}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} d\xi.$$

Così definita, \hat{f} è olomorfa in z_1, \dots, z_{n-1} ; lo è in z_n in quanto la formula è quella dell'integrale di Cauchy. Inoltre \hat{f} estende f , poiché in un aperto dove f è definita coincidono, quindi devono coincidere ovunque per il teorema del prolungamento analitico. \square

Corollario 5.6. *Sia D un aperto connesso e $X \subseteq D$ sottile, allora $D \setminus X$ è connesso.*

Dimostrazione. Si dimostra che $D \setminus \bar{X}$ è connesso: siano D_1 e D_2 due aperti di D tali che $D \setminus \bar{X} = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$; sia $f: D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione olomorfa definita da $f|_{D_1} \equiv 1$, $f|_{D_2} \equiv 2$. Allora per il teorema, f si estende ad una funzione olomorfa $\hat{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$, che per il prolungamento analitico deve essere costantemente 1 o costantemente 2, perciò $D_1 = \emptyset$ o $D_2 = \emptyset$. \square

Teorema 5.7. *Sia $n \geq 2$, $\Delta(0, r) \subseteq \mathbb{C}^n$, f olomorfa in un intorno connesso U di $\partial\Delta(0, r)$, allora f si estende a $\hat{f} \in \mathcal{O}(\Delta(0, r) \cup U)$.*

Dimostrazione. Siano $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \Delta(0, (r_1, \dots, r_{n-1}))$, allora si ponga

$$\hat{f}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} d\xi;$$

ancora, \hat{f} è olomorfa in tutte le variabili ed è un'estensione di f : se z_1, \dots, z_{n-1} sono fissati opportunamente, $\{z \mid |z_n| \leq r_n\} \subseteq U$ e si ha $f(z_1, \dots, z_n) = \hat{f}(z_1, \dots, z_n)$. \square

Corollario 5.8. *Se $n \geq 2$, le singolarità isolate di una funzione olomorfa sono rimovibili (rispetto al teorema di Riemann, cade la richiesta che la funzione sia limitata in un intorno della singolarità).*

Teorema 5.9. *Sia $D_i = \Delta(0, 1) \subseteq \mathbb{C}$, $D'_i = \Delta(0, 1+\varepsilon_i) \subseteq \mathbb{C}$, $D \supseteq D_1 \times \dots \times D_n$, $D \supseteq \partial D_1 \times \dots \times \partial D_k \times D'_{k+1} \times \dots \times D'_n$, $f \in \mathcal{O}(D)$; allora f si estende a \hat{f} olomorfa in $D_1 \times \dots \times D_k \times D'_{k+1} \times \dots \times D'_n$.*

Dimostrazione. Si definisce

$$\hat{f}(z_1, \dots, z_n) := \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \int_{|\xi_1|=\dots=|\xi_k|=1} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_k, z_{k+1}, \dots, z_n)}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_k - z_k)} d\xi_1 \dots d\xi_k. \quad \square$$

Teorema 5.10. *Siano $\Delta(0, r) \subseteq \mathbb{C}^n$, $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(\Delta(0, r))$, $g_1(0) = g_2(0) = 0$, $V = \{z \in \Delta(0, r) \mid g_1(z) = g_2(z) = 0\}$; allora $f \in \mathcal{O}(\Delta(0, r) \setminus V)$ si estende ad una funzione olomorfa in $\Delta(0, r)$.*

Dimostrazione. Si può supporre che g_1 sia regolare in 0 rispetto alla variabile z_n e che g_2 lo sia rispetto alla variabile z_{n-1} . Allora esiste un policilindro $D = \Delta(0, \delta)$ tale che $\bar{D} \subseteq \Delta(0, r)$ e $g_1(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ per $|z_i| \leq \delta_i$, per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e $|z_n| = \delta_n$. Allo stesso modo, si può trovare un altro policilindro che soddisfi la stessa condizione per g_2 rispetto a z_{n-1} , ed eventualmente prendendone uno più piccolo si può supporre che questi due policilindri coincidano. Allora $V \cap \Delta(0, r) \cap (tciz|z_{n-1}| = \delta_{n-1} \cup \{z \mid |z_n| = \delta_n\}) = \emptyset$ e si può definire

$$\hat{f}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\substack{|\xi_{n-1}|=\delta_n \\ |\xi_n|=\delta_n}} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n)}{(\xi_{n-1} - z_{n-1})(\xi_n - z_n)} d\xi_{n-1} d\xi_n. \quad \square$$

6 Forme differenziali

16.10.2006

Definizione 6.1. Dato D dominio di \mathbb{C}^n , l'algebra esterna generata da $dz_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$ su $C^\infty(D)$, con

$$C^\infty(D) = \{f: D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(D \subseteq \mathbb{R}^{2n})\},$$

cioè il $C^\infty(D)$ -modulo libero quozientato in modo da verificare le relazioni

$$\begin{aligned} dz_i \wedge dz_j &= -dz_j \wedge dz_i \\ d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_j &= -d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_i \\ d\bar{z}_i \wedge dz_j &= -dz_j \wedge d\bar{z}_i, \end{aligned}$$

si denota con $\mathcal{E}^{p,q}(D)$; un suo elemento è della forma

$$\varphi = \sum_{i,j} \varphi_{i,j} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q};$$

con $\mathcal{E}^*(D)$ si intende $\sum_{p,q} \mathcal{E}^{p,q}(D)$ e $\varphi \in \mathcal{E}^{p,q}(D) \subseteq \mathcal{E}^*(D)$ si dice avere *grado* (p, q) e *grado totale* $p + q$.

Definizione 6.2. A $\varphi \in \mathcal{E}^{p,q}$ si possono applicare gli operatori $\partial/\partial z_k$ e $\partial/\partial \bar{z}_k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} &= \sum_{i,j} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k} &= \sum_{i,j} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}. \end{aligned}$$

Si hanno inoltre i seguenti operatori:

$$\begin{aligned} \partial: \mathcal{E}^{p,q} &\longrightarrow \mathcal{E}^{p+1,q} \\ \varphi &\longmapsto \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}, \\ \bar{\partial}: \mathcal{E}^{p,q} &\longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1} \\ \varphi &\longmapsto \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k}, \\ d: \mathcal{E}^{p,q} &\longrightarrow \mathcal{E}^{p+1,q+1} \\ \varphi &\longmapsto \partial \varphi + \bar{\partial} \varphi. \end{aligned}$$

Osservazione 6.3. Si ricavano come regole di calcolo:

$$\begin{aligned} \partial(\varphi \wedge \psi) &= \partial \varphi \wedge \psi + (-1)^{pq} \varphi \wedge \partial \psi \\ dd &= \partial \bar{\partial} = \bar{\partial} \partial = 0 = \partial \bar{\partial} + \bar{\partial} d \end{aligned}$$

Teorema 6.4 (di Cauchy generalizzato). *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso con $\gamma = \partial D$ una curva semplice chiusa rettificabile; siano $U \supseteq \bar{D}$ un aperto e $f \in C^\infty(U)$. Allora per ogni $z \in D$, valgono*

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) &= \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \iint_D \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z}, \\ 2\pi i f(z) &= - \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\bar{\xi} + \iint_D \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Fissato $z \in D$, si sceglie un disco $\Delta = \Delta(z, r)$ con chiusura contenuta in D e si pone $D_r = D \setminus \bar{\Delta}$; D_r è ancora un dominio, di frontiera $\partial D - \partial \bar{\Delta} = \gamma - \gamma_r$. Poiché in D_r la funzione $(\xi - z)^{-1}$ è olomorfa, $\partial/\partial \bar{\xi}(\xi - z)^{-1}$ si annulla e

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{\xi - z} = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi \wedge d\bar{\xi} = d \left(\frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right).$$

Per il teorema di Stokes si ha:

$$\begin{aligned} \iint_{D_r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \frac{d\bar{\xi} \wedge d\xi}{\xi - z} &= \iint_{D_r} d \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi = \int_{\gamma - \gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it} + z)}{re^{it}} ire^{it} dt = \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_0^{2\pi} if(re^{it} + z) dt \xrightarrow{r \rightarrow 0} \\ &\rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2\pi i f(z). \end{aligned}$$

La seconda uguaglianza si ottiene allo stesso modo. □

Lemma 6.5. *Siano D, γ, f come nel teorema precedente, allora esistono $g, h \in C^\infty(D)$ tali che $\partial g(z)/\partial \bar{z} = f(z)$, $\partial h/\partial z = f(z)$; inoltre, se f è differenziabile o olomorfa in altri parametri, anche g e h lo sono.*

