

UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica



Tesi di Laurea Specialistica

**AUTOMORFISMI DELLE  
SUPERFICI DI GODEAUX CON  
TORSIONE DI ORDINE 4 E 5**

27 giugno 2008

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Rita Pardini

Laureando:  
Stefano Maggiolo

---

Anno accademico 2007–2008



---

## INDICE

---

INTRODUZIONE      v

1 PREREQUISITI      1

- 1.1 Varietà intersezione completa      1
- 1.2 Varietà immerse canonicamente      3
- 1.3 Gruppo fondamentale algebrico      4

2 COSTRUZIONE      9

- 2.1 Classificazione      9
- 2.2 Superfici con torsione di ordine 5      14
- 2.3 Superfici con torsione di ordine 4      19

3 AUTOMORFISMI DELLE SUPERFICI CON TORSIONE DI ORDINE 5      33

- 3.1 La superficie di Godeaux classica      33
- 3.2 Il caso generale      34
- 3.3 Automorfismi di tipo  $\bar{1}$       36
- 3.4 Automorfismi di tipo  $\bar{4}$       37
- 3.5 Automorfismi di tipo  $\bar{2}$       38
- 3.6 Conclusione      40

4 AUTOMORFISMI DELLE SUPERFICI CON TORSIONE DI ORDINE 4      41

- 4.1 Preliminari      41
- 4.2 Automorfismi di tipo  $\bar{1}$       42
- 4.3 Automorfismi di tipo  $\bar{3}$       46
- 4.4 Conclusione      50

BIBLIOGRAFIA      57



---

## INTRODUZIONE

---

### STORIA DELLE SUPERFICI DI GODEAUX

Una *superficie di Godeaux* è una superficie algebrica liscia, proiettiva e minimale, con genere geometrico  $p_g$  e irregolarità  $q$  nulli, e autointersezione del divisore canonico  $K^2$  uguale a 1. Questa importante classe di superfici prende il nome da Lucien Godeaux, che nel 1931 costruì il primo esempio nell'articolo [13]; nel seguito chiameremo questa superficie la *superficie di Godeaux classica*. L'importanza, per lo meno dal punto di vista storico, della superficie di Godeaux classica risale a una congettura di Max Noether (circa 1870) che ipotizzò che una superficie con irregolarità e genere geometrico nulli fosse razionale. Circa vent'anni più tardi, nel 1894 (pubblicato però nel compendio [10]), Federigo Enriques esibì il primo esempio, che ora porta il suo nome, di superficie non razionale con tali invarianti, contraddicendo la congettura di Noether. Nello stesso anno, Guido Castelnuovo iniziò la dimostrazione del famoso Criterio di razionalità, completata in [9]: se una superficie soddisfa le più restrittive ipotesi di irregolarità e secondo plurigenere nulli, allora è razionale.

Nonostante la superficie di Enriques fosse già un controesempio per la congettura di Noether, rimase aperto il problema di scoprire una superficie di tipo generale con irregolarità e genere geometrico nulli; la superficie di Enriques infatti ha dimensione di Kodaira nulla. La superficie di Godeaux classica fu il primo esempio di superficie di tipo generale con  $q = p_g = 0$ , precedendo di poco la costruzione di un'altra superficie con le stesse caratteristiche da parte di Luigi Campedelli (vedi [8]). Queste due superfici sono distinte da un altro invariante, l'autointersezione del divisore canonico, che per le Godeaux è 1, mentre per l'esempio di Campedelli è 2. Nel tempo, le superfici lisce e minimali, con  $p_g = q = 0$  e  $K^2 = 1$  (rispettivamente,  $K^2 = 2$ ) sono state chiamate superfici (numeriche) di Godeaux (rispettivamente, di Campedelli). Le due costruzioni sono molto diverse: Campedelli usò un rivestimento doppio del piano proiettivo, ramificato su opportune curve per ottenere una superficie con i giusti invarianti; Godeaux invece quotientò una superficie quintica di  $\mathbb{P}^3$  per un'azione libera di  $\mathbb{Z}_5$ .

A riprova della lunga strada ancora da compiere nello studio delle superfici di tipo generale, una classificazione delle superfici di Godeaux (nonostante dal 1931 siano state studiate da molti autori) ancora non è completa. Com'è chiaro dalla descrizione, la superficie di

Godeaux classica ha gruppo fondamentale algebrico isomorfo a  $\mathbb{Z}_5$ . Yoichi Miyaoka, in [22] dimostrò che le superfici di Godeaux con tale gruppo fondamentale algebrico formano uno spazio di moduli irriducibile di dimensione otto, e diede la costruzione esplicita di queste superfici. Inoltre, dimostrò che il gruppo fondamentale algebrico di una superficie di Godeaux non può avere più di cinque elementi e deve essere ciclico (sostanzialmente, il caso  $\mathbb{Z}_2^2$  non può accadere). Appare allora ovvio tentare una classificazione rispetto al gruppo fondamentale algebrico. In effetti, Miles Reid in [25], calcolando l'anello canonico di una superficie di Godeaux con gruppo fondamentale algebrico ciclico di ordine 5, 4 e 3, riuscì a descrivere completamente queste classi (ritrovando il risultato di Miyaoka nel caso di ordine 5), dimostrando che il loro spazio dei moduli è irriducibile e di dimensione otto. Invece, per i due casi rimanenti, cioè per le superfici di Godeaux con gruppo fondamentale algebrico di ordine due, e per quelle algebricamente semplicemente connesse, si conosce molto poco: una classificazione completa non è nota, anzi, ne sono stati costruiti solo sporadici esempi; i primi in ordine temporale sono di Rebecca Barlow: per la prima classe in [2], mentre per la seconda in [3].

#### AUTOMORFISMI DI UNA SUPERFICIE DI TIPO GENERALE

Nel 1893, Adolf Hurwitz mostrò che per le curve di genere  $g \geq 2$ , il gruppo di automorfismi è finito e di cardinalità minore o uguale a  $42 \cdot 2(g - 1)$ . Inoltre, questo limite è effettivo, nel senso che esistono curve che raggiungono il limite, chiamate ancora oggi *curve di Hurwitz*. Nella terminologia moderna, le curve con genere maggiore o uguale a due sono quelle con dimensione di Kodaira positiva, cioè le curve di tipo generale; inoltre,  $2(g - 1)$  può essere visto come il grado del divisore canonico. Abbastanza sorprendentemente, per le superfici di tipo generale, come sono le superfici di Godeaux, si trova una stima completamente analoga.

Il percorso compiuto per arrivare a questo risultato comincia nella metà del ventesimo secolo, quando Aldo Andreotti in [1] dimostra che per una superficie di tipo generale il gruppo degli automorfismi è finito. In questo articolo viene anche mostrato un limite superiore al numero di automorfismi, esponenziale rispetto al genere geometrico. Negli anni Ottanta, questo limite è stato abbassato per alcune classi di superfici a una dipendenza polinomiale. Successivamente, Alessio Corti in [11] ha dimostrato una stima polinomiale, nell'autointersezione del divisore canonico, per tutte le superfici di tipo generale, anche se il polinomio che limita è di grado dieci. Poco dopo, questa stima è stata ancora affinata da Alan T. Huckleberry e Martin Sauer in [20], arrivando a un limite asintotico a  $\log(K^2) \cdot (K^2)^{15/2}$ . In questo

contesto, vengono sviluppati i lavori di Xiao Gang (per le referenze, si veda [27]), che dimostra il limite effettivo  $42^2 K^2$  (oltre che un limite per il massimo sottogruppo abeliano del gruppo degli automorfismi per una varietà di tipo generale), raggiunto nelle superfici che sono prodotto di una curva di Hurwitz con sé stessa.

Per quanto riguarda gli automorfismi delle superfici di Godeaux, il limite di Xiao ci permette di dire che il numero di automorfismi è al più 1764, il che non dà moltissime informazioni. Più informazioni invece porta l'articolo [7], che classifica le superfici di Godeaux che ammettono un'involuzione. Recentemente, sulla stessa linea Eleonora Palmieri in [23] ha dimostrato che non esistono superfici di Godeaux dotate di un automorfismo di ordine tre.

Il nostro contributo si pone trasversalmente rispetto a questi lavori. Invece di classificare le superfici di Godeaux che ammettono un automorfismo con una particolare proprietà, descriveremo esplicitamente il gruppo di automorfismi delle superfici di Godeaux con torsione di ordine quattro e cinque.

Dopo aver richiamato alcuni risultati e nozioni generali nel Capitolo 1, mostreremo nel Capitolo 2 la costruzione delle superfici di Godeaux con gruppo fondamentale di ordine quattro e cinque, seguendo sostanzialmente [25]. La parte originale è contenuta nei due capitoli successivi, dove calcoleremo il gruppo degli automorfismi di queste superfici; in particolare, mostreremo (vedi la tabella 4 a pagina 40 e la tabella 7 a pagina 53) per ogni gruppo possibile le sottovarietà corrispondenti nello spazio dei moduli. Sia nel caso con torsione di ordine cinque che in quello di ordine quattro, la generica superficie non ammette automorfismi diversi dall'identità; nel primo caso c'è una sola superficie (la superficie di Godeaux classica) che raggiunge il massimo numero di automorfismi, 100; nel secondo caso, il massimo numero di automorfismi, 8, viene raggiunto in una sottovarietà di dimensione due dello spazio dei moduli. Grazie a questa classificazione otterremo inoltre che il gruppo di automorfismi di una superficie di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_4$  è abeliano.

## NOTAZIONI

Per varietà intendiamo sempre una varietà proiettiva definita su  $\mathbb{C}$ ; quando non specificato, sottintenderemo che una varietà è liscia. Se  $X$  è una varietà (liscia) indichiamo con  $\Omega_X^k$  il fascio delle  $k$ -forme su  $X$ , con  $\omega_X = \bigwedge_1^{\dim X} \Omega_X^1$  il fascio canonico e con  $K_X$  il divisore canonico. Rispettivamente  $H^k(X, F)$  e  $h^k(X, F)$  sono la  $k$ -esima coomologia di  $X$  a coefficienti nel fascio  $F$  (oppure, se  $F$  è un divisore, nel fascio  $\mathcal{O}_X(F)$ ) e la sua dimensione come  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. Il genere geometrico di  $X$  è  $p_g(X) := h^0(X, K_X)$  mentre l'irregolarità è  $q(X) := h^{1,0}(X)$ , cioè

la dimensione di  $H^0(X, \Omega_X^1)$ . Per una superficie, cioè una varietà di dimensione due,  $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X)$ , di conseguenza la caratteristica di  $X$  è  $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X)$ . Indichiamo inoltre la caratteristica topologica di  $X$  con  $\chi_{\text{top}}(X)$ .

Per un divisore su una varietà intenderemo un divisore di Weil; l'equivalenza lineare (cioè, l'uguaglianza a meno del divisore di una funzione razionale) è indicata con  $\equiv$ , mentre l'equivalenza numerica (cioè, l'avere la stessa intersezione con tutti i divisori) con  $\sim$ .



---

## PREREQUISITI

---

In questo capitolo riassumeremo alcuni risultati non strettamente inerenti all'argomento centrale della tesi, ma che saranno utili nel prosieguo.

### 1.1 VARIETÀ INTERSEZIONE COMPLETA

**1.1.1 PROPOSIZIONE.** *Sia  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  una varietà liscia, intersezione completa delle ipersuperfici  $H_1, \dots, H_r$ , di grado  $d_1, \dots, d_r$ ; allora*

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X \left( \sum_{i=1}^r d_i - N - 1 \right).$$

*Dimostrazione.* Per il Teorema II.8.17 in [16], se  $X'$  (nel nostro caso  $X' = \mathbb{P}^N$ ) è una varietà liscia e  $X \subseteq X'$  è una sottovarietà chiusa e irriducibile corrispondente al fascio di ideali  $\mathcal{I}$ , allora  $X$  è liscia se e solo se il suo fascio delle 1-forme  $\Omega_X^1$  è localmente libero di rango  $r = \text{codim}(X, X')$  e la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow \Omega_{X'}^1 \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0$$

è esatta (in generale, è esatta solo a destra).

Nelle nostre ipotesi,  $X$  è liscia e quindi la successione è esatta; passando al determinante della successione otteniamo  $\omega_{X'} \otimes \mathcal{O}_X \cong \omega_X \otimes \wedge^r \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ ; tensorizzando per il duale di  $\wedge^r \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ , cioè  $\wedge^r \mathcal{N}_{X/X'}$ , dato che duale e massima potenza esterna commutano, otteniamo  $\omega_{X'|X} \otimes \wedge^r \mathcal{N}_{X/X'} \cong \omega_X$ .

Poiché  $X$  è intersezione completa,  $\mathcal{I}$  è generato dai polinomi  $f_i$  che definiscono le ipersuperfici e, componendo con la proiezione, possiamo scrivere l'omomorfismo suriettivo

$$\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{X'}(-H_i) = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{X'}(-d_i) \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2.$$

Restringendo i fasci a  $X$ , abbiamo un omomorfismo suriettivo

$$\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X(-d_i) \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2,$$

che è un isomorfismo dato che entrambi i fasci sono localmente liberi di rango  $r$ . Prendendo la massima potenza esterna,

$$\bigwedge^r \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \cong \bigwedge^r \left( \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X(-d_i) \right) \cong \mathcal{O}_X \left( -\sum_{i=1}^r d_i \right),$$

da cui  $\bigwedge^r \mathcal{N}_{X/X'} \cong \mathcal{O}_X \left( \sum_{i=1}^r d_i \right)$ . Ora,

$$\begin{aligned} \omega_X &\cong \omega_{X'|X} \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{X/X'} \cong \mathcal{O}_X(-N-1) \otimes \mathcal{O}_X \left( \sum_{i=1}^r d_i \right) \cong \\ &\cong \mathcal{O}_X \left( \sum_{i=1}^r d_i - N - 1 \right). \end{aligned} \quad \square$$

**1.1.2 PROPOSIZIONE.** *Sia  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  una varietà, intersezione completa di  $r$  ipersuperfici; allora, per ogni  $i$  tale che  $0 < i < N - r$  e per ogni  $k$ ,  $H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $r$ . Se  $r = 0$ ,  $X = \mathbb{P}^N$  e per il Teorema III.5.1 in [16],  $H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$  per ogni  $i \notin \{0, N\}$ . Se l'asserto vale per le varietà di codimensione  $r - 1$  e  $X$  è l'intersezione completa di una ipersuperficie di grado  $d$  con una varietà  $X'$  intersezione completa di  $r - 1$  ipersuperfici, allora abbiamo la successione esatta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(k-d) \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(k) \rightarrow \mathcal{O}_X(k) \rightarrow 0.$$

Dalla corrispondente successione esatta lunga possiamo estrarre per ogni  $i$  con  $0 < i < N - r$  la successione esatta

$$0 = H^i(X', \mathcal{O}_{X'}(k)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) \rightarrow H^{i+1}(X', \mathcal{O}_{X'}(k-d)) = 0,$$

che implica  $H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ . □

**1.1.3 TEOREMA (della sezione iperpiana di Lefschetz).** *Sia  $X$  una sottovarietà liscia di  $\mathbb{P}^N$  di dimensione  $n$  e sia  $H \subseteq \mathbb{P}^N$  un iperpiano; allora  $\pi_i(X) \cong \pi_i(X \cap H)$  per ogni  $i < n$ , dove  $\pi_i$  associa a una varietà il suo  $i$ -esimo gruppo di omotopia.*

*Dimostrazione.* Vedi Teorema I.20.4 in [4], oppure sezione 5.1 e seguenti in [14]. □

1.1.4 PROPOSIZIONE. *Un'ipersuperficie liscia  $X \subseteq \mathbb{P}^N$ , con  $N > 2$ , è semplicemente connessa.*

*Dimostrazione.* Se  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  ha grado  $d$ , possiamo considerare l'immersione di Veronese  $d$ -upla di  $\mathbb{P}^N$  in  $\mathbb{P}^M$ , dove  $M := \binom{N+d}{d}$ ; in questa immersione, l'immagine di  $X$  è liscia ed è una sezione iperpiana dell'immagine di  $\mathbb{P}^N$ . Poiché  $\mathbb{P}^N$  è semplicemente connesso, per il Teorema di Lefschetz anche  $\pi_1(X) = \{1\}$ .  $\square$

## 1.2 VARIETÀ IMMERSE CANONICAMENTE

Siano  $X$  e  $Y$  due varietà, e  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo dominante;  $f$  induce, per il Teorema II.8.11 in [16], un omomorfismo canonico di fasci  $f^*: f^*\Omega_Y^1 \rightarrow \Omega_X^1$ , che, prendendo le massime potenze esterne, induce un omomorfismo  $f^*: f^*\omega_Y \rightarrow \omega_X$ , dato che potenza esterna e pullback commutano.