Dimostrazione. Si definisce

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi},$$

da cui si deduce l'ultima parte dell'enunciato; fissato z , sia D_r come nell'ultima dimostrazione, allora

$$\begin{aligned} d(\log|\xi - z|^2) &= d(\log(\xi - z)(\bar{\xi} - \bar{z})) = \\ &= d(\log(\xi - z) + \log(\bar{\xi} - \bar{z})) = \frac{d\xi}{\xi - z} + \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{z}}, \end{aligned}$$

in quanto $\log(\xi - z)$ è olomorfa mentre $\log(\bar{\xi} - \bar{z})$ è antiolomorfa, quindi per Stokes

$$\begin{aligned} \iint_{D_r} d(f(\xi) \log|\xi - z|^2 d\bar{\xi}) &= \int_\gamma f(\xi) \log|\xi - z|^2 d\bar{\xi} - \int_{\gamma_r} f(\xi) \log|\xi - z|^2 d\bar{\xi} = \\ &= \iint_{D_r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \log|\xi - z|^2 d\xi \wedge d\bar{\xi} + \iint_{D_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} + \\ &\quad + \cancel{\iint_{D_r} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \log|\xi - z|^2 d\xi \wedge d\bar{\xi}} + \cancel{\int_{D_r} \frac{f(\xi)}{\bar{\xi} - \bar{z}} d\bar{\xi} \wedge d\xi}. \end{aligned}$$

Facendo tendere r a 0, gli integrali in D_r si trasformano in integrali in D , quelli in γ rimangono uguali e rimane da capire a cosa tende quello in γ_r : si pone $\xi = z + re^{it}$, $M = \sup\{|f(\xi)| \mid \xi \in \partial D\} < \infty$, allora

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{\gamma_r} f(\xi) \log|\xi - z|^2 d\bar{\xi} \right| &= \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_0^{2\pi} -f(z + re^{it}) 2r \log(r) i e^{-it} dt \right| \leq \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} M 4\pi r \log(r) = 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza si ha

$$2\pi i g(z) = - \iint_{D_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} + \int_\gamma f(\xi) \log|\xi - z|^2 d\bar{\xi}$$

e la derivata di g rispetto a \bar{z} per il teorema di Cauchy generalizzato dà f . Rimane da dimostrare che anche la derivata di g rispetto a z è differenziabile; per h si procede allo stesso modo. \square

Teorema 6.6 (lemma di Dolbeaut). *Sia $\bar{\Delta}$ un polidisco chiuso, $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}(U)$ con $U \supseteq \bar{\Delta}$ aperto e $q > 0$; allora $\bar{\partial}\omega = 0$ se e solo se esiste $\eta \in \mathcal{E}^{p,q-1}(D)$ tale che $\bar{\partial}\eta = \omega$.*

Dimostrazione. Sia ν il massimo j per cui $d\bar{z}_j$ è coinvolto in ω ; la dimostrazione è per induzione su ν . Se $\nu = 0$, $\omega = 0$ e si può prendere $\eta = 0$. Supponiamo ora l'asserto vero per le (p, q) -forme $\bar{\partial}$ -chiusse che non contengono $d\bar{z}_\nu, \dots, d\bar{z}_n$ e sia $\omega = d\bar{z}_\nu \wedge \alpha + \beta$, dove α e β non contengono $d\bar{z}_\nu, \dots, d\bar{z}_n$. Il coefficiente di ogni termine di α è una funzione $\alpha_{i,j} \in C^\infty(U)$, quindi per il lemma precedente esiste $g_{i,j}$ tale che $\partial g_{i,j}/\partial \bar{z}_\nu = \alpha_{i,j}$; sia γ la forma che si ottiene sostituendo i coefficienti $\alpha_{i,j}$ con i $g_{i,j}$.

Inoltre, si ha $0 = \bar{\partial}\omega = d\bar{z}_\nu \wedge \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}\beta$, quindi se $\alpha_{i,j}$ non fosse olomorfo in z_k , $k \geq \nu$ (equivalentemente, $\partial\alpha_{i,j}/\partial \bar{z}_k \neq 0$), in $\bar{\partial}\omega$ ci sarebbe un termine che non può essere cancellato da $\bar{\partial}\beta$, e viceversa, quindi $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$ sono olomorfi in z_k , $k \geq \nu$.

Si ottiene che $\bar{\partial}\gamma = d\bar{z}_\nu \wedge \alpha + \delta$ e si pone $\varphi := \omega - \bar{\partial}\gamma = \beta - \delta$; in particolare $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\omega - \bar{\partial}\bar{\partial}\gamma = 0$ e φ soddisfa l'ipotesi induttiva, perché né β né δ contengono \bar{z}_ν . Quindi esiste ψ tale che $\bar{\partial}\psi = \varphi$ e $\omega = \bar{\partial}\psi + \bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}(\psi + \varphi)$. \square

Grazie al lemma di Dolbeaut si può costruire la successione

$$\dots \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{p,q+1} \longrightarrow \dots$$

18.10.2006

che soddisfa $\bar{\partial}^2 = 0$; si può quindi parlare di coomologia e si definiscono i gruppi di coomologia di Dolbeaut come $h^{p,q}(U)$, le (p, q) -forme $\bar{\partial}$ -chiusse modulo quelle esatte.

Teorema 6.7 (Dolbeaut). *Sia Δ un polidisco (anche non compatto), allora:*

- $h^{p,0}(\Delta)$ è costituito dalle $(p, 0)$ -forme con coefficienti olomorfi (in particolare $h^{0,0}(D) = \mathcal{O}(D)$);
- $h^{p,q}(\Delta) = 0$ per ogni $q \geq 1$.

Dimostrazione. Se $\varphi \in h^{p,0}(\Delta)$, $\varphi = \sum_i \varphi_i dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ e $0 = \bar{\partial}\varphi = \sum_{j=1}^n \partial/\partial \bar{z}_j (\sum_i \varphi_i dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}) \wedge dz_j$, da cui si deduce che $\partial\varphi_i/\partial \bar{z}_j = 0$ per ogni i e j .

Per il secondo punto, si suppone $\Delta = \bigcup_\nu \Delta_\nu$ con Δ_ν polidisco con lo stesso centro e a chiusura compatta, tale che $\bar{\Delta}_\nu \subseteq \Delta_{\nu+1}$. Si supponga inoltre $q > 1$; per induzione su ν si vuole trovare una φ_ν definita in un intorno di $\bar{\Delta}_\nu$ e tale che $\bar{\partial}\varphi_\nu = \varphi$, $\varphi_{\nu+1}|_{\Delta_\nu} = \varphi_\nu$. Per $\nu = 1$ si tratta del lemma di Dolbeaut; si suppone ora di aver già trovato $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu$ con quelle proprietà, con il lemma di Dolbeaut si ha una ψ tale che $\bar{\partial}\psi = \varphi$ in un intorno di $\Delta_{\nu+1}$; sia $\sigma \in C^\infty$ una funzione tale che $\sigma|_{\Delta_\nu} \equiv 1$ e $\sigma|_{\mathbb{C}^n \setminus \Delta_{\nu+1}} \equiv 0$. Dove sono entrambe definite, $\bar{\partial}(\psi - \varphi_\nu) = \varphi - \varphi = 0$, allora ancora per il lemma ($q > 1$ implica $q - 1 > 0$) esiste ϑ di grado $(p, q - 1)$ tale che $\bar{\partial}\vartheta = \psi - \varphi_\nu$. La funzione $\varphi_{\nu+1} = \psi - \bar{\partial}\vartheta$ soddisfa le richieste e se si prende η con $\eta|_{\Delta_\nu} = \varphi_\nu$, si ha $\bar{\partial}\Delta = \varphi$, quindi $\varphi = 0$ in $h^{p,q}(\Delta)$.