Se  $Y = X$  e  $f \in \text{Aut}(X)$ , da una parte il pullback tramite un isomorfismo del fascio canonico è ancora il fascio canonico, cioè  $f^*\omega_X = \omega_X$ ; dall'altra, dato che la corrispondenza  $f \mapsto f^*$  è canonica (e quindi functoriale), anche  $f^*$  è un isomorfismo. Possiamo costruire il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \omega_X = f^*\omega_X & \xleftarrow{f^*} & \omega_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

Considerando le sezioni globali, a partire da un automorfismo  $f$  di  $X$  otteniamo un automorfismo dello spazio vettoriale  $H^0(X, K_X)$ , che chiameremo ancora  $f^*$ . Inoltre, poiché la corrispondenza è functoriale, se  $f, h \in \text{Aut}(X)$  allora  $(h \circ f)^* = f^*h^*$ . Questo ci permette di dire che se  $G$  è un gruppo con un'azione  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(X)$ , allora non solo ogni  $\rho_g$  induce un automorfismo  $\rho_g^*$  di  $H^0(X, K_X)$ , ma che la mappa  $g \mapsto \rho_{g^{-1}}^*$  è a sua volta un'azione di  $G$  su  $H^0(X, K_X)$ , cioè una rappresentazione lineare di  $G$  (è necessario prendere  $g \mapsto \rho_{g^{-1}}^*$  in quanto il pullback è un funtore controvariante).

Abbiamo visto che  $f \in \text{Aut}(X)$  induce un automorfismo dello spazio vettoriale  $H^0(X, K_X)$ ; considerando il duale e proiettivizzandolo, otteniamo un automorfismo  $\tilde{f}$  di  $\mathbb{P}^N$ , il codominio della mappa canonica  $\varphi_{|K_X|}$  (quando questa è definita, cioè quando  $|K_X|$  non ha componenti fisse). Se supponiamo che  $\varphi_{|K_X|}$  sia un'immersione, la restrizione di  $\tilde{f}$  a  $X$  ha immagine contenuta in  $X$  ed è  $f$ : infatti, dato  $x \in X$ , una sezione  $s \in H^0(X, K_X)$  si annulla in  $f(x)$  se e solo se  $f^*(s)$  si annulla in  $x$ ; abbiamo quindi dimostrato la seguente.

**1.2.1 PROPOSIZIONE.** Siano  $X$  e  $Y$  due varietà con divisore canonico molto ampio,  $\varphi_X: X \rightarrow X' \subseteq \mathbb{P}^N$  e  $\varphi_Y: Y \rightarrow Y' \subseteq \mathbb{P}^N$  le immersioni canoniche; per ogni morfismo dominante  $f: X \rightarrow Y$  esiste un morfismo  $\tilde{f}: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$  tale che  $\tilde{f}(X') \subseteq Y'$  e che rende il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi_X \downarrow & & \downarrow \varphi_Y \\ X' & \xrightarrow{\tilde{f}|_{X'}} & Y' \end{array}$$

commutativo. Inoltre, la corrispondenza  $f \mapsto \tilde{f}$  è funtoriale.

Il vantaggio di avere questa proposizione è che gli automorfismi dello spazio proiettivo sono molto semplici.

**1.2.2 PROPOSIZIONE.** Ogni automorfismo di  $\mathbb{P}^N$  è lineare; in altre parole, fissato un sistema di coordinate  $(x_0, \dots, x_N)$ , è rappresentato da una matrice in  $\mathbb{P}GL(N+1)$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathbb{P}^N$  è il proiettivizzato di uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $N+1$ , allora un automorfismo lineare di  $V$  scende a un automorfismo di  $\mathbb{P}^N$  lineare, cioè descritto da una matrice in  $GL(N+1)$ ; due automorfismi linearmente dipendenti scendono allo stesso automorfismo di  $\mathbb{P}^N$ , quindi gli automorfismi lineari di  $\mathbb{P}^N$  sono parametrizzati da  $\mathbb{P}GL(N+1)$ .

Viceversa, se  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^N)$ , sia  $L := \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ ; allora:

- dato che  $\text{Pic } \mathbb{P}^N = \mathbb{Z} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ ,  $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(k)$  per qualche  $k$ ;
- essendo  $\varphi = \varphi|_L$  un'immersione in  $\mathbb{P}^N$ ,  $L$  è molto ampio, cioè  $k > 0$ ;
- poiché  $\varphi^*: \text{Pic } \mathbb{P}^N \rightarrow \text{Pic } \mathbb{P}^N$  è un automorfismo,  $L$  è isomorfo a un generatore di  $\text{Pic } \mathbb{P}^N$ , cioè  $k \in \{-1, 1\}$ .

Allora  $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$  e di conseguenza  $\varphi$  è descritta da polinomi di primo grado.  $\square$

### 1.3 GRUPPO FONDAMENTALE ALGEBRICO

Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi, localmente connesso e localmente semplicemente connesso; allora  $X$  ammette un rivestimento universale, cioè un rivestimento  $\tilde{X} \rightarrow X$  con  $\tilde{X}$  semplicemente connesso; il gruppo fondamentale  $G := \pi_1(X)$  agisce su  $\tilde{X}$  in modo che, come spazi topologici,  $\tilde{X}/G \cong X$  (denoteremo l'azione di  $\gamma$  su un punto  $x \in \tilde{X}$  con  $\gamma \cdot x$ ). Inoltre, per ogni sottogruppo normale  $N \leq G$ ,

la mappa  $X' := \tilde{X}/N \rightarrow X$  è un rivestimento tramite l'azione di  $G/N$ . Vale anche la seguente proposizione, che ci sarà utile in seguito.

**1.3.1 PROPOSIZIONE.** *Sia  $f: X \rightarrow Y$  una funzione continua con push forward  $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$  è suriettivo; allora per ogni rivestimento connesso  $p: Y' \rightarrow Y$ , il prodotto fibrato  $X' := Y' \times_Y X$  con la proiezione  $q: X' \rightarrow X$  è un rivestimento connesso di  $X$ .*

*Dimostrazione.* Innanzitutto,  $q$  è un rivestimento: per ogni  $x \in X$ , si considera  $U_x := f^{-1}(U_y)$ , dove  $U_y$  è un intorno di  $y := f(x) \in Y$  tale che  $p^{-1}(U_y) = \sqcup U_i$  con  $U_i$  omeomorfo a  $U_y$ ; allora  $U_x$  è un intorno di  $x$ ,  $q^{-1}(U_x) = \sqcup U_i \times_{U_y} U_x$  e  $U_i \times_{U_y} U_x$  è omeomorfo a  $U_x$ .

Per dimostrare la connessione, fissiamo dei punti base per gli spazi coinvolti in modo da avere il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} (X', x'_0) & \xrightarrow{f'} & (Y', y'_0) \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \end{array}$$

e dimostriamo che il gruppo fondamentale di  $X$  agisce transitivamente sulla fibra sopra un punto  $x \in X$ . La fibra sopra  $x_0$  è

$$q^{-1}(x_0) = \{ (x_0, y') \mid p(y') = f(x_0) \} = \{ (x_0, y') \mid y' \in p^{-1}(y_0) \};$$

fissiamo  $(x_0, y'_0) \in q^{-1}(x_0)$ ; poiché  $p$  è un rivestimento connesso, esiste un laccio  $\gamma \in \pi_1(Y)$  tale che  $\gamma \cdot y'_0 = y'_0$ . Per ipotesi, esiste un laccio  $\delta \in \pi_1(X)$  tale che  $f \circ \delta = \gamma$ . Ora, per la commutatività del diagramma, la composizione con  $f'$  del sollevamento di  $\delta$  con estremo iniziale  $y'_0$  coincide con il sollevamento di  $\gamma$  con estremo iniziale  $y'_0$ , da cui  $\delta \cdot x'_0 = (x_0, y'_0)$ .  $\square$

Se lo spazio  $X$  di partenza è una varietà complessa, possiamo dare una struttura di varietà complessa a ogni rivestimento di  $X$ , dato che  $X'$  e  $X$  sono localmente isomorfe. Se  $X$  è anche algebrica e proiettiva, ci si può chiedere se si ha una tale struttura anche su  $X'$ .

La risposta è affermativa per i rivestimenti  $\pi: X' \rightarrow X$  di grado finito. Infatti, se  $X$  è proiettiva ammette un fibrato in rette  $L$  positivo su  $X$ ; se il rivestimento è finito,  $\pi^*L$  è un fibrato in rette positivo su  $X'$ , che, grazie al Teorema di immersione di Kodaira, permette di vedere  $X'$  come una sottovarietà analitica di uno spazio proiettivo. Infine, per il Teorema di Chow, uno sottospazio analitico chiuso di  $\mathbb{P}^N$  è algebrico (per i dettagli, vedi [15]). Viceversa, ogni rivestimento étale, di Galois, di grado finito è anche un rivestimento topologico.

La definizione di gruppo fondamentale a partire dai lacci ha senso su una varietà complessa, ma non su uno schema più generale. Per estendere la nozione di gruppo fondamentale, si definisce il *gruppo fondamentale algebrico* per uno schema connesso  $X$  come

$$\pi_1^{\text{alg}}(X) := \varprojlim \text{Gal}(X'/X),$$

dove  $X'$  varia tra i rivestimenti étale, di Galois, di grado finito su  $X$ .

Se  $X$  è complessa, si possono confrontare le due definizioni; si dimostra che in questo caso il gruppo fondamentale algebrico è il completamento profinito del gruppo fondamentale, cioè

$$\pi_1^{\text{alg}} = \varprojlim \pi_1/N,$$

dove  $N$  varia tra i sottogruppi normali di  $\pi_1$  con indice finito. In particolare, se  $\pi_1$  è finito,  $\pi_1^{\text{alg}} \cong \pi_1$ .

Per le superfici di Godeaux, il gruppo fondamentale algebrico è finito e abeliano; grazie a questo fatto, possiamo identificare il gruppo fondamentale algebrico con  $\text{Tors}(X)$ , la torsione di  $\text{Pic}(X)$ . In particolare, se  $D \in \text{Tors}(X)$  è un divisore di ordine  $n$ , allora possiamo associargli il rivestimento étale, di Galois, con gruppo di Galois  $\mathbb{Z}_n$  costruito come

$$X' := \text{Spec } \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(D) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X((n-1)D),$$

dove la struttura di algebra è data fissando un isomorfismo  $\mathcal{O}_X(nD) \cong \mathcal{O}_X$ , mentre l'azione di  $\mathbb{Z}_n$  per cui il quoziente è  $X$  è definita dalla moltiplicazione per  $\zeta^i$  sulla  $i$ -esima componente, con  $\zeta$  una radice  $n$ -esima primitiva dell'unità fissata (per i dettagli, vedi [24]).

Nel calcolare gli automorfismi di una superficie di Godeaux con torsione, faremo uso delle seguenti.

**1.3.2 PROPOSIZIONE.** *Siano  $X := X'/G$  e  $Y := Y'/G$  due superfici, dove  $G$  agisce liberamente su  $X'$  e su  $Y'$ ; sia  $f: X \rightarrow Y$  un isomorfismo tale che l'immagine di  $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$  è contenuta nell'immagine di  $\pi_1(Y')$  in  $\pi_1(Y)$ ; allora esiste un isomorfismo  $f': X' \rightarrow Y'$  compatibile con l'azione di  $G$ .*

*Dimostrazione.* Un isomorfismo  $f: X \rightarrow Y$  è in particolare è un omeomorfismo, perciò per le proprietà topologiche dei rivestimenti, se è soddisfatta l'ipotesi sui gruppi fondamentali, si solleva almeno a un omeomorfismo  $f': X' \rightarrow Y'$  (fissando dei punti base  $x'_0 \in X'$  e  $y'_0 \in Y'$ ,  $f'(x')$  è determinato prendendo un cammino  $\gamma$  da  $x'_0$  a  $x'$ , proiettandolo in  $Y$  e prendendo il punto finale del sollevamento in  $Y'$  a partire da  $y'_0$ ); però, possiamo vedere  $f$  anche come un biolomorfismo nella categoria degli spazi analitici; dato che per un omeomorfismo l'esse-

re un biolomorfismo è una questione locale (dove “locale” si intende nella topologia usuale),  $f'$  è un biolomorfismo. Per i Teoremi GAGA (vedi [26]), un biolomorfismo di una varietà algebrica, proiettiva e chiusa vista nella categoria analitica è un isomorfismo nella categoria algebrica.  $\square$

**1.3.3 PROPOSIZIONE.** *Siano  $\rho: \mathbb{Z}_n \rightarrow \text{Aut}(X)$  e  $\tau: \mathbb{Z}_n \rightarrow \text{Aut}(Y)$  due azioni libere; allora  $\varphi: X \rightarrow Y$  passa al quoziente se e solo se esiste  $h \in \mathbb{Z}_n^*$  tale che  $\tau_h \varphi = \varphi \rho_1$ .*

*Dimostrazione.* A priori,  $\varphi$  passa al quoziente se e solo se, per ogni  $x \in X$  e per ogni  $k \in \mathbb{Z}_n$ , esiste  $h \in \mathbb{Z}_n$  tale che  $\tau_h \varphi(x) = \varphi \rho_k(x)$ . Osserviamo innanzitutto che se la condizione è soddisfatta per  $k = 1$ , lo è per ogni  $k$  (prendendo semplicemente  $\tau_{hk}$ ). Inoltre, se  $h$  esiste, non dipende da  $x$ : sia  $C_h$  l'insieme degli  $x \in \mathbb{P}^N$  tali che  $\tau_h \varphi(x) = \varphi \rho_1(x)$ ; i  $C_h$  sono chiusi e per ipotesi coprono  $X$ , ma  $X$  è irriducibile, quindi almeno uno dei  $C_h$  deve essere  $X$ . Infine, se  $\tau_h \varphi = \varphi \rho_1$ , allora  $\tau_h$  e  $\rho_1$  hanno lo stesso ordine perché coniugate tramite un elemento di  $\text{Aut}(X)$ ; ma un elemento di  $\mathbb{Z}_n$  ha ordine  $n$  se e solo se  $(h, n) = 1$ , cioè se  $h \in \mathbb{Z}_n^*$ .  $\square$

In particolare, abbiamo il seguente corollario.