Nel caso $q = 1$, si costruiscono le φ_ν in modo che $\bar{\varphi}_\nu = \varphi$ e $\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu$ sia una forma olomorfa di $\mathcal{E}^{p,0}$ e $|\varphi_{\nu+1}(z) - \varphi_\nu(z)| < 2^{-\nu}$ su Δ_ν . Ancora, φ_1 si costruisce con il lemma di Dolbeaut; per il passo induttivo si trova ψ con $\bar{\partial}(\psi - \varphi_\nu) = 0$, per cui $\psi - \varphi_\nu$ ha coefficienti olomorfi; per soddisfare la condizione di convergenza, si possono sviluppare questi coefficienti in serie di potenze; le somme parziali di queste serie sono polinomi p_i che singolarmente convergono uniformemente, ma essendo in numero finito convergono uniformemente insieme. Allora esistono dei polinomi tali che $|\varphi_{\nu+1}(z) - \varphi_\nu(z) - p_i(z)| < 2^{-\nu}$ su

Δ_ν . Ma $P = \sum_i p_i dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ è una forma $\bar{\partial}$ -chiusa in quanto ha i coefficienti olomorfi e si può fissare $\varphi_{\nu+1} = \psi - P$. Allora $\bar{\partial}\varphi_{\nu+1} = \varphi - 0 = \varphi$ e per costruzione si ha la condizione di convergenza. Ora, per ogni punto di Δ , la successione $(\varphi_\nu(z))_\nu$ è definita da un certo ν in poi e i coefficienti convergono uniformemente, quindi la successione determina una $(p, 0)$ -forma η e $\eta - \varphi_\mu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu - \varphi_\mu$. La differenza ha coefficienti olomorfi quindi il limite ha coefficienti olomorfi per la chiusura delle funzioni olomorfe, quindi $0 = \bar{\partial}\eta - \bar{\partial}\varphi_\mu = \bar{\partial}\Delta - \varphi$. \square

Esempio 6.8. Sia $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$; U è semplicemente connesso, ma $h^{p,1}(U) \neq 0$. Siano $U_i = \{(z_1, z_2) \mid z_i \neq 0\}$, $r^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ e si definiscono

$$\begin{aligned}\omega_{|U_1} &= \bar{\partial} \frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2}, \\ \omega_{|U_2} &= -\bar{\partial} \frac{\bar{z}_1}{z_2 r^2};\end{aligned}$$

sono entrambe forme chiuse su U_1 e U_2 . Ora, $(z_1 z_2)^{-1}$ è olomorfa, quindi

$$0 = \bar{\partial} \frac{1}{z_1 z_2} = \bar{\partial} \frac{\bar{z}_1}{z_2 r^2} + \bar{\partial} \frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2} = \omega_{|U_1} - \omega_{|U_2};$$

questo significa che le due forme ne definiscono una globale. Per assurdo, sia f una primitiva di ω , allora $g = z_1 f - \bar{z}_2/r^2$ è ben definita su U e in U_1 , g/z_1 soddisfa $\bar{\partial}g/z_1 = \bar{\partial}f - \omega = 0$, il che significa che g/z_1 è olomorfa in U_1 , quindi a maggior ragione lo è g . Ma g è localmente limitata in un intorno dell'origine, perciò si estende a \mathbb{C}^2 e $g(0, z_2) = \bar{z}_2/|z_2|^2 = z_2^{-1}$ che non è olomorfa in 0, assurdo.

Problema 6.9 (Cousin). Siano $\Delta \subseteq \mathbb{C}^n$ un policilindro non necessariamente compatto, $\{U_i\}$ un suo ricoprimento aperto; dei dati di Cousin per questo ricoprimento sono delle funzioni $h_{i,j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ per ogni i e j tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tali che $h_{i,j} = -h_{j,i}$ e $h_{i,j} + h_{j,k} + h_{k,i} = 0$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$ (condizione di cociclo). Il problema consiste nel trovare $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tali che $h_{i,j} = f_i - f_j$.

Esempio 6.10. Si suppone di avere delle primitive locali di una 1-forma, φ_i per ogni U_i e sia $h_{i,j} = \varphi_i - \varphi_j$; risolvere il problema di Cousin con questi dati significa riuscire a incollare le primitive (prendendo $\varphi_i - f_i$).

Teorema 6.11 (Cousin). *Assegnati dei salti locali $h_{i,j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ per un ricoprimento di un polidisco Δ , esistono $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tali che $h_{i,j} = f_i - f_j$.*

7 Germi di funzioni e di insiemi

25.11.2006

Definizione 7.1. Un *germe di funzione olomorfa* in $w \in \mathbb{C}^n$ è una classe di equivalenza di funzioni olomorfe in un intorno di w rispetto alla relazione $f \sim g$ se e solo se esiste un intorno W di w contenuto nell'intersezione dei domini di definizione e tale che $f|_W = g|_W$. L'insieme dei germi in w si denota con $\mathcal{O}_{n,w}$.

Osservazione 7.2. Si ha ovviamente $\mathcal{O}_{n,w} \cong \mathcal{O}_{n,0}$, che si indica anche solo con \mathcal{O}_n . Questo è un anello integro: se $fg = 0$, esiste un intorno U di 0 tale che $(fg)|_U = 0$ come funzione; se esiste $z \in U$ tale che $f(z) \neq 0$, per continuità f è non nulla in un aperto contenente z e ivi g è identicamente nulla, quindi $g = 0$ per il teorema d'identità.

Si può allora costruire il campo dei quozienti dell'anello \mathcal{O}_n , il campo dei germi delle funzioni meromorfe in 0, che verrà denotato \mathcal{M}_n . Le unità dell'anello \mathcal{O}_n sono i germi delle funzioni che non si annullano in 0; i germi che si annullano in 0 formano invece un ideale massimale, perciò \mathcal{O}_n è locale.

L'anello \mathcal{O}_n si può vedere come l'anello delle serie analitiche convergenti in n variabili, $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Per lavorare su \mathcal{O}_n si considereranno le inclusioni $\mathcal{O}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \hookrightarrow \mathcal{O}_n$: il primo passaggio è semplice, si tratta soltanto dell'anello dei polinomi in una variabile; il secondo richiede invece il teorema di preparazione di Weierstrass.

Definizione 7.3. Un polinomio $q \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è detto *polinomio di Weierstrass* se $q = z_n^k + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z_n^i$ con $a_i \in \mathfrak{m} \leq \mathcal{O}_{n-1}$, cioè se per ogni i , a_i si annulla in 0.

Teorema 7.4 (di preparazione di Weierstrass). *Sia $f \in \mathcal{O}_n$ regolare di ordine k in 0, allora esiste un unico polinomio di Weierstrass h di grado k tale che $f = uh$ con $u \in \mathcal{O}_n$ unità.*

Dimostrazione. Si può pensare che f sia regolare di ordine k in 0 rispetto a z_n ; allora esiste un policilindro $\Delta(0, \delta)$ dove f è definita e tale che per ogni z_1, \dots, z_{n-1} con $|z_i| < \delta_i$, f come funzione della sola z_n ha k radici in $|z_n| < \delta_n$ e non ne ha in $|z_n| = \delta_n$. Siano $\varphi_i(z_1, \dots, z_{n-1})$ con $i \in \{1, \dots, k\}$ le radici: le φ_i non sono necessariamente continue perché non c'è un modo canonico di ordinare le radici, ma le funzioni simmetriche elementari $\sum \varphi_i, \sum \varphi_i \varphi_j, \dots, \prod \varphi_i$ sono ben definite. Si ha

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i(z_1, \dots, z_{n-1})^r = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} \frac{\partial f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{\partial \xi} \frac{\xi^r}{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)} d\xi;$$

la funzione $f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)$ è non nulla per $|\xi| = \delta_n$, quindi le φ_i^r sono olomorfe. Denotando con a_1, \dots, a_n le funzioni simmetriche elementari, si ha che $h = z_n^k + \sum_{i=1}^n a_i z_n^{n-i}$ è un polinomio di Weierstrass in quanto le a_i sono olomorfe e soddisfano $a_i(0) = 0$, dato che $\varphi_j(0) = 0$. Infine, $f/h \in \mathcal{M}_n$ è in realtà un'unità, poiché le radici di h sono le stesse di quelle di f e con la stessa molteplicità, e h per costruzione è l'unico polinomio di Weierstrass con questa proprietà. \square

Teorema 7.5 (di divisione). *Siano $h \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ un polinomio di Weierstrass di grado k e $f \in \mathcal{O}_n$; allora esistono unici $g \in \mathcal{O}_n$ e $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ con $\deg r < k$ tali che $f = gh + r$. Inoltre, se $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, anche $g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.*

Dimostrazione. Sia $\Delta(0, \delta)$ un policilindro dove f e h sono definite tale che $h(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ per $|z_i| < \delta_i, i \in \{1, \dots, n-1\}$ e $|z_n| = \delta_n$. Siano

$$g(z_1, \dots, z_n) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{h(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)(\xi - z_n)} d\xi$$

e $r := f - gh$, cioè

$$\begin{aligned} r(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} d\xi - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} \frac{h(z_1, \dots, z_n)}{h(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1})}{h(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)} \frac{h(z_1, \dots, z_n) - h(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{\xi - z_n} d\xi; \end{aligned}$$

la variabile z_n viene coinvolta solo nell'ultima frazione e se $h(z_1, \dots, z_n) = z_n^k + \sum_{i=1}^n a_i z_n^{n-i}$, il numeratore risulta $(\xi^k - z_n^k) + \sum_{i=1}^n a_i (\xi^{n-i} - z_n^{n-i})$, che è divisibile per $\xi - z_n$: quindi r è un polinomio in z_n di grado al più $k - 1$. Se inoltre $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, l'ultima conclusione deriva dal teorema di divisione nell'anello dei polinomi.

Per l'unicità, se $f = gh + r = g'h + r'$, allora $r - r' = h(g - g')$; poiché il secondo membro si annulla in generale k volte e il primo al più $k - 1$, segue che $r = r'$ e di conseguenza $g = g'$. \square

Lemma 7.6. *Sia f un polinomio di Weierstrass, allora f è riducibile in \mathcal{O}_n se e solo se è riducibile in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.*

Dimostrazione. \Leftarrow Se f è riducibile in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ allora $f = g_1 g_2$ con g_i non unità; se per assurdo g_1 fosse una unità di \mathcal{O}_n , si potrebbe scrivere $f/g_1 = g_2$ e applicando il teorema di preparazione seguirebbe che $g_1^{-1} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, assurdo.

\Rightarrow Se $f = g_1 g_2$ in \mathcal{O}_n con g_i non unità, allora $g_i = u_i h_i$ e $f = u_1 u_2 h_1 h_2$, ma $h_1 h_2$ è ancora un polinomio di Weierstrass e per l'unicità della preparazione $u_1 u_2 = 1$ e $h_1 h_2 = f$, quindi f è riducibile in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. \square

Proposizione 7.7. *L'anello \mathcal{O}_n è un UFD noetheriano.*

Dimostrazione. Per induzione su n : se $n = 0$, $\mathcal{O}_n \cong \mathbb{C}$ quindi la tesi è verificata; se \mathcal{O}_k è un UFD noetheriano per ogni $k < n$, sia $f \in \mathcal{O}_n$, allora $f = uh$ e h si scrive a meno di unità in modo unico come prodotto di fattori irriducibili, che sono irriducibili anche in \mathcal{O}_n per il lemma, quindi si ha la decomposizione, che è unica perché gli irriducibili di \mathcal{O}_n lo sono anche in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Per la noetherianità, $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è noetheriano per il teorema della base di Hilbert; sia $I \leq \mathcal{O}_n$ un ideale, allora $A \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n] = (h_1, \dots, h_s)$. Sia $g \in A$ regolare in z_n ; per il teorema di preparazione si può assumere che $g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Si dimostrerà che $I = (h_1, \dots, h_s, g)$: se $f \in I$, $f = gt + r$, per cui $r \in I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e $r = \sum_{i=1}^s h_i r_i$, da cui $f = gt + \sum_{i=1}^s h_i r_i$. \square

30.11.2006: TODO
6.11.2006

Definizione 7.8. Dato $K \subseteq \mathbb{C}^n$ chiuso, l'insieme dei germe di funzioni oloforme su K è \mathcal{O}_K ed è l'insieme delle funzioni oloforme su un aperto che contiene K modulo l'uguaglianza su un aperto che contiene K .

Osservazione 7.9. Poiché $\mathcal{O}_K \subseteq C(K, \mathbb{C})$, se K è compatto si può definire la seminorma $\|f\|_K = \sup \{ |f(z)| \mid z \in K \}$; questa, vista in \mathcal{O}_K (non in $C(K, \mathbb{C})$), diventa una norma se K° non è vuoto. Se $F = (f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{O}_K^p$, si definisce $\|F\|_K = \max \|f\|_K$.

Teorema 7.10 (di divisione esteso). *Sia h olomorfa in $U \supseteq \bar{\Delta}(0, r)$, tale che h_0 , il suo germe in 0, sia un polinomio di Weierstrass in z_n di grado k . Si supponga inoltre che per ogni (a_1, \dots, a_{n-1}) con $|a_j| \leq r_j$, tutte le radici di $h(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n)$ siano in $|z_n| < r_n$. Allora, per ogni $f \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0, r)}$, esiste $k > 0$ tale che $f = gh + p$, con $g \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0, r)}$ e $p = \sum p_j(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^j$; inoltre $\|g\|_{\bar{\Delta}(0, r)} \leq k \|f\|_{\bar{\Delta}(0, r)}$ e $\|p_j\|_{\bar{\Delta}(0, r)} \leq k \|f\|_{\bar{\Delta}(0, r)}$.*

Dimostrazione. Poiché $f \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0, r)}$, f è olomorfa in un aperto $U \supseteq \bar{\Delta}(0, r + 2\varepsilon)$ e si può supporre che le ipotesi valgano anche su questo policilindro allargato; si integra relativamente al policilindro $\bar{\Delta}(0, r + \varepsilon)$, per cui risulta, con procedimenti simili a quelli del teorema di divisione,

$$g(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_n+\varepsilon} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)}{h(z_1, \dots, z_{n-1}, \xi)(\xi - z_n)} d\xi,$$

mentre $p = f - gh$ risulta determinato da

$$p_j(z_1, \dots, z_{n-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_n+\varepsilon} \frac{h_j^*(z_1, \dots, z_{n-1}, t) f(z_1, \dots, z_{n-1}, t)}{h(z_1, \dots, z_{n-1}, t)} dt,$$

dove le h_j^* sono funzioni simmetriche dei coefficienti di h .

Si maggiorano i coefficienti di p : il denominatore all'interno dell'integrale non si annulla mai, inoltre l'integrale dipende solo dalla classe di omotopia del cammino, per cui equivale allo stesso integrale calcolato in $|t| = r_n$. Sia ora

$$k_j = \sup \left\{ \left| \frac{h_j^*(z_1, \dots, z_{n-1}, t)}{h(z_1, \dots, z_{n-1}, t)} \right| \mid |z_j| \leq r_j, |t| = r_n \right\},$$

allora $|p_j(z_1, \dots, z_{n-1})| \leq r_n k_j \|f\|_{\bar{\Delta}(0, r)}$.

Per g , si nota che $h(z)$ non si annulla sulla circonferenza, quindi per ogni punto sul bordo del policilindro vale

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z) - p(z)}{h(z)} \right| \leq \frac{1}{m} \left(1 + \sum r_j k_j \right) \|f\|_{\bar{\Delta}(0, r)}.$$

Ponendo k il massimo delle costanti trovate finora, si trova la maggiorazione. \square

Osservazione 7.11. Il teorema non è un'estensione banale del teorema di divisione: scegliendo opportunamente l'ultima dimensione, il teorema vale su "molti" policilindri contenuti in un aperto fissato.

Teorema 7.12. *Sia U un aperto contenente 0 in \mathbb{C}^n e siano $G_1, \dots, G_q \in \mathcal{O}(U)^p$, con i germi di G_1, \dots, G_q in 0 che generano un certo modulo $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$; allora eventualmente cambiando linearmente le coordinate, esiste un policilindro $\bar{\Delta}(0, r)$ contenuto in U tale che per ogni $F \in M_{\bar{\Delta}(0, r)}$, dove*

$$M_{\bar{\Delta}(0, r)} = \left\{ F \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0, r)}^p \mid F_0 \in M \right\}$$

e F_0 è il germe di F in 0, F è generato dalle G_i con coefficienti olomorfi nel policilindro: $F = \sum_{i=1}^q h_i G_i$ con $h_i \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0, r)}$ e $\|h_j\|_{\bar{\Delta}(0, r)} \leq k \|F\|_{\bar{\Delta}(0, r)}$.

Osservazione 7.13. Anche qui, il policilindro è fissato prima della F : non è la banale considerazione che se i germi in 0 sono in numero finito, allora esiste un aperto su cui sono tutte olomorfe.

8 Spazi analitici e germi di spazi analitici

Si sono già definite le sottovarietà $U \subseteq \mathbb{C}^n$: localmente, sono luoghi di zeri di funzione olomorfe (per ogni punto della varietà, esiste un intorno in cui la varietà si descrive come $z_1 = \dots = z_r = 0$). Non è vero il contrario, che il luogo degli zeri di polinomi descriva una varietà; ad esempio, per $X = \{(z_1, z_2) \mid z_1 z_2 = 0\}$, al di fuori dell'origine per il criterio Jacobiano si ha una varietà; nell'origine però non può essere una varietà: se si prende un intorno opportuno U di 0, $X \cap U \setminus \{(0, 0)\}$ dovrebbe apparire come un policilindro in \mathbb{C}^{n-1} meno un punto, quindi sarebbe connesso, ma questo è sconnesso e quindi X non è una varietà.

Se si prende il cono, $X = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_3^2 = z_1 z_2\} \subseteq \mathbb{C}^3$, è una varietà al di fuori di $(0, 0, 0)$ ma nell'origine non lo è: X intersecato un intorno dell'origine dovrebbe apparire come una sfera 4-dimensionale, quindi togliendo l'origine rimane semplicemente connessa; ma la mappa $(u, v) \mapsto (u^2, v^2, uv)$ è un rivestimento doppio e il bordo dell'intorno si mostra essere un $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

Definizione 8.1. Un insieme $X \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$, con U aperto, è uno spazio analitico se per ogni $a \in U$, esiste un intorno V_a di a tale che $X \cap V_a = \{z \in V_a \mid f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$ con $f_j \in \mathcal{O}(V_a)$. In particolare, tutte le varietà algebriche affini (luoghi di zeri di polinomi) sono spazi analitici.