**1.3.4 COROLLARIO.** *Sia  $\pi: X' \rightarrow X$  un rivestimento étale, di Galois, con gruppo di Galois  $G \cong \mathbb{Z}_n$ ; allora  $\text{Aut}(X)$  è isomorfo al quoziente del normalizzatore  $N_{\text{Aut}(X')}(G)$  per  $G$ .*

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 1.3.2 e la Proposizione 1.3.3, un automorfismo  $\varphi$  di  $X$  viene da almeno un automorfismo  $\varphi'$  di  $X'$  e  $\varphi' \in N_{\text{Aut}(X')}(G)$ . Rimane da dimostrare che gli automorfismi del normalizzatore che inducono l'identità al quoziente sono solo quelli di  $G$ ; ma se  $\varphi'$  induce l'identità, manda  $x' \in X'$  in un suo coniugato tramite  $G$ , cioè per ogni  $x' \in X'$ , esiste  $g \in G$  tale che  $\varphi'(x') = g(x')$ ; con gli stessi argomenti della dimostrazione precedente,  $g$  se esiste è unico e  $\varphi' = g$ .  $\square$





# 2

---

## COSTRUZIONE

---

In questo capitolo definiremo le superfici di Godeaux e mostreremo che possono essere divise in cinque classi a seconda del loro gruppo fondamentale algebrico, che può essere  $\{0\}$ ,  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{Z}_4$  o  $\mathbb{Z}_5$ . Delle superfici delle prime due classi non abbiamo una descrizione completa, tanto meno una costruzione esplicita (anche se sappiamo che esistono degli esempi); le ultime tre classi invece sono ben comprese: conosciamo lo spazio dei moduli e sappiamo dare una costruzione esplicita di tutte le superfici che vi appartengono.

### 2.1 CLASSIFICAZIONE

**2.1.1 DEFINIZIONE.** Una *superficie di Godeaux* è una superficie  $S$  di tipo generale, liscia e minimale, con  $p_g(S) = 0 = q(S)$  e  $K_S^2 = 1$ .

Per la definizione del gruppo fondamentale algebrico (vedi Sezione 1.3), una superficie  $S$  ha  $|\pi_1^{\text{alg}}| \geq n$  se e solo se esiste un rivestimento  $X \rightarrow S$  étale, di Galois, di grado maggiore o uguale a  $n$ . Il nostro primo scopo è quello di mostrare che se  $S$  è una superficie di Godeaux, il suo gruppo fondamentale algebrico ha al più cinque elementi.

Siano quindi  $S$  una superficie di Godeaux e  $\pi: X \rightarrow S$  un rivestimento étale, di Galois, finito, di grado  $n$ ; allora  $X$  è liscia e:

$$\begin{aligned} K_X^2 &= nK_S^2 = n && \text{perché } K_X = \pi^*K_S; \\ \chi(\mathcal{O}_X) &= n\chi(\mathcal{O}_S) = n, && \text{per il Lemma VI.3 in [6];} \\ p_g(X) &= n - 1 + q(X) && \text{da } \chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X). \end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza di Noether (vedi Teorema VII.3.1 in [4]),  $K_X^2 \geq 2p_g(X) - 4$ , otteniamo

$$n = K_X^2 \geq 2(n - 1 + q(X)) - 4 = 2q(X) + 2n - 6,$$

da cui  $n \leq 6 - 2q(X) \leq 6$ . Dobbiamo escludere il caso  $n = 6$ ; per farlo abbiamo bisogno dei lemmi seguenti.

**2.1.2 LEMMA.** *Sia  $X$  una superficie con  $q(X) > 0$ ; allora  $X$  ammette rivestimenti étale, di Galois, finiti di grado  $n$  per ogni  $n > 0$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $n > 0$ ,  $q := q(X)$  e  $A := \text{Alb}(X)$  la varietà di Albanese di  $X$ , dotata del morfismo  $a: X \rightarrow A$ . Poiché  $A$  è una varietà abeliana, possiamo considerare il morfismo  $\mu_n: A \rightarrow A$  dato dalla moltiplicazione per  $n$ . Sia  $X' := A \times_A X$  il prodotto fibrato che completa il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\alpha'} & A \\ f \downarrow & & \downarrow \mu_n \\ X & \xrightarrow{\alpha} & A; \end{array}$$

il morfismo  $\mu_n$  è chiaramente étale e di Galois e, dato che  $\text{Alb}(X)$  ha dimensione  $2q$ , è di grado  $n^{2q}$ . Poiché  $X'$  si ottiene da  $X$  per cambiamento di base tramite un rivestimento étale, anche  $f$  è tale (vedi [21], pagina 44). Rimane da dimostrare che  $X'$  è connesso, ma questo segue dalla Proposizione 1.3.1, dato che una proprietà fondamentale della mappa di Albanese è che l'omomorfismo indotto  $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(A)$  è suriettivo.  $\square$

**2.1.3 LEMMA.** *Siano  $X$  una superficie di tipo generale, liscia e minimale,  $\alpha \in \text{Aut}(X)$  un automorfismo di ordine  $r$  tale che  $\langle \alpha \rangle$  agisce liberamente su  $X$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  una fibrazione in curve di genere  $g$  compatibile con  $\alpha$ , nel senso che esiste  $\beta \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  che fa commutare il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{P}^1; \end{array}$$

*allora  $r \mid g - 1$ .*

*Dimostrazione.* L'automorfismo  $\beta$  è rappresentato da una matrice di  $\text{PGL}(2)$  ed è facile vedere che ha almeno un punto fisso; sia quindi  $x \in \mathbb{P}^1$  un punto tale che  $\beta(x) = x$  e sia  $F := f^*(x)$ , la fibra sopra  $x$ . Dato che  $F$  è una fibra,  $F^2 = 0$ ; d'altra parte, per la formula di aggiunzione,  $K_F = (K_X + F)|_F$ , da cui  $K_X \cdot F = K_F \cdot F - F^2 = 2(g - 1)$ . Ora, sia  $S$  il quoziente  $X/\langle \alpha \rangle$ ; il morfismo di proiezione  $\pi: X \rightarrow S$  è un rivestimento étale e di Galois; abbiamo  $K_X = \pi^*K_S$ , ma anche  $F$  è il pullback tramite  $\pi$  di un divisore  $F'$  di  $S$ , essendo  $F$  invariante per  $\alpha$ . Allora,

$$2(g - 1) = K_X \cdot F = \pi^*K_S \cdot \pi^*F' = rK_S \cdot F'.$$

Inoltre, da  $F = \pi^*F'$  abbiamo  $0 = F^2 = rF'^2$ ; di conseguenza, per la formula del genere,  $K_S \cdot F'$  è pari, quindi  $r \mid g - 1$ .  $\square$

**2.1.4 TEOREMA.** *Sia  $S$  una superficie di Godeaux; allora  $|\pi_1^{\text{alg}}| \leq 5$ .*

*Dimostrazione.* Escludiamo il caso  $|\pi_1^{\text{alg}}(S)| = 6$  mostrando che non esiste una superficie di tipo generale  $X$ , liscia e minimale, con  $K_X^2 = 6$  e  $p_g(X) = 5 + q(X)$ , dotata di un gruppo  $G$  di automorfismi di ordine sei che agisce in modo libero. In questo caso,  $6 \leq 6 - 2q(X) \leq 6$ , da cui  $q(X) = 0$ .

Per assurdo, siano  $X$  e  $G$  una superficie e un gruppo con le caratteristiche elencate precedentemente. Il quoziente  $S := X/G$  è una superficie di Godeaux e abbiamo un rivestimento étale, di Galois, di grado sei,  $\pi: X \rightarrow S$ . Per  $X$  abbiamo  $K_X^2 = 2p_g(X) - 4$ . Le superfici con  $q = 0$  e  $K^2 = 2p_g - 4$  o  $K^2 = 2p_g - 3$  sono dette *superfici di Horikawa*, il quale le ha studiate estensivamente (per delle referenze, si veda [19]). In particolare, per le superfici con  $K^2 = 2p_g - 4$ , è noto che la mappa indotta dal sistema lineare canonico è un morfismo ed è un rivestimento doppio su una superficie di grado  $p_g - 2$  in  $\mathbb{P}^{p_g - 1}$ . Nel nostro caso, abbiamo  $\varphi_{|K_X|}: X \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ ; l'immagine di questo morfismo è la superficie di Hirzebruch  $\mathbb{F}_1$  immersa in  $\mathbb{P}^4$  come scroll razionale normale. Se componiamo  $\varphi_{|K_X|}$  con la proiezione  $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , otteniamo una fibrazione  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  che ha come fibre curve di genere due (vedi Teorema 1.6 e Corollario 1.7 in [18]); poiché è stata costruita solo a partire da  $K_X$ , è invariante rispetto a  $G$ . Per il Lemma 2.1.3, questo implica che l'ordine di ogni elemento di  $G$  divide 1, assurdo.  $\square$

Grazie a questo teorema, rimangono sei possibilità per  $\pi_1^{\text{alg}}(S)$ : i gruppi ciclici di ordine  $n$ ,  $1 \leq n \leq 5$ , e  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ; dobbiamo escludere quest'ultimo. Dimostriamo alcuni lemmi preliminari.

**2.1.5 LEMMA.** *Sia  $D = \sum_{i \in I} m_i C_i$  un divisore numericamente equivalente a 0 su una superficie  $S$  di tipo generale, minimale e tale che  $K_S \cdot C_i = 0$  per ogni  $i \in I$ ; allora  $D = 0$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $S$  è di tipo generale,  $K_S$  è nef e big. Sia  $J \subseteq I$  l'insieme degli indici corrispondenti a coefficienti  $m_j$  negativi e poniamo  $D_1 := \sum_{i \in I \setminus J} m_i C_i$  e  $D_2 := \sum_{j \in J} -m_j C_j$ . Allora  $D_1$  e  $D_2$  sono due divisori effettivi, numericamente equivalenti e senza componenti comuni. Ora,  $D_i^2 = D_1 \cdot D_2 \geq 0$ ; d'altra parte, per il Teorema dell'indice (vedi Corollario 2.16, [4]),  $K_S^2 > 0$  implica  $D_i^2 \leq 0$  con l'uguaglianza se e solo se  $D_i = 0$ .  $\square$

2.1.6 LEMMA. Sia  $S$  una superficie di Godeaux; allora per ogni divisore  $D \in \text{Tors}(S)$  e per ogni  $n \geq 1$  a meno del caso  $n = 1, D = 0$ ,

$$h^0(S, nK_S + D) = 1 + \binom{n}{2}.$$

*Dimostrazione.* Per il Teorema di Riemann-Roch, abbiamo

$$\begin{aligned} \chi(nK_S + D) &= \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(nK_S + D) \cdot (nK_S + D - K_S) = \\ &= \chi(\mathcal{O}_S) + \binom{n}{2}K_S^2 = 1 + \binom{n}{2}, \end{aligned}$$

dato che un divisore di torsione ha intersezione nulla con ogni altro divisore. Dimostriamo che  $h^1(S, nK_S + D) = 0 = h^2(S, nK_S + D)$ . Per  $n \geq 2$ ,  $(n-1)K_S + D$  è nef e big, dato che lo è  $K_S$  in quanto  $S$  è di tipo generale, e  $D$  non influisce nelle intersezioni, quindi possiamo applicare il Teorema di annullamento di Kawamata-Viehweg (vedi [12]):

$$h^i(S, K_S + L) = 0 \quad \forall L \text{ nef e big, } \forall i > 0.$$

Rimane da dimostrare che le due coomologie si annullano per  $n = 1$  e  $D \neq 0$ ; se  $D$  è di torsione, anche  $-D$  lo è e  $h^2(S, K_S + D) = h^0(S, -D) = 0$ , perché un divisore non nullo in  $H^0(S, -D)$  dovrebbe essere effettivo, ma numericamente equivalente a 0, e questo è impossibile per il Lemma 2.1.5 (poiché  $K_S$  è nef, se ha intersezione nulla con un divisore effettivo, deve avere intersezione nulla con ogni sua componente). Consideriamo il rivestimento  $X \rightarrow S$  corrispondente a  $D$ : il pullback di un elemento non nullo di  $H^1(S, K_S + D)$  è un elemento non nullo di  $H^1(X, K_X)$ , perciò se  $h^1(S, K_S + D) > 0$ , anche  $q(X) > 0$ . Questo però non può accadere: se  $q(X) > 0$ , per il Lemma 2.1.2  $X$  avrebbe rivestimenti étale, di Galois, di ogni grado e così  $S$ , ma  $S$  è una superficie di Godeaux, che abbiamo dimostrato non ammettere tali rivestimenti con grado maggiore di cinque.  $\square$

2.1.7 LEMMA. Sia  $S$  una superficie di Godeaux e siano  $D_1$  e  $D_2$  due divisori distinti, effettivi e numericamente equivalenti a  $K_S$ . Allora,  $D_1$  e  $D_2$  non hanno componenti comuni.

*Dimostrazione.* Poiché  $S$  è di tipo generale,  $K_S$  è nef e big, quindi grazie a  $K_S \cdot D_i = 1$  e  $D_i \geq 0$  possiamo scrivere

$$D_i = B_i + \sum_j m_{i,j} C_{i,j}$$

con  $K_S \cdot B_i = 1$ ,  $B_i$  irriducibili e  $K_S \cdot C_{i,j} = 0$ . Se  $B_1 = B_2$ , la differenza tra  $D_1$  e  $D_2$  è numericamente equivalente a 0 ed è una combinazione

lineare di curve irriducibili con intersezione nulla col divisore canonico; per il Lemma 2.1.5, la combinazione lineare deve essere banale, cioè  $D_1 = D_2$ , che va contro le ipotesi.

Allora  $B_1 \neq B_2$ ; sia  $E$  il più grande divisore tale che  $E \leq D_1$  ed  $E \leq D_2$ . Da  $K_S^2 > 0$ , per il Teorema dell'indice,  $C_{i,j}^2 < 0$ , e poiché  $S$  è minimale,  $C_{i,j}^2 \leq -2$ ; d'altra parte  $C_{i,j}^2 \geq -2 - K_S \cdot C_{i,j} = -2$ , cioè  $C_{i,j}^2 = -2$ . Otteniamo che la forma d'intersezione delle curve  $C_{i,j}$  è definita negativa e pari; allora  $E^2 \leq -2$ . Ora, da un lato  $D_1 - E$  e  $D_2 - E$  sono effettivi e non hanno componenti comuni, quindi il loro prodotto è non negativo; dall'altro,

$$(D_1 - E) \cdot (D_2 - E) = (K_S - E)^2 = K_S^2 + E^2 - 2K_S \cdot E \leq -1,$$

assurdo. □

**2.1.8 TEOREMA.** *Sia  $S$  una superficie di Godeaux; allora  $\pi_1^{\text{alg}}(S)$  è un gruppo ciclico di ordine minore o uguale a cinque.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo escludere il caso  $\pi_1^{\text{alg}}(S) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ; supponiamo per assurdo che esista una superficie di Godeaux  $S$  con questo gruppo fondamentale algebrico.

Per il Lemma 2.1.6, abbiamo tre sezioni non nulle  $x_{i,j}$  appartenenti a  $H^0(S, K_S + D_{i,j})$  per  $(i, j) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  non entrambi nulli, dove  $D_{i,j}$  è un divisore di torsione in  $\text{Pic}(S)$ , con  $D_{i,j}^2 \equiv 0$  e  $D_{1,0} + D_{0,1} \equiv D_{1,1}$ . In particolare,  $x_{i,j}^2$  sono tre sezioni non nulle in  $H^0(S, 2K_S)$ , ma  $h^0(S, 2K_S) = 2$ ; di conseguenza, esiste una relazione non banale tra le sezioni  $x_{i,j}^2$ .

Sia ora  $\pi: X \rightarrow S$  il rivestimento étale e di Galois ottenuto dalla torsione di  $S$ ; allora  $K_X^2 = (\pi^*K_S)^2 = 4$ ,  $\chi(\mathcal{O}_X) = 4\chi(\mathcal{O}_S) = 4$ . Usando come prima il Lemma 2.1.2 otteniamo  $q(X) = 0$  e quindi  $p_g(X) = 3$ .

Denotiamo ancora con  $x_{i,j}$  i pullback a  $X$  delle sezioni  $x_{i,j}$ ; i tre pullback sono indipendenti perché autovettori per l'azione di  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  relativi a caratteri distinti, quindi formano una base di  $H^0(X, K_X)$ ; hanno però una relazione di secondo grado proveniente dalla relazione in  $H^0(S, 2K_S)$ . Se  $|K_X| = F + |M|$ , con  $F$  la parte fissa e  $M$  la parte mobile di  $K_X$ , consideriamo la mappa  $\varphi_{|M|}$ . Poiché ogni punto dell'immagine deve soddisfare la relazione di secondo grado, la sua immagine è una conica di  $\mathbb{P}^2$ . Dato che una conica è isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ , un punto è linearmente equivalente a un qualsiasi altro punto; quindi la controimmagine di un iperpiano, cioè la controimmagine di due punti, è linearmente equivalente al doppio della fibra  $T$  di  $\varphi_{|M|}$ :  $M = 2T$  e  $|K_X| = F + |2T|$ .

A questo punto,  $4 = K_X^2 = K_X \cdot F + 2K_X \cdot T$ ; in particolare,  $X$  è di tipo generale quindi  $K_X$  è nef e big, perciò abbiamo  $K_X \cdot F \geq 0$  e

$0 \leq 2K_X \cdot T \leq 4$ , cioè  $0 \leq K_X \cdot T \leq 2$ . Se  $F$  fosse il divisore nullo, avremmo  $4 = K_X^2 = (2T)^2 = 4T^2$ , cioè  $T^2 = 1$ ; ma allora,

$$K_X \cdot T = 2T^2 = 2,$$

mentre la formula di aggiunzione darebbe

$$K_X \cdot T = (K_T - T) \cdot T = 2(g(T) - 1) - 1,$$

un numero dispari.

Quindi  $F \neq 0$ , cioè i divisori corrispondenti alle tre sezioni  $x_{0,1}$ ,  $x_{1,0}$ ,  $x_{1,1}$  hanno almeno una componente in comune su  $X$  e così i corrispondenti divisori su  $S$ ; ma questo è impossibile a causa del Lemma 2.1.7.  $\square$

## 2.2 SUPERFICI CON TORSIONE DI ORDINE 5

Mostriamo che, fissata una specifica azione  $\rho$  di  $\mathbb{Z}_5$  su  $\mathbb{P}^3$ , le superfici di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_5$  sono in corrispondenza con le ipersuperfici quintiche invarianti di  $\mathbb{P}^3$  con al più punti doppi razionali, su cui l'azione è libera. La corrispondenza associa a una superficie di Godeaux il modello canonico di un rivestimento relativo a un divisore di ordine cinque, mentre a una quintica di  $\mathbb{P}^3$  associa la risoluzione minimale delle singolarità del quoziente rispetto a  $\rho$ .

**2.2.1 PROPOSIZIONE.** *Sia  $S$  una superficie di Godeaux con  $\pi_1^{\text{alg}}(S) \cong \mathbb{Z}_5$ ; allora  $S$  è il quoziente rispetto a un'azione libera di  $\mathbb{Z}_5$  della risoluzione minimale delle singolarità di una ipersuperficie quintica di  $\mathbb{P}^3$  con al più punti doppi razionali.*

*Dimostrazione.* Consideriamo il rivestimento  $\pi: X \rightarrow S$  relativo a un divisore che genera la torsione di  $S$ ;  $\pi$  è un rivestimento étale, di Galois, di grado cinque. Grazie a questo possiamo calcolare gli invarianti di  $X$ :

$$\begin{aligned} K_X^2 &= 5K_S^2 = 5, & \text{perché } K_X &= \pi^*K_S; \\ \chi(\mathcal{O}_X) &= 5\chi(\mathcal{O}_S) = 5, & \text{per il Lemma vi.3 in [6];} \\ q(X) &= 0, & \text{per il Lemma 2.1.2;} \\ p_g(X) &= 4, & \text{da } \chi(\mathcal{O}_X) &= 1 - q(X) + p_g(X). \end{aligned}$$

Inoltre, poiché  $K_X = \pi^*K_S$ ,  $K_X$  è nef e big, quindi  $X$  è minimale. Quindi,  $X$  ricade ancora tra le superfici di Horikawa, dato che  $K_X^2 = 2p_g(X) - 3$ . Per il Teorema 1 in [17], abbiamo due possibilità:

- il sistema lineare  $|K_X|$  ha un unico punto base;

- $|K_X|$  è libero e la mappa indotta  $\varphi_{|K_X|}$  è un morfismo birazionale su un'ipersuperficie quintica di  $\mathbb{P}^3$  con al più punti doppi razionali.

Il primo caso non può accadere: poiché  $K_X$  è invariante per l'azione di  $\mathbb{Z}_5$ , se  $|K_X|$  avesse un unico punto fisso questo dovrebbe essere fisso anche per l'azione, che però è libera.  $\square$

**2.2.2 PROPOSIZIONE.** *Siano  $X \subseteq \mathbb{P}^3$  un'ipersuperficie quintica con al più punti doppi razionali e  $\rho: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \text{Aut}(X)$ , con  $\rho_i := \rho(i)$  un'azione libera; posto  $G := \rho(\mathbb{Z}_5)$ , la risoluzione minimale delle singolarità di  $R := X/G$  è una superficie di Godeaux  $S$  con  $\pi_1^{\text{alg}}(S) \cong \mathbb{Z}_5$ .*

*Dimostrazione.* Nonostante questa proposizione valga anche per  $X$  singolare, per semplicità dimostreremo solo il caso in cui  $X$  è liscia; in questo caso,  $R$  è liscia e quindi uguale a  $S$ ; inoltre possiamo calcolare con facilità gli invarianti di  $X$ :

$$\begin{aligned} K_X &\cong \mathcal{O}_X(1), && \text{per la Proposizione 1.1.1,} \\ &&& \text{(cioè } X \text{ è immersa in } \mathbb{P}^3 \text{ tramite il canonico);} \\ q(X) &= 0, && \text{per la Proposizione 1.1.2;} \\ K_X^2 &= 5, && \text{perché } 5 \text{ è il grado dell'immersione;} \\ p_g(X) &= 4, && \text{perché l'immersione è in } \mathbb{P}^3; \end{aligned}$$

inoltre, per la Proposizione 1.1.4,  $X$  è semplicemente connessa, cioè  $X$  è il rivestimento universale di  $S$  e in particolare  $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}_5$ . Essendo un gruppo finito,  $\pi_1(S)$  è isomorfo al suo completamento profinito,  $\pi_1^{\text{alg}}(S)$ , che quindi è ancora isomorfo a  $\mathbb{Z}_5$ . Gli invarianti di  $S$  sono:

$$\begin{aligned} K_S^2 &= 1/5 K_X^2 = 1 && \text{e} \\ \chi(\mathcal{O}_S) &= 1/5 \chi(\mathcal{O}_X) = 1, && \text{per il Lemma VI.3 in [6];} \\ q(S) &= 0, && \text{perché } q(X) = 0; \\ p_g(S) &= 0, && \text{da } \chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(X) + p_g(X); \end{aligned}$$

$S$  è di tipo generale perché il canonico è nef e big, infatti

$$K_S \cdot C = 1/5 K_X \cdot \pi^* C \geq 0$$

per ogni curva irriducibile  $C \subseteq S$  e  $K_S^2 = 1 > 0$ ; inoltre è minimale: una  $(-1)$ -curva intersecherebbe  $K_S$  in  $-1$ , ma  $K_S$  è nef. Quindi  $S$  è una superficie liscia, minimale, di tipo generale, con  $K_S^2 = 1$  e  $p_g(S) = 0 = q(S)$ , cioè è una superficie di Godeaux; inoltre,  $\pi_1^{\text{alg}}(S) \cong \mathbb{Z}_5$ .  $\square$

Siano  $X$  una quintica di  $\mathbb{P}^3$  con al più punti doppi razionali e  $\rho: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \text{Aut}(X)$  con  $\rho_i := \rho(i)$  un'azione libera. Per le due proposizioni appena dimostrate, la risoluzione minimale delle singolarità

del quoziente di  $X$  rispetto a  $\rho$  è una superficie di Godeaux, e tutte le superfici di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_5$  si ottengono in questo modo.

Per la Proposizione 1.2.1,  $\rho$  induce un'azione canonica (che chiameremo ancora  $\rho$ ) di  $\mathbb{Z}_5$  su  $\mathbb{P}^3$ , tale che la restrizione a  $X$  è l'azione di partenza. Nella dimostrazione di quella proposizione, abbiamo visto anche che questa azione proveniva in realtà da una rappresentazione  $\rho^*$  di  $\mathbb{Z}_5$  su  $H^0(X, K_X)$ ; essendo  $\mathbb{Z}_5$  un gruppo abeliano finito, ogni sua rappresentazione si decompone come somma di rappresentazioni irriducibili di dimensione uno, cioè possiamo scrivere

$$H^0(X, K_X) \cong Z_{i_1} \oplus Z_{i_2} \oplus Z_{i_3} \oplus Z_{i_4}$$

come rappresentazioni, dove, fissata una radice quinta primitiva dell'unità  $\zeta$ ,  $Z_i$  è la rappresentazione su cui  $1 \in \mathbb{Z}_5$  agisce come la moltiplicazione per  $\zeta^i$ . Quindi, a meno di cambiare base, l'azione è diagonale, e  $\rho_1^* = \text{diag}(\zeta^{i_1}, \zeta^{i_2}, \zeta^{i_3}, \zeta^{i_4})$ . Inoltre, gli  $i_j$  devono essere tutti distinti: se ce ne fossero due uguali, allora l'azione fisserebbe un piano di  $H^0(X, K_X)$ , cioè una retta di  $\mathbb{P}^3$ , ma questo è impossibile perché allora i punti d'intersezione della retta con  $X$  sarebbero fissi per l'azione  $\rho$ .

Potremmo dimostrare anche che gli esponenti sono tutti non nulli (cioè, la rappresentazione è somma di tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di  $\mathbb{Z}_5$  non banali), ma questo non è necessario, dato che a meno di permutare la base e prendere un multiplo della matrice in  $\mathbb{PGL}(4)$ , l'azione  $\rho$  di  $\mathbb{Z}_5$  in  $\mathbb{P}^3$  è diagonale e definita da  $\rho_1 = \text{diag}(\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4)$ .

Questo significa che tutte le superfici di Godeaux sono birazionali al quoziente di una quintica di  $\mathbb{P}^3$  con al più punti doppi razionali per un'azione fissata. Dobbiamo solo determinare tutte le quintiche  $X$  di questo tipo per cui l'azione su  $\mathbb{P}^3$  si restringe a un'azione libera, cioè quelle fissate da  $\rho$  e non passanti per i suoi punti fissi.

**L'AZIONE È LIBERA** se  $X$  non passa per i punti fissi di  $\rho$ , che sono solo i punti coordinati; perciò, il polinomio  $f$  che definisce  $X$  non può annullarsi in questi punti, il che significa che i coefficienti di  $x_i^5$  sono non nulli per ogni  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . A meno di riscalarle le coordinate, possiamo supporre che questi coefficienti siano unitari.

**LA QUINTICA È INVARIANTE** se  $f$  lo è, a meno di una costante, per l'applicazione di  $\rho_1$  (è sufficiente controllarlo per  $\rho_1$  dato che  $\mathbb{Z}_5$  è ciclico); poiché abbiamo visto che  $x_i^5$  compare in  $f$  con un coefficiente unitario che viene preservato dall'applicazione di



$\rho_1$ , è necessario che ogni monomio con coefficiente non nullo sia invariante. Abbiamo

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4} \xrightarrow{\rho_1} \zeta^{i_1+2i_2+3i_3+4i_4} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4},$$

quindi perché la quintica sia invariante è necessario e sufficiente che i monomi che compaiono in  $f$  siano quelli di *peso* nullo modulo 5, dove per peso di un monomio  $\prod_{j=1}^4 x_j^{i_j}$  intendiamo il numero  $\sum_{j=1}^4 j i_j$ . I monomi di quinto grado e peso multiplo di 5 sono 12:

$$\begin{array}{cccc} x_1^5, & x_2^5, & x_3^5, & x_4^5, \\ x_2 x_3^3 x_4, & x_1^3 x_3 x_4, & x_1 x_2 x_4^3, & x_1 x_2^3 x_3, \\ x_2^2 x_3 x_4^2, & x_1 x_3^2 x_4^2, & x_1^2 x_2^2 x_4, & x_1^2 x_2 x_3^2, \end{array}$$

quindi  $f$  deve essere combinazione lineare di questi monomi con i coefficienti dei primi quattro unitari.

Otteniamo quindi il seguente teorema di costruzione delle superfici di Godeaux con torsione di ordine cinque.

**2.2.3 TEOREMA.** *Tutte e sole le superfici di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_5$  si ottengono come risoluzioni minimali delle singolarità del quoziente per l'azione di  $\mathbb{Z}_5$  definita da  $\rho_1 := \text{diag}(\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4)$  di una ipersuperficie quintica  $X \subseteq \mathbb{P}^3$ , definita dal polinomio*

$$\begin{aligned} f := & x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + \\ & + b_1 x_2 x_3^3 x_4 + b_2 x_1^3 x_3 x_4 + b_3 x_1 x_2 x_4^3 + b_4 x_1 x_2^3 x_3 + \\ & + c_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + c_2 x_1 x_3^2 x_4^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_4 + c_4 x_1^2 x_2 x_3^2 \end{aligned}$$

e con al più punti doppi razionali.

La quintica generica di questa famiglia è liscia per il teorema di Bertini; d'altra parte, equazioni diverse potrebbero dare superfici isomorfe. In effetti abbiamo il seguente teorema che descrive lo spazio dei moduli delle superfici di Godeaux con gruppo fondamentale isomorfo a  $\mathbb{Z}_5$ .

**2.2.4 TEOREMA.** *Lo spazio dei moduli  $\mathfrak{M}_5$  delle superfici di Godeaux con gruppo fondamentale isomorfo a  $\mathbb{Z}_5$  è il quoziente di un aperto  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5 \subseteq \mathbb{A}^8$  per l'azione di un sottogruppo finito  $T \leq \mathbb{PGL}(4)$ , generato dalle matri-*

ci  $\text{diag}(1, \zeta^{i_2}, \zeta^{i_3}, \zeta^{i_4})$  e  $M_{\bar{k}}$  per  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , dove  $M_{\sigma}$  è la matrice di permutazione relativa a  $\sigma$  e

$$\begin{aligned}\bar{1} &:= \text{Id}, \\ \bar{2} &:= (2, 1, 3, 4), \\ \bar{3} &:= (1, 2, 4, 3), \\ \bar{4} &:= (1, 4)(3, 2).\end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Se  $\psi: S_1 \rightarrow S_2$  è un isomorfismo tra due superfici di Godeaux con torsione di ordine 5, provenienti dalle superfici quintiche  $X_1$  e  $X_2$ , allora per la Proposizione 1.3.2 (dato che  $\pi_1(X_1)$  e  $\pi_1(X_2)$  sono banali), esiste un isomorfismo  $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$  che passa al quoziente.