Teorema 8.2. Se $X \subseteq U$ è un insieme analitico, allora è chiuso, magro e non sconnette U .

Dimostrazione. Per dimostrare che è chiuso, sia $x \in U$ e sia $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ con $x_n \in X$, si deve dimostrare che $x \in X$. Per definizione x ha un intorno V tale che $X \cap V = \{z \in V \mid f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$; definitivamente, $x_n \in V$, ma f_j sono in particolare continue e se si annullano in ogni x_n si annullano anche in x , cioè $x \in X$. Gli altri punti erano già stati dimostrati. \square

Teorema 8.3. Siano $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ una famiglia di funzioni olomorfe, $X = Z(\mathcal{F}) := \{x \in U \mid (\forall f \in \mathcal{F}) f(x) = 0\}$. Allora X è uno spazio analitico¹.

Dimostrazione. Sia $z \in U$ e $\mathcal{F}_z = \{f_z \mid f \in \mathcal{F}\}$; si considera l'ideale I generato da \mathcal{F}_z in $\mathcal{O}_{n,z}$, ma questo è un anello noetheriano, quindi $I = (g_1, \dots, g_q)$ con $g_i = \sum_{j=1}^t h_{i,j} f_j$ con $f_j \in \mathcal{F}_z$: si possono scegliere i generatori di I in \mathcal{F}_z (le f_j generano I e sono un numero finito).

Si applica il teorema dei moduli: g_j sono germi di funzioni olomorfe su U e se $f \in \mathcal{O}_{\bar{\Delta}(0,r)}$ e $f_z \in \mathcal{F}_z$, allora $f = \sum_{j=1}^q h_j g_j$ con $h_j \in \mathcal{O}(\bar{\Delta}(0,r))$. Si scrive $X \cap \bar{\Delta}(0,r) = \{z \mid g_1(z) = \dots = g_q(z) = 0\}$: infatti $X \cap \bar{\Delta}(0,r) = Z(\mathcal{F}) \cap \bar{\Delta}(0,r) \supseteq Z(g_1, \dots, g_q) \supseteq Z(\mathcal{F}) \cap \bar{\Delta}(0,r)$: la seconda inclusione è banale, la prima deriva dalla scrittura di f fatta precedentemente. \square

Definizione 8.4. Siano X e Y insiemi qualunque definiti in U e V , con $0 \in U \cap V$; si dice che X e Y sono equivalenti se esiste W con $0 \in W \subseteq U \cap V$ tale che $X \cap W = Y \cap W$. La classe di equivalenza corrispondente si chiama *germe d'insieme* in 0.

Definizione 8.5. Un *germe di spazio analitico* in 0 è un luogo di zeri di un ideale in \mathcal{O}_n . L'insieme dei germi si denota con \mathcal{B}_n .

¹ $\mathcal{O}(U)$ non è un anello noetheriano, quindi questo teorema ha senso

Esercizio 8.6. Il luogo di zeri di un'ideale in \mathcal{O}_n è una classe di equivalenza di insiemi analitici definiti in un intorno di 0.

Teorema 8.7. *Se X e Y sono germi di spazi analitici, allora lo sono anche $X \cap Y$ e $X \cup Y$.*

Dimostrazione. Si ha $X = Z(f_1, \dots, f_q)$ e $Y = Z(g_1, \dots, g_s)$, allora si avrà $X \cap Y = Z(f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_s)$ e $X \cup Y = Z(f_i, g_j)$. \square

Osservazione 8.8. Sia $X \in \mathcal{B}_n$, allora $I(X) := \{f \in \mathcal{O}_n \mid Z(f) \supseteq X\}$ è un ideale di \mathcal{O}_n ; viceversa, se I è un ideale in \mathcal{O}_n , $Z(I) \in \mathcal{B}_n$.

Teorema 8.9. *Dati $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_n$, allora:*

1. $V_1 \supseteq V_2 \Rightarrow I(V_1) \subseteq I(V_2)$;
2. $V_1 \neq V_2 \Rightarrow I(V_1) \neq I(V_2)$;
3. $I_1 \supseteq I_2 \Rightarrow Z(I_1) \subseteq Z(I_2)$;
4. $I(V)$ è radicale;
5. $ZI(V) = V$;
6. $Z(I) = Z(r(I))$;
7. $IZ(I) \supseteq r(I)^2$.

Dimostrazione. 1. Ovvio.

2. Se $V_1 = Z(g_1, \dots, g_q) \neq Z(f_1, \dots, f_s) = V_2$ allora esiste un intorno W di zero in cui tutto è definito ed esiste $z_W \in V_1 \setminus V_2 \cup V_2 \setminus V_1$. Si può quindi trovare una successione (z_n) convergente a 0 e tale che $z_n \in V_2 \setminus V_1$ e $g_n(z_n) \neq 0$, quindi $g_n \notin I(V_2)$.

3. Si procede allo stesso modo del punto precedente.

4. Sia $f \in r(I(V))$, cioè $f^r \in I(V)$, allora $Z(f^r) \supseteq V$, ma $Z(f^r) = Z(f)$, quindi $f \in I(V)$.

5. Ogni $f \in I(V)$ si annulla in tutto V , quindi $V \subseteq ZI(V)$; viceversa, poiché V è un germe, $V = Z(f_1, \dots, f_r)$ con $f_i \in I(V)$, cioè f_i si annulla su $ZI(V)$, il che significa che $ZI(V) \subseteq Z(f_i)$ per ogni i , da cui la tesi.

6. Poiché $I \subseteq r(I)$, sicuramente $Z(I) \supseteq Z(r(I))$, viceversa, se $f \in r(I)$, $f^n \in I$ e quindi f si annulla su $Z(I)$, da cui si ha l'altra inclusione.

7. Se $f \in r(I)$, f si annulla su $Z(r(I))$ quindi $f \in IZ(r(I)) = IZ(I)$. \square

8.11.2006

Definizione 8.10. Sia $V \in \mathcal{B}_n$, V si dice riducibile se esistono $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_n$ tali che $V_i \neq V$ e $V = V_1 \cup V_2$; V è irriducibile se non è riducibile.

Teorema 8.11. *V è irriducibile se e solo se $I(V)$ è primo.*

²In un anello dei polinomi, questa sarebbe un'uguaglianza (teorema degli zeri o Nullstellensatz). Nel caso analitico, si vorrà dimostrare che si ha l'uguaglianza almeno nel caso che I sia primo

Dimostrazione. \Rightarrow Se $I(V)$ non è primo, esistono $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_n$ tali che $f_i \notin V$ ma $f_1 f_2 \in V$; allora si pone $V_i = Z(f_i)$ e $V = (V_1 \cap V) \cup (V_2 \cup V)$.

\Leftarrow Si suppone che V sia riducibile, allora $V = V_1 \cup V_2$ con $V_i \neq V$, allora $I(V) \subseteq I(V_i)$; esiste allora $f_i \in I(V_i) \setminus I(V)$ e $f_1 f_2 \in I(V)$. \square

Corollario 8.12. *Sia $V = Z(f)$, allora V è irriducibile se e solo se $f = p^k$ con $p \in \mathcal{O}_n$ irriducibile³.*

Teorema 8.13. *Sia $V \in \mathcal{B}_n$, allora esiste un'unica decomposizione $V = \bigcup_{i=1}^s V_j$ con V_j irriducibile e tale che per ogni j , $V_j \not\subseteq \bigcup_{i \in \{1, \dots, \hat{j}, \dots, s\}} V_i$.*

Dimostrazione. Si può scrivere $I(V) = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_s$ con \mathfrak{p}_i primo e la decomposizione non è ridondante perché l'anello è a fattorizzazione unica. Allora $V_i = Z(\mathfrak{p}_i)$ dà una decomposizione che soddisfa le richieste. Per l'unicità, se $V = \bigcup_i V_i = \bigcup_j W_j$, allora per ogni j , $W_j \subseteq \bigcup_i V_i$, allora per l'irriducibilità di W_j , deve esistere σ tale che $W_j \subseteq V_{\sigma(j)}$; viceversa, $V_i \subseteq W_{\tau\sigma(j)}$ e così via. Si conclude che le due decomposizioni sono uguali. \square

9 Nullstellensatz per ideali primi

Lemma 9.1. *Siano $f, g \in \mathcal{O}_n$ primi fra loro (grazie alla fattorizzazione unica questo significa soltanto che le loro decomposizioni non hanno fattori comuni); allora esiste un sistema di coordinate⁴ z_1, \dots, z_n ed esistono $\lambda, \mu \in \mathcal{O}_n$ tali che $0 \neq \lambda f + \mu g \in \mathcal{O}_{n-1}$.*

Dimostrazione. Esiste un sistema di coordinate in cui $f = uP$ e $g = vQ$ con u, v unità e P, Q polinomi di Weierstrass coprimi (l'irriducibilità in \mathcal{O}_n è la stessa che in \mathcal{O}_{n-1}). Sia \mathcal{F} il campo dei quozienti di \mathcal{O}_{n-1} , allora esistono $h, k \in \mathcal{F}[z_n]$ tali che $hP + kQ = 1$ per il teorema di Bézout. Liberando dai denominatori si ottiene la relazione $\lambda'P + \mu'Q = a \in \mathcal{O}_{n-1}$; ponendo $\lambda = \lambda'u^{-1}$ e $\mu = \mu'v^{-1}$ si ha la relazione $\lambda f + \mu g = a \neq 0$. \square

Teorema 9.2 (Nullstellensatz per ideali principali). *Sia $g \in \mathcal{O}_n$ irriducibile (in particolare, (g) è un ideale primo di \mathcal{O}_n); allora $I Z(g) = (g)$ in \mathcal{O}_n .*

Dimostrazione. Si può supporre che g non sia la funzione nulla né un'unità; cambiando opportunamente le coordinate, si può scrivere $g = uP$ con P polinomio di Weierstrass irriducibile di grado k . Ovviamente si può supporre che $g = P$ senza perdita di generalità. Sia $f \in I Z(g)$; si sa esistere un sistema di coordinate in cui sia f che g sono entrambi polinomi. Se f non è un multiplo di g , f e g sono coprimi in quanto g è irriducibile, allora dal lemma si ha $0 \neq \lambda f + \mu g = p \in \mathcal{O}_{n-1}$. Questa è una relazione tra funzioni (non solo tra germi) in un opportuno $\Delta(0, r)$, scelto in modo che per ogni (a_1, \dots, a_{n-1}) con $a_j < r_j$, il polinomio $g(a_1, \dots, a_{n-1}, z_n)$ abbia almeno una radice in $|z_n| < r_n$. Preso $z_0 \in \Delta(0, (r_1, \dots, r_{n-1}))$ esiste z_n tale che $(z_0, z_n) \in \Delta(0, r)$ e $g(z_0, z_n) = 0$. Ne consegue che $f(z_0, z_n) = 0$ e $p(z_0) = 0$, in quanto p non dipende da z_n . Allora per l'arbitrarietà di z_0 , p è identicamente nulla, che contraddice l'ipotesi usata per il lemma, cioè f e g non sono coprimi o equivalentemente $f \in (g)$. \square

³Non è detto che f generi $I(V)$.

⁴Ciò significa sempre un cambiamento lineare di coordinate, che induce un automorfismo dell'algebra \mathcal{O}_n .

Corollario 9.3. Sia $f \in \mathcal{O}_n$, $f = \prod_{i=1}^s p_i^{n_i}$ la sua decomposizione nell'UFD \mathcal{O}_n ; allora $Z(f) = Z(p_1) \cup \dots \cup Z(p_s)$ è la decomposizione di $Z(f)$ in componenti irriducibili.

Dimostrazione. I fattori di f sono irriducibili, quindi (p_i) è primo e $Z(p_i)$ è irriducibile; l'uguaglianza insiemistica è banale in quanto \mathcal{O}_n è un anello integro. Se la decomposizione fosse ridondante, si avrebbe $Z(p_i) \subseteq Z(p_j)$, allora $\text{IZ}(p_i) \supseteq \text{IZ}(p_j)$ e $(p_i) \supseteq (p_j)$, ma questo non è possibile perché si avrebbe $p_i \mid p_j$. \square

Osservazione 9.4. Sia $I \subseteq \mathcal{O}_n$ un ideale; \mathcal{O}_n è un anello noetheriano quindi esiste la decomposizione primaria $I = \bigcap_{i=1}^s Q_i$ con Q_i primari. Ma $\text{IZ}(I) \supseteq \text{r}(I) \supseteq I$ quindi si può partire da un ideale radicale, che nella decomposizione primaria ha solo ideali primi: $\text{r}(I) = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s$ in modo non ridondante (questi ideali primi sono quelli associati agli ideali primari Q_i). Allora $\text{IZ}(\text{r}(I)) = \text{I}(Z(\mathfrak{p}_1) \cup \dots \cup Z(\mathfrak{p}_s)) = \text{IZ}(\mathfrak{p}_1) \cap \dots \cap \text{IZ}(\mathfrak{p}_s)$. Quindi si osserva che per dimostrare il Nullstellensatz è sufficiente dimostrarlo per gli ideali primi.

13.11.2006

Sia quindi \mathfrak{p} primo in \mathcal{O}_n ; se è l'ideale nullo, $Z(\mathfrak{p}) = \mathbb{C}^n$ e chiaramente $\text{I}(\mathbb{C}^n) = (0)$. Ci si restringe quindi al caso $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq (1)$; $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ è un dominio, quindi si può costruire il suo campo dei quozienti. Si vuole dimostrare che \mathcal{F} , il campo dei quozienti di $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$, è un'estensione algebrica finita di \mathcal{F}_k , il campo dei quozienti di \mathcal{O}_k , per un preciso k , che rappresenterà la dimensione⁵ di $Z(\mathfrak{p})$ e che $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ è intero su \mathcal{O}_k .

Definizione 9.5. Un sistema di coordinate z_1, \dots, z_n è *regolare* per \mathfrak{p} se esiste $k \leq n$ tale che $\mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_k = \{0\}$ (quindi si può pensare a $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ come a un \mathcal{O}_k -modulo), $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ è intero su \mathcal{O}_k e $\eta_{k+1} = \pi(z_{k+1})$ è un elemento primitivo di \mathcal{F} su \mathcal{F}_k . Il massimo k per cui questo avviene è detto *dimensione* di \mathfrak{p} .

Teorema 9.6. Ogni ideale primo ammette un sistema di coordinate regolare.

Dimostrazione. Si dimostrerà inizialmente, al posto della terza condizione, che $\pi(z_{k+1}), \dots, \pi(z_n)$ sono algebrici su \mathcal{F}_k e generano \mathcal{F} (il che implica che $[\mathcal{F} : \mathcal{F}_k] < \infty$).

Per induzione su n : se $n = 0$ non ci sono ideali primi non nulli, quindi non c'è niente da dimostrare. Si suppone che le prime due condizioni e la quarta valgano per ideali primi di \mathcal{O}_{n-1} e sia \mathfrak{p} primo in \mathcal{O}_n . Se $\mathfrak{p} = 0$, chiaramente $k = n$ e ancora non c'è niente da dimostrare. Si suppone quindi $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathcal{O}_n$ e sia $0 \neq f \in \mathfrak{p}$; con un cambio di coordinate, $f = up$ con u unità e $p = z_n^r + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z_n^i$, $a_i \in \mathcal{O}_{n-1}$, $a_i(0) = 0$ polinomio di Weierstrass, che differendo da f per una unità, appartiene a \mathfrak{p} .

L'ideale $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_{n-1}$ è primo e vale l'ipotesi induttiva, quindi a meno di un cambio di coordinate, esiste $k \leq n - 1$ tale che $\mathfrak{p}' \cap \mathcal{O}_k = (0)$, $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}'$ è intero su \mathcal{O}_k e z_{k+1}, \dots, z_{n-1} generano \mathcal{F}' su \mathcal{F}_k . In questo caso si sceglie lo stesso k : $\mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_k = (\mathfrak{p}' \cap \mathcal{O}_{n-1}) \cap \mathcal{O}_k = (0)$ e la prima condizione è verificata; in $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$, z_n verifica un polinomio monico a coefficienti in $\mathcal{O}_{n-1}/\mathfrak{p}'$, quindi η_n è intera su $\mathcal{O}_{n-1}/\mathfrak{p}'$ che è intero su \mathcal{O}_k , quindi la prima è intera sul terzo. Sia $g \in \mathcal{O}_n$ generico, dividendo si ha $g = pH + \sum_{i=1}^{r-1} b_i z_n^i$ con $b_i \in \mathcal{O}_{n-1}$, allora $\pi(g) = \sum_{i=1}^{r-1} b_i \eta_i$. Si ottiene che g modulo \mathfrak{p} è un polinomio in η_n e η_n è intero

⁵Nel caso algebrico si ha l'invariante del grado di trascendenza del campo delle funzioni sul campo base; questo non è più significativo nel caso analitico in quando anche solo in \mathbb{C} si possono avere con facilità gradi infiniti.

su \mathcal{O}_k , perciò $\pi(g)$ è intero su \mathcal{O}_k . Per l'ultima proprietà, η_n genera $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ su $\mathcal{O}_{n-1}/\mathfrak{p}'$, il quale è generato su \mathcal{O}_k da $\eta_{k+1}, \dots, \eta_{n-1}$ per ipotesi induttiva; allora $\eta_{k+1}, \dots, \eta_n$ generano \mathcal{F} su \mathcal{F}_k . È un'estensione algebrica con un numero finito di generatori, allora $[\mathcal{F} : \mathcal{F}_k] < \infty$.