Assumendo per semplicità che  $X_1$  e  $X_2$  siano lisce, entrambe sono immerse canonicamente in  $\mathbb{P}^3$ . Allora, possiamo estendere  $\varphi$  a un automorfismo di  $\mathbb{P}^3$  che chiameremo ancora  $\varphi$ ; inoltre, dato che l'azione è fissata, il passaggio al quoziente di questo isomorfismo non dipende né dall'equazione di  $X_1$  né da quella di  $X_2$ .

Abbiamo già visto che i punti fissi di  $\rho$  sono i punti coordinati  $e_i$ ; se  $\varphi$  è un automorfismo di  $\mathbb{P}^3$  che passa al quoziente, deve permutare le orbite, e in particolare i punti fissi. Questo significa che la matrice di  $\text{PGL}(4)$  che rappresenta  $\varphi$  è la permutazione di una matrice diagonale, cioè possiamo scrivere  $\varphi = \sigma d$ , dove  $\sigma$  permuta le coordinate mentre  $d$  le riscalda.

Poiché  $\varphi$  è permutazione di una matrice diagonale, deve fissare la parte  $\sum_{i=1}^4 x_i^5$  del polinomio che definisce  $X_1$ ; questo implica che se si normalizza uno dei quattro coefficienti non nulli della matrice di  $\varphi$  a 1, gli altri possono essere solo radici quinte dell'unità. Non tutte le permutazioni passano al quoziente: per la Proposizione 1.3.3, deve esistere  $h \in \mathbb{Z}_5^*$  tale che  $\rho_h \varphi = \varphi \rho_1$  e poiché  $d$  commuta con tutte le matrici diagonali,  $\varphi$  passa al quoziente se e solo se esiste  $h$  tale che  $\rho_h = \sigma \rho_1 \sigma^{-1}$ . La matrice di  $\rho_h$  è

$$\text{diag}(\zeta^h, \zeta^{2h}, \zeta^{3h}, \zeta^{4h}),$$

mentre quella di  $\sigma \rho_1 \sigma^{-1}$  è

$$\text{diag}(\zeta^{\sigma^{-1}(1)}, \zeta^{\sigma^{-1}(2)}, \zeta^{\sigma^{-1}(3)}, \zeta^{\sigma^{-1}(4)});$$

perché definiscano la stessa proiettività, devono essere uguali a meno di un coefficiente moltiplicativo  $\lambda \neq 0$ ; osserviamo però che nelle due matrici gli elementi diagonali sono tutte e sole le radici quinte primitive dell'unità, quindi  $\lambda$  deve essere a sua volta una radice quinta dell'unità; inoltre dev'essere proprio 1, altrimenti comparirebbe un 1 che nell'altra matrice non c'è. Allora le sole permutazioni che possiamo

avere sono quelle con  $\sigma^{-1}(i) \equiv ih$  per un  $h$  fissato, che si verificano essere quelle dell'enunciato; osserviamo che gli automorfismi  $\varphi$  che sono permutazione secondo  $\bar{h}$  di una matrice diagonale sono quelli che soddisfano  $\rho_h \varphi = \varphi \rho_1$ .

Infine, il sottogruppo delle matrici diagonali con radici quinte dell'unità sulla diagonale e quello delle matrici che sono permutazione mediante  $\bar{k}$  dell'identità generano  $T$  come prodotto semidiretto, in quanto il primo è normale in  $T$  e interseca il secondo solo nella matrice identità.  $\square$

### 2.3 SUPERFICI CON TORSIONE DI ORDINE 4

Le superfici di Godeaux con torsione di ordine 4 (cioè, quelle con gruppo fondamentale algebrico isomorfo a  $\mathbb{Z}_4$ , dato che per il Teorema 2.1.8 non può essere isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ) sono in corrispondenza con le intersezioni complete di due quadriche (di cui specificheremo le possibili equazioni) nel cono  $V'$  di dimensione quattro sulla superficie di Veronese (l'immersione di  $\mathbb{P}^2$  in  $\mathbb{P}^5$  mediante il sistema lineare  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|$ ), con al più punti doppi razionali. La corrispondenza associa a una superficie di Godeaux con gruppo fondamentale algebrico  $\mathbb{Z}_4$  il modello bicanonico del suo rivestimento relativo a un divisore di ordine quattro, mentre a una varietà come quelle descritte in precedenza associa la risoluzione delle singolarità del quoziente rispetto a un'azione libera e fissata di  $\mathbb{Z}_4$ . Dimostreremo questa corrispondenza solo nel caso che l'immagine bicanonica sia liscia.

Prima di affrontare le dimostrazioni, osserviamo che  $V'$  è singolare lungo tutto il vertice. Dato che dalle dimostrazioni seguirà che l'immagine bicanonica del rivestimento non interseca il vertice di questo cono, sarà molto comodo considerare una risoluzione  $V \rightarrow V'$ , dato che questa mappa sarà un isomorfismo sopra l'immagine bicanonica. Per costruire questa risoluzione, consideriamo il fascio localmente libero

$$\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$$

su  $\mathbb{P}^2$ ; il corrispondente fibrato proiettivo  $V := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{E})$  è una varietà di dimensione quattro con un morfismo di proiezione  $p: V \rightarrow \mathbb{P}^2$ ; su  $V$  possiamo prendere due fasci invertibili:

$$\begin{aligned} M &:= \mathcal{O}_V(1), & \text{il fascio tautologico, con } p_*M &= \mathcal{E}, \text{ e} \\ L &:= p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1). \end{aligned}$$

Possiamo denotare con  $t_0, t_1, t_2$  le coordinate su  $\mathbb{P}^2$  e, almeno localmente, con  $r_0, r_1, r_2$  quelle sulla fibra;  $L$  è descritto da un'equazione lineare nelle  $t_i$ , mentre  $M$  da una del tipo  $\lambda_0 r_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 0$ , dove

$\lambda_0$  e  $\lambda_1$ , corrispondendo ai fasci  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ , sono costanti, mentre  $\lambda_2$ , corrispondendo al fascio  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$  è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle  $t_i$ . Inoltre, se denotiamo con  $B$  il divisore dato da  $r_2 = 0$  e osserviamo che il divisore descritto da  $t_0^2 r_0 = 0$  appartiene alla classe di  $M$ , è evidente che sussiste la relazione  $M = B + 2L$ .

Questa descrizione implica che la mappa  $\varphi_{|M|}$  manda  $V$  in  $\mathbb{P}^7$ ; l'immagine di un punto di  $V$  secondo  $\varphi_{|M|}$  si ottiene sostituendo il punto nell'equazione generica di  $M$  e prendendo i coefficienti di  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_{2,i,j}$ , cioè

$$[r_0, r_1, r_2 t_0^2, r_2 t_1^2, r_2 t_2^2, r_2 t_1 t_2, r_2 t_0 t_2, r_2 t_0 t_1].$$

Gli ultimi sei coefficienti soddisfano le equazioni della superficie di Veronese in  $\mathbb{P}^5$ , quindi l'immagine di  $\varphi_{|M|}$  è contenuta nel cono sulla Veronese,  $V' \subseteq \mathbb{P}^7$ . Inoltre, se  $r_2 \neq 0$ ,  $\varphi_{|M|}$  è uno a uno, invece manda la sottovarietà  $B$  (descritta da  $r_2 = 0$ ) sulla retta data dall'annullarsi degli ultimi sei coefficienti, che non è altro che il vertice di  $V'$ .

Possiamo calcolare il canonico di  $V$  tramite la seguente formula, valida per i fibrati proiettivi:

$$K_V = -(\dim F + 1)M + p^*(\det \mathcal{E} + K_{\mathbb{P}^2}),$$

dove  $F$  è la fibra di  $p$ ,  $\mathbb{P}^2$  è la base del fibrato e  $V$  è lo spazio totale. Dato che  $\det \mathcal{E} = \wedge^3 \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ , la formula dà

$$K_V = -3M + (2L - 3L) = -3M - L.$$

Dimostriamo anche il seguente lemma riguardo la coomologia su un fibrato proiettivo.

**2.3.1 LEMMA.** *Sia  $p: \mathbb{P}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^N$  un fibrato proiettivo, con  $\mathcal{E}$  un fascio localmente libero su  $\mathbb{P}^N$  di rango  $r$ ; siano inoltre  $M := \mathcal{O}_V(1)$  il fascio tautologico su  $V := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^N}(\mathcal{E})$  e  $L := p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ . Allora, per ogni  $k > -r$ , per ogni  $j \in \mathbb{Z}$  e per ogni  $i \in \mathbb{N}$ ,*

$$H^i(V, k(M + jL)) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0, \\ H^i(\mathbb{P}^N, \text{Sym}^k(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(j))) & \text{se } k \geq 0. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Useremo i seguenti fatti:

- A. poiché  $p$  è la proiezione da un fibrato proiettivo al suo spazio base, se  $k > r$  allora  $H^i(V, \mathcal{O}_V(k)) \cong H^i(\mathbb{P}^N, p_* \mathcal{O}_V(k))$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  (vedi [16], Sezione III.8);

b. per la Proposizione II.7.11 in [16],

$$p_*\mathcal{O}_V(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0, \\ \text{Sym}^k \mathcal{E} & \text{se } k \geq 0. \end{cases}$$

Sia  $p': \mathbb{P}_{\mathbb{P}^N}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(j)) \rightarrow \mathbb{P}^N$ ; dato che stiamo tensorizzando per un fascio invertibile, il fibrato che si ottiene è isomorfo a  $V$ , e ha fascio tautologico uguale a  $M + jL$ ; applicando i due fatti a  $p'$  otteniamo la tesi.  $\square$

Proseguiamo nella dimostrazione della corrispondenza con un altro lemma.

**2.3.2 LEMMA.** *Siano  $X$  una superficie liscia,  $\varphi: X \dashrightarrow X'$  una mappa razionale definita intrinsecamente e due a uno su una superficie razionale; se  $G$  è un gruppo che agisce liberamente su  $X$ , allora  $G \cong \mathbb{Z}_2^r$  per qualche  $r \geq 0$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $\varphi$  è definita intrinsecamente, i punti in cui non è definita sono invarianti per l'azione di  $G$ ; possiamo allora scoppiare simultaneamente questi punti, ottenendo una superficie su cui  $G$  agisce ancora. Grazie a ciò, possiamo assumere che  $\varphi$  sia un morfismo.

Ora,  $G$  agisce anche su  $X'$ , tramite l'intrinseco morfismo  $\varphi$ ; vorremmo sfruttare il fatto che un automorfismo di una superficie razionale liscia ha almeno un punto fisso, ma  $X'$  potrebbe essere anche singolare. Per continuare la dimostrazione, dobbiamo sostituire  $X'$  con una superficie razionale liscia.

Siano  $\vartheta: X \rightarrow X$  l'involuzione determinata da  $\varphi$  e  $\pi: X \rightarrow W$  la proiezione, dove  $W := X/\langle \vartheta \rangle$ ; per costruzione,  $\varphi$  fattorizza per  $\pi$  e dato che entrambe sono due a uno,  $X'$  e  $W$  sono birazionali, cioè  $W$  è razionale. Ora,  $W$  è il quoziente di una superficie liscia per un'involuzione; non è detto che sia liscia, dato che  $\vartheta$  potrebbe avere punti fissi. Un punto fisso  $p$  di  $\vartheta$  può avere due comportamenti: localmente,  $\vartheta$  può mandare una coppia di parametri locali  $(x, y)$  in  $(x, -y)$  o in  $(-x, -y)$ . Nel primo caso,  $p$  appartiene a una curva di punti fissi liscia in  $p$ , descritta da  $y = 0$ : il quoziente rimane liscio in  $p$ . Nel secondo caso invece si crea una singolarità, tuttavia si può risolverla scoppiando un'unica volta su  $X$ ; andiamo a dimostrare che la curva eccezionale diventa una curva di punti fissi di  $\vartheta$  che non dà singolarità su  $W$ . Prendendo intorno al punto  $(p, \infty)$  della curva eccezionale le coordinate  $(x', y')$ , con  $x' = x$  e  $y' = y/x$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \vartheta(x') &= -x', \\ \vartheta(y') &= y', \end{aligned}$$

cioè abbiamo risolto la singolarità, ritornando al primo caso.

Quindi, a meno di scoppiare ulteriormente  $X$ , possiamo supporre che  $W$  sia una superficie liscia, razionale e, in particolare, con la proprietà che ogni suo automorfismo ha un punto fisso. Come detto,  $G$  agisce anche su  $W$ ; di conseguenza, per ogni  $g \in G \setminus \{e\}$ , esiste un punto  $\pi(x_g) \in W$  tale che  $g\pi(x_g) = \pi(x_g)$ . Per costruzione,  $g\pi(x_g) = \pi(gx_g)$ , da cui  $\pi(x_g) = \pi(gx_g)$ , cioè  $gx_g = x_g$  o  $gx_g = \vartheta(x_g)$ ; ma dato che  $g$  non ha punti fissi su  $X$ , la prima possibilità non può accadere e di conseguenza  $gx_g = \vartheta(x_g)$ . Lo stesso argomento permette di dire che  $g\vartheta(x_g) = x_g$ ; allora,

$$g^2x_g = g\vartheta(x_g) = x_g$$

$g^2$  ha un punto fisso su  $X$ , quindi deve essere l'identità perché per ipotesi l'azione di  $G$  su  $X$  è libera per ipotesi.  $\square$

**2.3.3 PROPOSIZIONE.** *Sia  $S$  una superficie di Godeaux con torsione di ordine quattro; allora  $S$  è la risoluzione minimale delle singolarità del quoziente per un'azione libera di  $\mathbb{Z}_4$  di una varietà  $X' \subseteq \mathbb{P}^7$ , dove  $X'$  è l'intersezione completa di due quadriche della forma*

$$(2.1) \quad \begin{aligned} q_0 &= a_1x_{1,1}^2 + a_2x_{2,2}^2 + a_3x_{3,3}^2 + a_{1,3}x_{1,3}^2 + a_{1,2,3}x_{1,3}x_{2,2} + \\ &\quad + b_{1,3}y_1y_3 + b_{1,2}y_1x_{1,2} + b_{2,3}y_3x_{2,3}, \\ q_2 &= c_{1,3}x_{1,1}x_{1,3} + c_{3,1}x_{1,3}x_{3,3} + c_{1,2}x_{1,2}^2 + c_{2,3}x_{2,3}^2 + \\ &\quad + d_1y_1^2 + d_3y_3^2 + d_{2,3}y_1x_{2,3} + d_{1,2}y_3x_{1,2}; \end{aligned}$$

sul cono  $V'$ . Inoltre,  $X'$  può avere al più punti doppi razionali e non interseca il vertice di  $V'$  (cioè,  $b_{1,3}$ ,  $d_1$  e  $d_3$  sono non nulli).