Rimane da provare la terza condizione: un elemento primitivo di \mathcal{F} su \mathcal{F}_k è della forma $\sum_{i=k+1}^n c_i \eta_i$ con $c_i \in \mathbb{C}$. Si possono cambiare le coordinate con $z'_i = z_i$ per ogni $i \leq k$, $z'_{k+1} = \sum_{i=k+1}^n c_i z_i$ e si scelgono le ultime tra z_{k+1}, \dots, z_n in modo che siano linearmente indipendenti. \square

Sia quindi $z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n$ un sistema di coordinate regolari per \mathfrak{p} . Sia $\eta_j = \pi(z_j)$; questo è intero su \mathcal{O}_k e sia $q_j \in \mathcal{O}_k[x]$ il suo polinomio minimo, di grado r_j . Si ha $q_j(z_j) \in \mathcal{O}_k[z_j] \cap \mathfrak{p}$ poiché $\pi(q_j) = q_j(\pi(z_j)) = q_j(\eta_j) = 0$; in particolare per l'elemento primitivo, $q_{k+1}(z_{k+1}) \in \mathcal{O}_k[z_{k+1}] \cap \mathfrak{p}$. Sia $h \in \mathcal{O}_k[x]$, allora $h(\eta_{k+1}) = 0$ se e solo se h è multiplo di q_{k+1} (perché q_{k+1} è il polinomio minimo) se e solo se $h(z_{k+1}) \in \mathfrak{p}$, cioè $\mathcal{O}_k[z_{k+1}] \cap \mathfrak{p}$ è un ideale principale generato da q_{k+1} .

Poiché η_{k+1} è un elemento primitivo, tutti gli elementi di \mathcal{F} sono polinomi in η_{k+1} e in particolare $\eta_j = s_j(\eta_{k+1})$ con $s_j \in \mathcal{F}_k[x]$.

Teorema 9.7. *Sia D il discriminante di q_{k+1} , cioè il risultante di q_{k+1} e q'_{k+1} ; $D \in \mathcal{O}_k$ e si ha $s_j = t_j/D$ (cioè $Ds_j \in \mathcal{O}_k[x]$).*

Grazie al teorema, $Dz_j - t_j(z_{k+1}) = D(z_j - s_j(z_{k+1})) \in \mathfrak{p}$. Si è dimostrato che $\mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_{k+1} = (q_{k+1}(z_{k+1}))$ e che tutte le altre variabili sono funzioni razionali di z_{k+1} con denominatore universale D .

Lemma 9.8. *I polinomi $q_j(z_j)$ sono polinomi di Weierstrass in $\mathcal{O}_k[z_j]$.*

Dimostrazione. Il polinomio q_j è minimo in z_j , perciò è regolare in z_j di ordine r_j . Per il teorema di preparazione, $q_j = uv_j$ con v_j polinomio di Weierstrass di grado r_j e u unità di \mathcal{O}_n . Allora in $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$, $0 = q_j(\eta_j) = u(\eta)v_j(\eta_j)$; $u(\eta) \neq 0$ in quanto è un'unità, ma allora $v_j(\eta_j) = 0$, allora $q_j(x) \mid v_j(x)$, ma hanno lo stesso grado e sono monici, perciò deve essere $q_j = v_j$ e q_j è un polinomio di Weierstrass. \square

Si hanno quindi i polinomi $q_j(z_j)$ e $Dz_j - t_j(z_j)$ dentro \mathfrak{p} ; si considera I_1 l'ideale generato da questi polinomi e

$$I_2 = (q_{k+1}(z_{k+1}), Dz_{k+1} - t_{k+1}(z_{k+1}), \dots, Dz_n - t_n(z_n));$$

si ha la relazione $I_2 \subseteq I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, quindi $Z(I_2) \supseteq Z(I_1) \supseteq Z(\mathfrak{p})$ e si vuole dimostrare che $Z(I_2) \setminus Z(D) = Z(I_1) \setminus Z(D) = Z(\mathfrak{p}) \setminus Z(D)$.

15.11.2006

Teorema 9.9. *Sia $\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$, $\eta := \eta_{k+1} = \pi(z_{k+1})$ genera \mathcal{F} su \mathcal{F}_k ; sia q il polinomio minimo di η (di grado r) e D il suo discriminante. Allora, per ogni $y \in \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$, $y = \sum_{i=0}^{r-1} b_i \eta^i$ con $Db_j \in \mathcal{O}_k$.*

Dimostrazione. Si sa che \mathcal{O}_n è integralmente chiuso in \mathcal{F}_n (con la stessa dimostrazione che si fa per ogni UFD), allora basta dimostrare che $Db_j \in \mathcal{F}_k$ è intero su \mathcal{O}_k . Ora, η ha tutti i coniugati in F , il campo di spezzamento di q , e il gruppo di Galois è transitivo sulle radici. Sia $\sigma_j \in \text{Gal}(\mathcal{F}/\mathcal{F}_k)$ tale che $\sigma_j(\eta) = \vartheta_j$ è il

j -esimo coniugato, con $\sigma_1 = \text{Id}_F$. Si trasforma l'equazione di y tramite questi automorfismi:

$$\begin{aligned} y &= b_0 + b_1\eta + \dots + b_{n-1}\eta^{n-1} \\ \sigma_2(y) &= b_0 + b_1\vartheta_2 + \dots + b_{n-1}\vartheta_2^{n-1} \\ &\vdots \\ \sigma_r(y) &= b_0 + b_1\vartheta_r + \dots + b_{n-1}\vartheta_r^{n-1}. \end{aligned}$$

Questo insieme di equazioni si può pensare come un sistema di equazioni con incognite b_0, \dots, b_{n-1} e termini noti $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$, ma la matrice del sistema è la matrice di Vandermonde di $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$, quindi si conosce il suo determinante. Applicando Cramer, $b_j = 1/\delta \det A_j$ dove δ è il determinante di Vandermonde di $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$, che risulta $\prod_{i < j} (\vartheta_i - \vartheta_j)$, ma il discriminante è dato da $D = \delta^2$. Allora $Db_j = \delta \det A_j$, dove $\det A_j = h_j(\vartheta_1, \dots, \vartheta_j, \dots, \vartheta_r, \sigma_1(y), \dots, \sigma_r(y))$ con h_j un polinomio a coefficienti interi. Inoltre, dal fatto che η è intero su \mathcal{O}_k si deduce che ϑ_i lo è per ogni i , quindi anche y e $\sigma_i(y)$ lo sono. Poiché Db_j è un polinomio di elementi interi a coefficienti interi, è intero su \mathcal{O}_k , ma poiché \mathcal{O}_k è integralmente chiuso in \mathcal{F}_k , a cui Db_j appartiene, $Db_j \in \mathcal{O}_k$. \square

Lemma 9.10. *Siano $Z_i = Z(I_i)$ e $Z = Z(\mathfrak{p})$. Allora $Z_1 \setminus Z(D) = Z_2 \setminus Z(D)$.*

Dimostrazione. L'inclusione $Z_1 \setminus Z(D) \supseteq Z_2 \setminus Z(D)$ è chiara; per l'altra si deve dimostrare che $q_j(z_j)$ si annulla su $Z_2 \setminus Z(D)$ per $j > k + 1$. Si aveva che $0 = q_j(\eta_j) = q_j(D^{-1}t_j(\eta_{k+1}))$ in quanto $D\pi(z_j) = t_j(\pi(z_{k+1}))$. Una potenza di D abbastanza elevata, moltiplicata per $q_j(\eta_j)$, elimina tutti i denominatori e dà come risultato un polinomio $h_j(x) \in \mathcal{O}_k[x]$. In particolare, η_{k+1} è una radice di h_j , quindi $q_{k+1} \mid h_j$ perché q_{k+1} ne è il polinomio minimo, e $h_j = Q_j q_{k+1}$.

Tutti i germi visti sinora sono in numero finito e quindi si estendono a funzioni olomorfe su un polidisco $\Delta(0, r)$. Sia $a = (a_0, a_{k+1}, \dots, a_n)$ con $a_0 = (a_1, \dots, a_k) \in (Z_2 \setminus Z(D)) \cap \Delta_k$, $\Delta_k := \Delta(0, (r_1, \dots, r_k))$. Allora $q_{k+1}(a_0, a_{k+1}) = 0$ perché $a \in Z_2$, ma $D(a_0) \neq 0$ perché $a \notin Z(D)$; inoltre poiché $a \in Z_2$, sono verificate le $D(a_0)a_j = t_j(a_0, a_{k+1})$. Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= Q_j(a_0, a_{k+1})q_{k+1}(a_0, a_{k+1}) = h_j(a_0, a_{k+1}) = \\ &= D(a_0)^{r_j} \frac{t_j(a_0, a_{k+1})}{D(a_0)} = D(a_0)^{r_j} q_j(a_0, a_j), \end{aligned}$$

cioè q_j si annulla su $Z_2 \setminus Z(D)$. \square

Lemma 9.11. *Siano $\alpha = \sum_{j=k+2}^n (r_j - 1)$ e $f \in \mathcal{O}_n$; allora esiste $\tilde{R} \in \mathcal{O}_k[z_{k+1}]$ con grado minore di r_{k+1} tale che $D^\alpha f - \tilde{R} \in I_1$.*

Dimostrazione. Si divide f per q_n : $f = A_n q_n + \sum_{i=0}^{r_n-1} A_{i,n} z_n^i$ con $A_{i,n} \in \mathcal{O}_k$; si dividono gli $A_{i,n}$ per q_{n-1} : $f = A_n q_n + A_{n-1} q_{n-1} + R_{n-1}$ con $R_{n-1} \in \mathcal{O}_{n-2}[z_{n-1}, z_n]$; proseguendo, si arriva a $f = \sum_{j=k+1}^n A_j q_j + R'$ con $R' \in \mathcal{O}_k[z_{k+1}, \dots, z_n]$ e $D^\alpha R'$ è un polinomio in $z_{k+1}, Dz_{k+2}, \dots, Dz_n$. Ora, $Dz_j = Dz_j - t_j(z_{k+1}) + t_j(z_{k+1})$ e si ha

$$\begin{aligned} D^\alpha f &= \sum_{j=k+1}^n A'_j q_j(z_j) + R''(z_{k+1}, Dz_{k+2} - t_{k+2}(z_{k+1}), \dots, Dz_n - t_n(z_{k+1})) + \\ &\quad + R''(z_{k+1}, t_{k+2}(z_{k+1}), \dots, t_n(z_{k+1})). \end{aligned}$$

Dividendo R'' per q_{k+1} si ottiene $R''' := Qq_{k+1}(z_{k+1}) + \tilde{R}$ con $\deg \tilde{R} < r_{k+1}$; allora

$$D^\alpha f - \tilde{R} = \sum_{j=k+1}^n A'_j q_j + R''' + Qq_{k+1}(z_{k+1}) \in I_1. \quad \square$$

Proposizione 9.12. $Z \setminus Z(D) = Z_1 \setminus Z(D)$.

Dimostrazione. Ancora, l'inclusione $Z \setminus Z(D) \subseteq Z_1 \setminus Z(D)$ è ovvia; per l'altra si deve dimostrare che se $f \in \mathfrak{p}$, $D^\alpha f \in I_1$. Per il lemma precedente, esiste $\tilde{R} \in \mathcal{O}_k[z_{k+1}]$ di grado minore di r_{k+1} tale che $D^\alpha f - \tilde{R} \in I_1$; poiché $f \in \mathfrak{p}$ e $I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, si ha $\tilde{R} \in I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, quindi $\pi(\tilde{R}(z_{k+1})) = \tilde{R}(\eta_{k+1}) = 0$, cioè η_{k+1} è radice di \tilde{R} che quindi deve essere divisibile per q_{k+1} , ma per il grado di \tilde{R} questo significa che $\tilde{R} = 0$ e quindi $D^\alpha f \in I_1$. \square

Teorema 9.13 (Nullstellensatz). *Sia $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_n$ ideale primo, allora $I_Z(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.*

Dimostrazione. Siano $Z = Z(\mathfrak{p})$, e $f \in I(Z)$; allora $D^\alpha f = Q + \tilde{R}(z_{k+1})$ con $Q \in I_1$ e \tilde{R} di grado minore di r_{k+1} . Poiché $I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, sia Q che \tilde{R} appartengono a $I(Z)$; dai lemmi precedenti, segue che \tilde{R} si annulla su $Z_2 \setminus Z(D)$. Si possono rappresentare tutti questi germi come funzioni olomorfe sul polidisco $\Delta_k \subseteq \Delta(0, r)$; sia $a_0 \in \Delta_k$ tale che $D(a_0) \neq 0$; scegliendo opportunamente il polidisco, esiste a_{k+1} con $|a_{k+1}| < r_{k+1}$ radice di $q_{k+1}(a_0, x)$ e sia $a_j = t_j^{(a_{k+1})/D(a_0)}$. Allora $q_j(a_0, a_j) = 0$ e $(a_0, a_{k+1}, \dots, a_n) \in (Z_2 \setminus Z(D)) \cap \Delta(0, r)$ e in particolare la n -upla annulla \tilde{R} . Ma questi punti sono r_{k+1} per ogni a_0 e per il grado di \tilde{R} , questo deve essere nullo ovunque.

Allora, $D^\alpha f = Q + \tilde{R} = Q \in I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, ma \mathfrak{p} è primo e non contiene D , quindi $D^\alpha f \in \mathfrak{p}$ implica $f \in \mathfrak{p}$. \square

Teorema 9.14. • $Z \setminus Z(D)$ è un manifold complesso di dimensione k ;

- se $\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ è la proiezione sulle prime coordinate, $\pi|_{Z \setminus Z(D)}: Z \setminus Z(D) \rightarrow \Delta_k \setminus Z(D)$ è un rivestimento a r_{k+1} fogli;
- $\pi|_Z: Z \rightarrow \Delta_k$ è una mappa olomorfa e propria, e Z è la chiusura di $Z \setminus Z(D)$;
- $Z \setminus Z(D)$ è connesso e V è irriducibile.

20.11.2006

Definizione 9.15. Sia \mathfrak{p} un ideale primo di \mathcal{O}_n con coordinate regolari $z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n$; il polidisco $\Delta(0, r) \subseteq \mathbb{C}^n$ è ammissibile per \mathfrak{p} se, posto $\Delta(0, \rho) \subseteq \mathbb{C}^k$ con $\rho_i = r_i$ per $1 \leq i \leq k$, si verifica che:

- tutti i germi q_j e t_j sono ben definite funzioni olomorfe in $\Delta(0, \rho)$;
- D è olomorfo in $\Delta(0, \rho)$;
- se $a \in \Delta(0, \rho)$ e $q_j(a, b_j) = 0$ allora $|b_j| < r_j$ per $j \in \{k+1, \dots, n\}$.

Lemma 9.16. *Se $z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n$ è un sistema di coordinate regolari per \mathfrak{p} , allora per ogni r sufficientemente piccolo, $\Delta(0, r)$ è ammissibile per \mathfrak{p} .*

Dimostrazione. I germi considerati sono in numero finito, per cui in un polidisco sufficientemente piccolo sono tutti definiti come funzioni olomorfe; la seconda condizione è verificata grazie a un lemma precedente; la terza deriva dalla regolarità di q_j . \square

Lemma 9.17. *Se $\Delta(0, r)$ è un policilindro ammissibile per \mathfrak{p} allora il germe $Z \setminus Z(D)$ è rappresentato da $\Delta(0, r)$.*

Dimostrazione. Si deve verificare che

$$\Delta(0, r) \cap (Z \setminus Z(D)) = \left\{ z \in \Delta(0, r) \mid q_{k+1}(z_{k+1}) = 0, z_j = \frac{t_j(z_{k+1})}{D(z_1, \dots, z_k)} \right\},$$

ma questo deriva dal fatto che $Z_1 \setminus Z(D) = Z \setminus Z(D) = Z_2 \setminus Z(D)$. \square

Teorema 9.18. *Siano $\Delta(0, r)$ ammissibile per \mathfrak{p} , $\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ la proiezione naturale e $s = \deg q_{k+1}$; allora:*

- $Z \setminus Z(D)$ è una sottovarietà complessa di $\Delta(0, r)$ e $\pi|_{Z \setminus Z(D)}: Z \setminus Z(D) \rightarrow \Delta(0, \rho) \setminus Z(D)$ è un rivestimento a s fogli;
- $\pi: \bar{V} \rightarrow \Delta(0, \rho)$ è una mappa propria (la preimmagine di un compatto è compatta);
- $Z \setminus Z(D)$ è connesso e \bar{V} è un rappresentante per $Z(\mathfrak{p})$.