*Dimostrazione.* Siano  $D \in \text{Pic}(S)$  di ordine quattro e  $\pi: X \rightarrow S$  il rivestimento associato, étale, di Galois, di quarto grado. Per il Lemma 2.1.6 e perché  $p_g(S) = 0$ , abbiamo

$$h^0(S, K_S + iD) = \begin{cases} 0 & \text{per } i = 0, \\ 1 & \text{per } i \neq 0; \end{cases}$$

sia quindi  $x_i$  una sezione non nulla di  $h^0(S, K_S + iD)$  per ogni  $i \neq 0$ . Sempre per il Lemma 2.1.6, otteniamo  $h^0(S, 2K_S + iD) = 2$  per ogni  $i$ ; a partire dagli  $x_i$  otteniamo sei sezioni:

$$\begin{aligned} x_2^2, x_1x_3 &\in H^0(S, 2K_S), \\ x_2x_3 &\in H^0(S, 2K_S + D), \\ x_1^2, x_3^2 &\in H^0(S, 2K_S + 2D), \\ x_1x_2 &\in H^0(S, 2K_S + 3D). \end{aligned}$$

Dove ne compaiono due, queste sono linearmente indipendenti: per esempio, una relazione del tipo  $ax_2^2 + bx_1x_3 = 0$  implica che il divisore degli zeri della sezione  $x_2^2$  è uguale a quello della sezione  $x_1x_3$ ; se denotiamo con  $D_i$  il divisore degli zeri di  $x_i$ ,  $2D_2 = D_1 + D_3$ , ma allora deve esserci almeno una componente comune tra  $D_1$  e  $D_2$  o tra  $D_3$  e  $D_2$ . Questo però è in contraddizione con il Lemma 2.1.7, dato che  $D_i$  è numericamente equivalente a  $K_S$ . Si possono quindi scegliere  $y_1 \in H^0(S, 2K_S + D)$  e  $y_3 \in H^0(S, 2K_S + 3D)$  in modo da avere delle basi per ogni  $H^0(2K_S + iD)$ .

Ora,  $h^0(S, 4K_S + iD) = 7$  per ogni  $i$ ; moltiplicando tra loro le sezioni di grado due otteniamo sette monomi distinti in  $H^0(S, 4K_S + iD)$  per  $i \in \{1, 3\}$ , mentre ne otteniamo otto per  $i \in \{0, 2\}$ . Questo significa che tra i monomi nelle  $x_j$  e nelle  $y_j$  sussistono due relazioni di quarto grado (se si pone  $\deg y_j = 2$ ). In particolare, scrivendo i monomi in  $H^0(S, 4K_S + iD)$ , le due relazioni risultano del tipo

$$\begin{aligned} q_0 &= a_1x_1^4 + a_2x_2^4 + a_3x_3^4 + a_{1,3}x_1^2x_3^2 + a_{1,2,3}x_1x_2^2x_3 + \\ &\quad + b_{1,3}y_1y_3 + b_{1,2}y_1x_1x_2 + b_{2,3}y_3x_2x_3, \\ q_2 &= c_{1,3}x_1^3x_3 + c_{3,1}x_1x_3^3 + c_{1,2}x_1^2x_2^2 + c_{2,3}x_2^2x_3^2 + \\ &\quad + d_1y_1^2 + d_3y_3^2 + d_{2,3}y_1x_2x_3 + d_{1,2}y_3x_1x_2. \end{aligned}$$

Consideriamo  $X$ : per costruzione,  $H^0(X, nK_X)$  è generato dai pullback delle sezioni (che chiameremo con gli stessi nomi) di tutti gli  $H^0(S, nK_S + iD)$  al variare di  $i$  in  $\mathbb{Z}_4$ ; inoltre, ancora per il Lemma 2.1.7, i pullback di due sezioni linearmente indipendenti su  $S$  non possono avere zeri comuni (e quindi neppure essere dipendenti) in  $H^0(X, nK_X)$ . Gli altri invarianti sono:

$$\begin{aligned} K_X^2 &= 4K_S^2 = 4, & \text{perché } K_X &= \pi^*K_S; \\ \chi(\mathcal{O}_X) &= 4\chi(\mathcal{O}_S) = 4, & \text{per il Lemma VI.3 in [6];} \\ q(X) &= 0 & \text{per il Lemma 2.1.2,} \\ p_g(X) &= 3 & \text{da } \chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X). \end{aligned}$$

Inoltre,  $X$  è minimale perché  $K_X = \pi^*K_S$  è nef e big.

Consideriamo la mappa bicanonica  $\varphi_{|2K_X|}: X \dashrightarrow X' \subseteq \mathbb{P}^7$ , dove su  $\mathbb{P}^7$  denotiamo la coordinata relativa a  $x_i x_j$  con  $x_{i,j}$  e con  $y_i$  quella relativa a  $y_i$ . La mappa bicanonica in realtà è un morfismo: il sistema lineare  $|2K_X|$  non può avere punti base poiché i pullback delle sezioni di  $H^0(S, 2K_S + iD)$  non hanno zeri comuni. Poiché  $H^0(X, 2K_X)$  contiene  $\text{Sym}^2(H^0(X, K_X))$ ,  $X'$  è contenuta in  $V'$ , il cono di dimensione quattro sulla superficie di Veronese, e più precisamente nella varietà tagliata da due quadriche su di essa, dato che le relazioni  $q_0$  e  $q_2$  scritte sulle sezioni bicanoniche assumono la forma vista in (2.1). Osserviamo che nel sostituire prodotti di sezioni canoniche con sezioni bicanoniche

dobbiamo fare una scelta (almeno di nomenclatura): per esempio, si può sostituire  $x_1x_2^2x_3$  con  $x_{1,2}x_{2,3}$  o con  $x_{1,3}x_{2,2}$ . Precisamente, questa scelta viene dal fatto che due quadriche tagliano la stessa sottovarietà di  $V'$  se e solo se differiscono per una combinazione lineare delle equazioni che definiscono la superficie di Veronese:

$$\begin{aligned} 0 &= x_{2,2}x_{3,3} - x_{2,3}^2, \\ 0 &= x_{1,2}x_{3,3} - x_{1,3}x_{2,3}, \\ 0 &= x_{1,2}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,2}, \\ 0 &= x_{1,1}x_{3,3} - x_{1,3}^2, \\ 0 &= x_{1,1}x_{2,3} - x_{1,2}x_{1,3}, \\ 0 &= x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}^2. \end{aligned}$$

In realtà, se si considera come spazio ambiente  $V'$ , questa non è una scelta: entrambe le due possibilità si restringono alla stessa sezione di  $|\mathcal{O}_{V'}(2)|$ . In ogni caso, per poter scrivere univocamente questi polinomi, fissiamo un sottospazio lineare  $W$  di  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(2)|$ , che sia isomorfo (tramite la restrizione) a  $|\mathcal{O}_{V'}(2)|$ . Proprio perché  $\text{Sym}^2(H^0(X, K_X))$  è contenuto canonicamente in  $H^0(X, 2K_X)$ , se  $\psi$  è una mappa definita canonicamente,  $\psi^*$  manderà  $W$  in sé.

Osserviamo inoltre che  $X'$  non interseca il vertice di  $V'$ : il vertice corrisponde all'annullarsi di tutte le sezioni nelle  $x_i$ , quindi un punto  $p \in X$  mandato nel vertice dovrebbe soddisfare  $x_1(p) = x_2(p) = x_3(p) = 0$  e abbiamo già mostrato che questo non può accadere. In particolare, questo significa che i coefficienti  $b_{1,3}$ ,  $d_1$  e  $d_3$  sono non nulli e che possiamo considerare  $X'$  dentro la desingularizzazione  $V$ , dato che  $V$  e  $V'$  sono isomorfe fuori dal vertice.

Rimangono da dimostrare tre cose: che  $\varphi|_{2K_X}$  è birazionale, che  $X'$  ha al più punti doppi razionali e che l'immagine di  $\varphi|_{2K_X}$  è l'intersezione completa delle due quadriche su  $V'$ .

**LA MAPPA BICANONICA È BIRAZIONALE.** Vogliamo dimostrare che  $\deg \varphi|_{2K_X} = 1$ . Poiché  $K_X^2 = 4$ ,

$$16 = (2K_X)^2 = \deg \varphi|_{2K_X} \cdot \deg X'.$$

D'altra parte,  $X'$  non può essere degenerare in  $\mathbb{P}^7$  perché immagine di una mappa data da un sistema lineare, allora, per il Lemma 1.4 in [5], il suo grado deve essere almeno  $\dim \mathbb{P}^7 - 1 = 6$ ; rimane quindi una sola possibilità da escludere, cioè che  $\varphi|_{2K_X}$  sia una mappa due a uno su una superficie di ottavo grado. Se per assurdo  $\deg X' = 8$ , ancora per il Lemma 1.4 in [5],  $X'$  è rigata, avendo grado minore o uguale a  $2 \dim \mathbb{P}^7 - 2$ ; inoltre, dato che  $X'$  è dominata da  $X$ , una superficie con irregolarità nulla, deve valere anche  $q(X') = 0$ , dato che il pullback di una



1-forma non nulla è ancora una 1-forma non nulla. Per una superficie rigata, l'irregolarità coincide con il genere della curva base, quindi  $X'$  è razionale. Ma per il Lemma 2.3.2, questo non può accadere, dato che abbiamo un'azione libera di  $\mathbb{Z}_4$  su  $X$ .

L'IMMAGINE È INTERSEZIONE COMPLETA delle due quadriche. Dimostriamo innanzitutto che le quadriche non hanno una componente comune. Se per assurdo l'avessero, i polinomi che le definiscono si spezzerebbero in polinomi lineari di cui uno comune; considerando  $q_0$  e  $q_2$  in  $\mathbb{C}[x_{1,1}, x_{3,3}, x_{2,3}, x_{1,3}, x_{1,2}, y_3][y_1]$ , usiamo il fatto che un polinomio è irriducibile in  $A[t]$  se e solo se è primitivo e irriducibile in  $K[t]$ , dove  $A$  è un dominio e  $K$  è il suo campo dei quozienti. Dato che  $q_0$  è di primo grado rispetto a  $y_1$ , se  $q_0$  è riducibile allora non deve essere primitivo; poiché in  $q_0$  il coefficiente di  $y_1$  è di primo grado, questo deve dividere il termine noto; in particolare, nel termine noto il solo coefficiente  $b_{2,3}$  può non annullarsi, cioè

$$q_0 = b_{1,3}y_3y_1 + b_{2,3}y_3x_{2,3} = y_3(b_{1,3}y_1 + b_{2,3}x_{2,3}).$$

Ma  $y_3$  non può dividere  $q_2$  (perché  $d_1 \neq 0$ ), di conseguenza  $b_{1,3}y_1 + b_{2,3}x_{2,3}$  divide  $q_2$ , ma questo è assurdo perché  $d_3 \neq 0$ .

Sappiamo dell'esistenza delle due relazioni quadratiche in  $\mathbb{P}^7$ , tuttavia a priori potrebbero esserci altre relazioni in grado più alto tra le sezioni pluricanoniche;  $X'$  è intersezione completa delle due quadriche se e solo se non esistono ulteriori relazioni oltre le due quadriche e loro combinazioni. Per assurdo, possiamo scrivere  $Q_0 \cap Q_2 \cap V' = X' + R$ , con  $R$  una superficie e  $Q_i$  il luogo degli zeri di  $q_i$ . Per il punto precedente,  $\varphi|_{2K_X}$  è birazionale a una superficie in  $\mathbb{P}^7$  di grado 16, ma anche  $V' \cap Q_0 \cap Q_2$  ha grado 16 (perché possiamo tagliare con due iperpiani ottenendo la superficie di Veronese in  $\mathbb{P}^5$ , di quarto grado, e tagliare ulteriormente con due quadriche). Leggendo tutto su  $V$ , otteniamo  $M \cdot M \cdot (Q_0 \cap Q_2) = 16 = M \cdot M \cdot (X' + R)$ , da cui  $M \cdot M \cdot R = 0$ . Non essendo vista dal divisore che dà l'immersione in  $\mathbb{P}^7$ ,  $R$  deve essere contenuta in  $B$ , ma questo non è possibile perché le quadriche non si intersecano sul vertice di  $V'$ .

L'IMMAGINE HA AL PIÙ PUNTI DOPPI RAZIONALI. Per dimostrarlo, è sufficiente dire che  $\omega_X = \varphi|_{2K_X}\omega_{X'}$ . Consideriamo  $X'$  den-

tro la desingularizzazione  $V$ , allora per il Teorema III.7.11 in [16], dato che  $X'$  è intersezione completa in  $V$ ,

$$\begin{aligned}\omega_{X'} &= \omega_{V|X'} \otimes \bigwedge^2 (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee = (-3M - L)|_{X'} + (2M)|_{X'} = \\ &= (M - L)|_{X'} = (B + L)|_{X'},\end{aligned}$$

dove  $\mathcal{I}$  è il fascio di ideali di  $X'$  in  $V$ . Inoltre,  $B|_{X'} = 0$  perché  $X'$  non interseca il vertice, quindi  $\omega_{X'} = L|_{X'}$ . Allora,

$$\omega_X^2 = \varphi_{|2K_X|}^* \mathcal{O}_{X'}(1) = \varphi_{|2K_X|}^*(2L),$$

cioè  $K_X = \varphi_{|2K_X|}^* L = \varphi_{|2K_X|}^* \omega_{X'}$ . □

**2.3.4 PROPOSIZIONE.** *Sia  $X \subseteq \mathbb{P}^7$  un'ipersuperficie con al più punti doppi razionali, intersezione completa di due quadriche nel cono  $V'$  della forma vista nell'equazione (2.1) e tali che l'intersezione non interseca il vertice di  $V'$ , e sia  $\rho: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut}(X)$  con  $\rho_i := \rho(i)$  un'azione libera; ponendo  $G := \rho(\mathbb{Z}_4)$ , la risoluzione minimale delle singolarità di  $R := X/G$  è una superficie di Godeaux  $S$  con  $\pi_1^{\text{alg}}(S) \cong \mathbb{Z}_4$ .*

*Dimostrazione.* Anche in questa dimostrazione supporremo che  $X$  sia liscia, cioè che  $R = S$ .

Per calcolare gli invarianti di  $X$ , è conveniente vedere questa superficie immersa in  $V$ , che rispetto a  $V'$  ha il pregio di essere liscia. Possiamo farlo dato che per ipotesi  $X$  non interseca il vertice di  $V'$ . Le quadriche di  $V'$  sono linearmente equivalenti a  $2M$ , dato che  $M$  è la sezione iperpiana in  $V'$ , quindi per aggiunzione otteniamo

$$K_X = (K_V + 2M + 2M)|_X = (M - L)|_X = (B + L)|_X;$$

inoltre,  $B|_X = 0$ , dato che  $B$  è la controimmagine del vertice di  $V'$ , che non interseca  $X$ . Quindi,  $K_X = L|_X$ .

Possiamo calcolare gli invarianti di  $X$ : l'autointersezione di  $K_X$  è il numero di punti di  $X$  contenuti in una generica fibra della mappa di proiezione  $p: V \rightarrow \mathbb{P}^2$ , cioè  $K_X^2 = 4$ .

Per calcolare  $\chi(\mathcal{O}_X)$ , consideriamo la successione esatta

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

dove  $\mathcal{I}_X$  è il fascio di ideali di  $X$ ; allora  $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_V) - \chi(\mathcal{I}_X)$ . Per il Lemma 2.3.1,  $\chi(\mathcal{O}_V) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 1$ ; per calcolare  $\chi(\mathcal{I}_X)$  consideriamo un'altra successione, data dal fatto che  $X$  è intersezione completa di due quadriche:

$$(2.3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_V(-4M) \rightarrow \mathcal{O}_V(-2M) \oplus \mathcal{O}_V(-2M) \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow 0.$$

Da questa, abbiamo  $\chi(\mathcal{I}_X) = 2\chi(\mathcal{O}_V(-2M)) - \chi(\mathcal{O}_V(-4M))$ ; usiamo nuovamente il Teorema di annullamento di Kawamata-Viehweg: poiché il fascio tautologico  $M$  è nef e big,  $h^i(V, -kM) = 0$  per ogni  $k > 0$  e  $i < 4$ . Quindi, grazie alla dualità di Serre e al Lemma 2.3.1, abbiamo

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_V(-2M)) &= h^4(V, -2M) = h^0(V, -M - L) = \\ &= h^0(\mathbb{P}^2, 0) = 0, \\ \chi(\mathcal{O}_V(-4M)) &= h^4(V, -4M) = h^0(V, M - L) = \\ &= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)) = 3;\end{aligned}$$

di conseguenza,

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_V) - \chi(\mathcal{I}_X) = 1 - 2\chi(\mathcal{O}_V(-2M)) + \chi(\mathcal{O}_V(-4M)) = 4.$$

Sappiamo che  $p_g(X) = \chi(\mathcal{O}_X) - 1 + q(X) = 3 + q(X) \geq 3$ ; se dimostriamo che  $p_g(X) \leq 3$ , possiamo concludere che  $p_g(X) = 3$  e  $q(X) = 0$ . Tensorizzando per  $\mathcal{O}_V(L)$  la successione esatta (2.2), otteniamo

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_V(L) \rightarrow \mathcal{O}_V(L) \rightarrow K_X \rightarrow 0,$$

dato che  $L|_X \equiv K_X$ . Gli spazi vettoriali che circondano  $H^0(X, K_X)$  nella corrispondente successione esatta lunga sono  $H^0(V, \mathcal{O}_V(L))$  e  $H^1(V, \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_V(L))$ ; il primo ha dimensione tre, dato che  $\mathcal{O}_V(L) = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ ; per il secondo, consideriamo la successione esatta (2.3) tensorizzata per  $\mathcal{O}_V(L)$ . Se riusciamo a dimostrare l'annullamento di  $H^1(V, \mathcal{O}_V(-2M + L))$  e di  $H^2(V, \mathcal{O}_V(-4M + L))$  abbiamo concluso. Ma, grazie alla dualità di Serre e al Lemma 2.3.1, abbiamo

$$\begin{aligned}h^1(V, \mathcal{O}_V(-2M + L)) &= h^3(V, \mathcal{O}_V(-M - 2L)) = \\ &= h^3(\mathbb{P}^2, 0) = 0, \\ h^2(V, \mathcal{O}_V(-4M + L)) &= h^2(V, \mathcal{O}_V(M - 2L)) = \\ &= h^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)) = \\ &= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)) = 0.\end{aligned}$$

A questo punto, il quoziente di  $X$  tramite  $G$  è una superficie liscia  $S$ , perché abbiamo supposto  $X$  liscia e l'azione è libera, con le proprietà seguenti:

$$\begin{array}{ll}K_S^2 = 1/4K_X^2 = 1 & \text{e} \\ \chi(\mathcal{O}_S) = 1/4\chi(\mathcal{O}_X) = 1, & \text{per il Lemma VI.3 in [6];} \\ q(S) = 0, & \text{perché } q(X) = 0; \\ p_g(S) = 0, & \text{da } \chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(X) + p_g(X);\end{array}$$

inoltre  $K_S$  è nef, perché lo è  $K_X$  e  $K_S \cdot C = K_X \cdot \pi^*C$  (dove  $\pi: X \rightarrow S$  è la proiezione), e  $S$  è minimale, perché  $K_S$  è nef e una  $(-1)$ -curva avrebbe intersezione con  $K_S$  pari a  $-1$ .

Quindi  $S$  è una superficie di Godeaux; ammettendo un rivestimento étale, di Galois, di ordine quattro,  $\pi_1^{\text{alg}}(S)$  contiene un sottogruppo di quattro elementi; per il Teorema 2.1.4,  $\pi_1^{\text{alg}}(S)$  ha meno di sei elementi e quindi può essere solo  $\mathbb{Z}_4$  o  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , e quest'ultimo caso è stato escluso con il Teorema 2.1.8.  $\square$

Sia  $S$  una superficie di Godeaux con  $\pi_1^{\text{alg}}(S) \cong \mathbb{Z}_4$ ; per le proposizioni appena dimostrate, il rivestimento relativo a un divisore di ordine quattro è una risoluzione delle singolarità, tramite la mappa bicanonica, dell'intersezione completa di due quadriche in  $\mathbb{P}^7$  con  $V'$ , non intersecante il vertice del cono.

Osserviamo che possiamo considerare i termini  $\delta_{2,3}y_1x_{2,3}$  e  $\delta_{1,2}y_3x_{1,2}$  come i doppi prodotti relativi ai quadrati dei binomi  $y_1 + 1/2\delta_{2,3}x_{2,3}$  e  $y_3 + 1/2\delta_{1,2}x_{1,2}$ ; scegliendo  $y_i$  in tal modo, si possono subito eliminare due monomi dall'equazione  $q_2$ .

Per costruzione, su  $X$  agisce  $\mathbb{Z}_4$  con l'azione  $\rho: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut}(X)$  con  $\rho_i := \rho(i)$ , ma per la Proposizione 1.2.1,  $\rho$  si estende a un'azione su  $\mathbb{P}^7$ , lo spazio ambiente dell'immagine bicanonica di  $X$ . In realtà,  $\mathbb{Z}_4$  agisce su ogni spazio vettoriale  $H^0(X, nK_X)$ , com'è facile vedere dalla dimostrazione della stessa proposizione. Dato che  $\mathbb{Z}_4$  è un gruppo abeliano,  $H^0(X, nK_X)$  si decompone in sottospazi di dimensione unitaria come rappresentazione di  $\mathbb{Z}_4$ , cioè come somma diretta di copie delle rappresentazioni  $Z_i$  per  $i \in \mathbb{Z}_4$ , dove  $Z_i$  è la rappresentazione su cui  $1 \in \mathbb{Z}_4$  agisce come la moltiplicazione per  $\zeta^i$ , dove  $\zeta$  è una fissata radice quarta primitiva dell'unità.

In realtà, la suddivisione in sottorappresentazioni irriducibili proviene da  $S$ : se  $x \in H^0(S, nK_S + iD)$  (dove  $D$  è un fissato divisore che genera la torsione di  $S$ ), allora il pullback di  $x$  genera una rappresentazione di dimensione unitaria isomorfa a  $Z_i$ , per come è costruito il rivestimento relativo a  $D$ . Cioè,  $\langle x_i \rangle$  è isomorfa come  $\mathbb{Z}_4$ -modulo a  $Z_i$ , per  $i \in \{1, 2, 3\}$  e allo stesso modo agisce come  $Z_i$  su  $y_i$  per  $i \in \{1, 3\}$ . Ma allora,

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} y_1^{j_1} y_3^{j_3} \xrightarrow{\rho_1} \zeta^{i_1+2i_2+3i_3+j_1+3j_3} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} y_1^{j_1} y_3^{j_3}.$$

Questa caratterizzazione permette di fissare l'azione  $\rho$  su  $\mathbb{P}^7$ : l'automorfismo  $\rho_1$  sarà rappresentato sulla base

$$(x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,3}, x_{2,3}, x_{1,3}, x_{1,2}, y_1, y_3)$$

dalla matrice  $\text{diag}(\xi^2, 1, \xi^2, \xi, 1, \xi^3, \xi, \xi^3)$ . Dato che  $\rho$  induce in particolare un'azione su  $H^0(X, K_X)$ , è determinata anche l'azione su

$$\text{Sym}^2(H^0(X, K_X)) \subseteq H^0(X, 2K_X):$$

in altre parole, ogni  $\rho_i$  fissa  $V'$ .

Fissata l'azione, cerchiamo le condizioni che i coefficienti delle quadriche  $q_0$  e  $q_2$  devono soddisfare per poter usare la Proposizione 2.3.4. In particolare, le quadriche devono essere tali da non intersecarsi sul vertice del cono  $V'$  e l'azione  $\rho$  deve essere libera ristretta all'intersezione  $V' \cap Q_0 \cap Q_2$ .

I punti fissi per l'azione  $\rho$  su  $\mathbb{P}^7$  sono tutti e soli i punti fissi dell'automorfismo  $\rho_2$  (se  $x$  è fisso per  $\rho_1$  o  $\rho_3$ , lo è anche per  $\rho_2$ ); quindi i punti fissi sono i proiettivizzati degli autospazi per  $\rho_2$ , cioè

$$\begin{aligned} \langle x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,3}, x_{1,3} \rangle &= (x_{1,2} = x_{2,3} = y_1 = y_3 = 0), \\ \langle x_{1,2}, x_{2,3}, y_1, y_3 \rangle &= (x_{1,1} = x_{2,2} = x_{3,3} = x_{1,3} = 0). \end{aligned}$$

Dato che  $X \subseteq V'$ , interessano solamente i punti fissi contenuti nel cono sulla Veronese; il primo autospazio intersecato con  $V'$  dà i due spazi  $(x_1 = x_3 = y_1 = y_3 = 0)$  e  $(x_2 = y_1 = y_3 = 0)$ , cioè il punto coordinato relativo alla variabile  $x_{2,2}$  e la conica che si ottiene intersecando  $V'$  con il piano generato in  $\mathbb{P}^7$  dai punti coordinati relativi a  $x_{1,1}$ ,  $x_{3,3}$  e  $x_{1,3}$ ; il secondo autospazio intersecato con  $V'$  dà lo spazio  $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ , cioè la retta generata dai punti coordinati relativi a  $y_1$  e  $y_3$  (il vertice del cono).

Le quadriche non possono intersecarsi in uno di questi punti fissi su  $V'$ . Notiamo però che, qualsiasi siano i suoi coefficienti,  $Q_0$  contiene i punti coordinati  $y_1$  e  $y_3$  (dato che non contiene i monomi  $y_i^2$ ), quindi i coefficienti  $d_1$  e  $d_3$  devono essere non nulli. Allo stesso modo,  $Q_2$  passa in ogni caso per i punti coordinati  $x_{i,i}$ , perciò i coefficienti  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  devono essere non nulli. Inoltre, se  $b_{1,3} = 0$ ,  $Q_0$  contiene il vertice di  $V'$ , ma  $q_2$  ristretta al vertice di  $V'$  diventa  $d_1 y_1^2 + d_3 y_3^2$ , che ha almeno una soluzione. Quindi a meno di riscaldare le sezioni  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $y_1$ ,  $y_3$ , si può assumere

$$a_1 = a_2 = a_3 = b_{1,3} = d_1 = d_3 = 1.$$

**2.3.5 TEOREMA.** *Tutte le superfici di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_4$  si ottengono come risoluzione minimale delle singolarità del quoziente per l'azione  $\rho$  di  $\mathbb{Z}_4$  definita da  $\rho_1 := \text{diag}(\xi^2, 1, \xi^2, \xi, 1, \xi^3, \xi, \xi^3)$  dell'interse-*

zione  $X$  con il cono  $V'$  di dimensione quattro sulla superficie di Veronese di due quadriche definite dai polinomi

$$q_0 = x_{1,1}^2 + x_{2,2}^2 + x_{3,3}^2 + a_{1,3}x_{1,3}^2 + a_{1,2,3}x_{1,3}x_{2,2} + y_1y_3 + b_{1,2}y_1x_{1,2} + b_{2,3}y_3x_{2,3}$$

e

$$q_2 = c_{1,3}x_{1,1}x_{1,3} + c_{3,1}x_{1,3}x_{3,3} + c_{1,2}x_{1,2}^2 + c_{2,3}x_{2,3}^2 + y_1^2 + y_3^2$$

e tali che  $X$  abbia come singolarità al più punti doppi razionali.

Come per le superfici con torsione di ordine cinque, equazioni diverse potrebbero dare superfici di Godeaux isomorfe.

**2.3.6 TEOREMA.** *Lo spazio dei moduli  $\mathfrak{M}_4$  delle superfici di Godeaux con gruppo fondamentale isomorfo a  $\mathbb{Z}_4$  è il quoziente di un aperto  $\widetilde{\mathfrak{M}}_4 \subseteq \mathbb{A}^8$  per l'azione di un sottogruppo finito  $T \leq \mathbb{P}GL(7)$ , generato dalle matrici  $\text{diag}(\zeta^2, 1, \zeta^2, \zeta, 1, \zeta^3, \zeta, \zeta^3)$  e  $M_\sigma$ , dove  $M_\sigma$  è la matrice di permutazione relativa a  $\sigma := (1, 3)(4, 6)(7, 8)$ .*

*Dimostrazione.* Prendiamo come  $\widetilde{\mathfrak{M}}_4$  lo spazio dei coefficienti di  $q_0$  e  $q_2$  che danno un'intersezione con singolarità non peggiori di punti doppi razionali; questi formano un aperto  $\widetilde{\mathfrak{M}}_4$  di  $\mathbb{A}^8$ , non vuoto: un esempio di equazioni che danno una superficie liscia in  $\mathbb{P}^7$  è

$$q_0 = x_{1,1}^2 + x_{2,2}^2 + x_{3,3}^2 + y_1y_3, \\ q_2 = x_{1,1}x_{1,3} + x_{1,3}x_{3,3} + y_1^2 + y_3^2,$$

dato che la matrice delle derivate ha rango minore di due solo sul punto coordinato relativo a  $x_{2,2}$  e su un punto nel vertice.

Sia  $\psi: S_1 \rightarrow S_2$  un isomorfismo tra due superfici di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_4$ , provenienti dalle superfici

$$X_1 = V' \cap Q_{1,0} \cap Q_{1,2}, \\ X_2 = V' \cap Q_{2,0} \cap Q_{2,2}$$

in  $\mathbb{P}^7$ ; per la Proposizione 1.3.2 (la condizione su  $\psi_*$  è soddisfatta perché i rivestimenti sono definiti in maniera intrinseca, essendo relativi a tutto il sottogruppo di torsione delle superfici di Godeaux),  $\psi$  proviene da un isomorfismo  $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$  che passa al quoziente. Assumendo ancora che  $X_1$  e, di conseguenza,  $X_2$  siano lisce,  $\varphi$  si estende a un automorfismo di  $\mathbb{P}^7$  e più in generale a un isomorfismo di ogni  $H^0(X_1, nK_{X_1})$  con  $H^0(X_2, nK_{X_2})$ .

A questo punto, il passaggio al quoziente non dipende dalle equazioni delle quadriche che definiscono  $X_1$  e  $X_2$ , dato che l'azione è fissata. Se  $\varphi$  è compatibile con  $\rho$ , per la Proposizione 1.3.3 deve esistere  $h \in \mathbb{Z}_4^*$  tale che  $\rho_h \varphi = \varphi \rho_1$ .

I punti fissi di  $\rho$  in  $V'$  sono costituiti da un punto isolato, il punto coordinato relativo a  $x_{2,2}$ , una retta,  $\langle y_1, y_3 \rangle$  (il vertice di  $V'$ ) e una conica, tagliata su  $V'$  da  $\langle x_{1,1}, x_{1,3}, x_{3,3} \rangle$ . Se  $\varphi$  passa al quoziente, deve mandare punti fissi in punti fissi; inoltre, è un automorfismo di  $\mathbb{P}^7$  che fissa  $V'$  (dato che induce anche un isomorfismo  $\text{Sym}^2(H^0(X_1, K_{X_1})) \rightarrow \text{Sym}^2(H^0(X_2, K_{X_2}))$ ) quindi deve mandare il punto relativo a  $x_{2,2}$  in sé e così  $\langle y_1, y_3 \rangle$  e  $\langle x_{1,1}, x_{1,3}, x_{3,3} \rangle$ . In particolare, a meno di prendere un multiplo della matrice che rappresenta  $\varphi$ , possiamo assumere  $\varphi(x_2) = x_2$ ,  $\varphi(y_i) \in \langle y_1, y_3 \rangle$ ,  $\varphi(x_i) \in \langle x_1, x_3 \rangle$  per  $i \in \{1, 3\}$ .

D'altra parte, se  $s$  è un autovettore per  $\rho_1$  di autovalore  $\zeta^i$ , allora  $\rho_h \varphi(s) = \varphi \rho_1(s) = \zeta^i \varphi(s)$ , cioè  $\varphi(s)$  è un autovettore per  $\rho_h$  di autovalore  $\zeta^i$ . Cioè, se  $h = 1$ ,  $\varphi$  deve fissare il pullback di  $H^0(S_1, nK_{S_1} + iD)$ , mentre se  $h = 3$  deve scambiare il pullback di  $H^0(S_1, nK_{S_1} + D)$  con quello di  $H^0(S_1, nK_{S_1} + 3D)$ .

Combinando queste considerazioni, riusciamo a scrivere  $\varphi$  come permutazione di una matrice diagonale.

SE  $h = 1$ ,  $\varphi(x_1)$  deve essere una sezione di  $H^0(X_1, K_{X_1})$  proveniente da  $H^0(S_1, K_{S_1} + D)$ , cioè  $\varphi(x_1) = \lambda_1 x_1$ ; allo stesso modo,  $\varphi(x_3) = \lambda_3 x_3$ . Infine,  $\varphi(y_1) \in \langle y_1, y_3 \rangle$ , ma  $y_3$  è una sezione di  $H^0(S_1, 2K_{S_1} + 3D)$ , perciò  $\varphi(y_1) = \mu_1 y_1$  e allo stesso modo  $\varphi(y_3) = \mu_3 y_3$ ;  $\varphi$  quindi è della forma

$$\text{diag}(\lambda_1^2, 1, \lambda_3^2, \lambda_3, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_1, \mu_1, \mu_3).$$

SE  $h = 3$ ,  $\varphi(x_1)$  deve essere una sezione di  $H^0(X_1, K_{X_1})$  proveniente da  $H^0(S_1, K_{S_1} + 3D)$ , cioè  $\varphi(x_1) = \lambda_3 x_3$ ; allo stesso modo,  $\varphi(x_3) = \lambda_1 x_1$ . Infine,  $\varphi(y_1) \in \langle y_1, y_3 \rangle$ , ma  $y_1 \in H^0(S_1, 2K_{S_1} + D)$ , perciò  $\varphi(y_1) = \mu_3 y_3$  e allo stesso modo  $\varphi(y_3) = \mu_1 y_1$ ;  $\varphi$  quindi è della forma

$$\text{diag}(\lambda_1^2, 1, \lambda_3^2, \lambda_3, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_1, \mu_1, \mu_3) M_\sigma,$$

dove  $M_\sigma$  è la matrice relativa a  $\sigma = (1, 3)(4, 6)(7, 8)$  (cioè, la permutazione che scambia gli autospazi relativi a  $\zeta$  con quelli relativi a  $\zeta^3$ , cioè scambia  $x_1$  con  $x_3$  e  $y_1$  con  $y_3$ ).

Sia che  $h = 1$  o  $h = 3$ ,  $\varphi$  manda  $H^0(S_1, 4K_{S_1})$  in  $H^0(S_2, 4K_{S_2})$  e così  $H^0(S_1, 4K_{S_1} + 2D)$ ; questo significa che  $\varphi(Q_{1,k} \cap V') = Q_{2,k} \cap V'$  per  $k \in \{0, 2\}$ . In particolare, se assumiamo che le forme delle equazioni delle quadriche siano quelle dell'enunciato del Teorema 2.3.5, ottenia-

mo da  $\varphi(Q_{1,0} \cap V') = Q_{2,0} \cap V'$  le relazioni  $\lambda_1^4 = \lambda_3^4 = \mu_1\mu_3 = 1$ , mentre da  $\varphi(Q_{1,2} \cap V') = Q_{2,2} \cap V'$  la relazione  $\mu_1^2 = \mu_3^2$ : tutti i coefficienti non nulli della matrice di  $\varphi$  sono radici quarte dell'unità; in particolare, le possibili  $\varphi$  sono in numero finito.  $\square$



# 3

---

## AUTOMORFISMI DELLE SUPERFICI CON TORSIONE DI ORDINE 5

---

Nel capitolo precedente (Teorema 2.1.4 e Teorema 2.1.8) abbiamo visto come una superficie di Godeaux abbia gruppo fondamentale algebrico isomorfo a uno tra  $\{0\}$ ,  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{Z}_4$  o  $\mathbb{Z}_5$ , e come, a parità di altre condizioni, le superfici con gruppo fondamentale algebrico più grande siano più facili da studiare. In questo capitolo quindi studieremo il numero di automorfismi delle superfici di Godeaux più facili secondo questa regola empirica, quelle con gruppo fondamentale algebrico isomorfo a  $\mathbb{Z}_5$ .

Inizieremo da un esempio, che delinea la strategia da seguire per poi effettuare il calcolo in generale. Questo esempio non è altro che l'originale superficie studiata da Godeaux nei primi anni Trenta (i cui risultati sono raccolti in [13]): la superficie ottenuta quotizzando la quintica liscia di  $\mathbb{P}^3$  definita dall'equazione  $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0$  per l'azione fissata vista nel capitolo precedente; questa superficie verrà chiamata *superficie di Godeaux classica*. Dopo aver calcolato il numero di automorfismi in questo caso particolare, mostreremo che in quello generico una superficie di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_5$  non ha automorfismi non banali. Infine, estendendo i risultati trovati nel caso generico, classificheremo le superfici con un determinato numero di automorfismi e suddivideremo lo spazio dei moduli  $\mathfrak{M}_5$  delle superfici di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_5$  a seconda del numero di automorfismi.

### 3.1 LA SUPERFICIE DI GODEAUX CLASSICA

In questa sezione,  $X \subseteq \mathbb{P}^3$  sarà la superficie determinata dall'equazione

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0.$$

Osserviamo subito che  $X$  è liscia, dato che le derivate parziali non si annullano mai contemporaneamente.

Come nel capitolo precedente, fissiamo una radice quinta dell'unità primitiva,  $\zeta$ , e l'azione  $\rho: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$  definita da

$$\rho_1 := \text{diag}(\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4).$$

Allora, se  $G := \rho(\mathbb{Z}_5)$ ,  $S := X/G$  è una superficie di Godeaux con  $\pi_1^{\text{alg}}(S) \cong \mathbb{Z}_5$ , che chiameremo *superficie di Godeaux classica*.

Dal Corollario 1.3.4, il gruppo degli automorfismi di  $S$  è isomorfo al quoziente di  $N_{\text{Aut}(X)}(G)$  per  $G$ . Inoltre, nella dimostrazione del Teorema 2.2.4 avevamo calcolato  $N_{\text{Aut}(\mathbb{P}^3)}(G)$  e osservato che  $\varphi \in N_{\text{Aut}(X)}(G)$  se e solo se  $\varphi \in N_{\text{Aut}(\mathbb{P}^3)}(G)$  e  $\varphi$  fissa  $X$ .

3.1.1 NOTAZIONE. Ricordiamo che un automorfismo in  $N_{\text{Aut}(X)}(G)$  era la restrizione di un automorfismo di  $\mathbb{P}^3$  descritto da una matrice che è permutazione di una matrice diagonale; avevamo chiamato le possibili permutazioni

$$\begin{aligned} \bar{1} &:= \text{Id}, \\ \bar{2} &:= (2, 1, 3, 4), \\ \bar{3} &:= (1, 2, 4, 3), \\ \bar{4} &:= (1, 4)(3, 2); \end{aligned}$$

Se  $\varphi$  è un automorfismo di  $\mathbb{P}^3$  descritto dalla permutazione secondo  $\bar{h}$  di una matrice diagonale, cioè  $\varphi = \text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4)M_{\bar{h}}$ , dove  $M_{\bar{h}}$  è la matrice associata alla permutazione  $\bar{h}$ , diremo che  $\varphi$  ha *tipo*  $\bar{h}$ . Se  $S$  è una superficie di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_5$ , denoteremo l'insieme degli automorfismi di  $S$  che provengono da automorfismi di tipo  $\bar{h}$  con  $\text{Aut}_{\bar{h}}(S)$ . Ricordiamo che gli automorfismi di tipo  $\bar{h}$  sono i  $\varphi$  che soddisfano  $\rho_h \varphi = \varphi \rho_1$ .

Dobbiamo quindi determinare gli elementi di  $N_{\text{Aut}(\mathbb{P}^3)}(G)$  che mandano  $X$  in sé; fissare  $X$  a priori equivale a trasformare il polinomio che definisce  $X$  in un suo multiplo, ma dato che gli automorfismi di  $\mathbb{P}^3$  sono definiti da matrici a meno di una costante moltiplicativa, all'interno della classe di matrici che definisce un automorfismo che fissa  $X$  esiste almeno una matrice che fissa anche l'equazione di  $X$ . Dato che avevamo visto che  $N_{\text{Aut}(\mathbb{P}^3)}(G)$  è costituito da  $5^3 \cdot 4 = 500$  automorfismi che sono permutazioni di matrici diagonali con radici quinte dell'unità sulla diagonale, è facile osservare che tutti gli automorfismi di  $N_{\text{Aut}(\mathbb{P}^3)}(G)$  fissano  $X$ . In definitiva,  $S$  ha  $500/5 = 100$  automorfismi, 25 per ogni tipo.

### 3.2 IL CASO GENERALE

Nel capitolo precedente (Teorema 2.2.4) abbiamo visto che lo spazio dei moduli delle superfici di Godeaux con gruppo fondamentale al-

gebrico isomorfo a  $\mathbb{Z}_5$  è il quoziente dell'aperto  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$  di  $\mathbb{A}^8$  tramite un gruppo finito. In questa identificazione, il punto  $(b_1, \dots, b_4, c_1, \dots, c_4)$  corrisponde alla superficie  $S$  ottenuta quotizzando la quintica  $X$  di  $\mathbb{P}^3$  definita dal polinomio

$$\begin{aligned} f := & x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + \\ & + b_1 x_2 x_3^3 x_4 + b_2 x_1^3 x_3 x_4 + b_3 x_1 x_2 x_4^3 + b_4 x_1 x_2^3 x_3 + \\ & + c_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + c_2 x_1 x_3^2 x_4^2 + c_3 x_1^2 x_2^2 x_4 + c_4 x_1^2 x_2 x_3^2 \end{aligned}$$

tramite la stessa azione  $\rho$  usata nell'esempio visto prima, che abbiamo dimostrato agire anche su questa nuova  $X$  senza punti fissi.

Il nostro scopo ora è il seguente: da un lato, calcolare il numero di automorfismi di una superficie corrispondente a un punto  $(b_i, c_i)_{1 \leq i \leq 4}$  di  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$ ; dall'altro, determinare le sottovarietà di  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$  e di  $\mathfrak{M}_5$  costituite dalle superfici che ammettono un certo numero di automorfismi.

Sia  $S$  una superficie di Godeaux con torsione isomorfa a  $\mathbb{Z}_5$  corrispondente al punto  $(b_i, c_i)_{1 \leq i \leq 4}$  di  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$  e sia  $X$  il suo rivestimento universale, cioè la quintica di  $\mathbb{P}^3$  che ha come coefficienti i  $b_i$  e i  $c_i$ . Ancora sfruttiamo il fatto che la condizione per cui un automorfismo di  $\mathbb{P}^3$  che fissa  $X$  passa al quoziente è indipendente da  $X$ ; questo implica che  $\text{Aut}(S)$  è in corrispondenza biunivoca con un sottogruppo dei 100 automorfismi della superficie di Godeaux classica; la condizione aggiuntiva è quella di mandare  $X$  in sé (nel caso della superficie di Godeaux classica, era una condizione vuota). Calcoliamo ora, tipo per tipo, quali dei 500 automorfismi di  $\mathbb{P}^3$  che passano al quoziente fissano  $X$ , prima supponendo che i coefficienti  $b_i$  e  $c_i$  siano tutti non nulli e poi estendendo il risultato agli altri casi.

**3.2.1 NOTAZIONE.** Se  $b_i b_j^{-1}$  è una radice quinta dell'unità,  $\zeta^\alpha$ , denoteremo l'esponente  $\alpha$  con  $n_{i,j}$ ; allo stesso modo, se  $c_i c_j^{-1} = \zeta^\beta$ , denoteremo  $\beta$  con  $m_{i,j}$ . Inoltre, ogni equazione modulare nel resto di questo capitolo sarà da intendersi modulo 5. Nelle tabelle di questo capitolo,  $\widetilde{V}$  indicherà la sottovarietà di  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$  costituita dalle superfici che hanno quello specifico numero o gruppo di automorfismi, con componenti irriducibili  $\widetilde{V}_i$ . In generale, chiameremo ogni sottovarietà di  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$  con una lettera sormontata da una tilde e la corrispondente varietà quoziente in  $\mathfrak{M}_5$  con la stessa lettera senza tilde. Una sottovarietà  $\widetilde{V}$  di  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$  è l'intersezione di una sottovarietà di  $\mathbb{A}^8$ , che chiameremo ancora  $\widetilde{V}$ , con l'aperto di  $\mathbb{A}^8$  che contiene le superfici di Godeaux.

Effettueremo il calcolo per ogni punto di  $\mathbb{A}^8$ ; dovremo quindi appurare che le sottovarietà che troveremo intersechino effettivamente l'aperto delle superfici di Godeaux in  $\mathbb{A}^8$ , cioè che una volta considerate in  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$  siano non vuote.

Tabella 1: Automorfismi di tipo  $\bar{1}$ 

$\tilde{V} \subseteq \tilde{\mathfrak{M}}_5$	$\text{Aut}_{\bar{1}}(S)$	$ \text{Aut}_{\bar{1}}(S) $	$\dim \tilde{V}$	$ \{\tilde{V}_i\} $
$\tilde{O}$	$\mathbb{Z}_5^2$	25	0	1
$\tilde{H} \setminus \tilde{O}$	$\mathbb{Z}_5$	5	2	4
$\tilde{\mathfrak{M}}_5 \setminus \tilde{H}$	$\{\text{Id}\}$	1	8	1

3.3 AUTOMORFISMI DI TIPO  $\bar{1}$ 

Se  $\varphi$  è rappresentato dalla matrice  $\text{diag}(1, \zeta^{i_2}, \zeta^{i_3}, \zeta^{i_4})M_{\bar{1}}$ , cioè da una matrice diagonale,  $\varphi$  manda  $X := (b_i, c_i)_{1 \leq i \leq 4}$  in

$$X' := (b_1 \zeta^{i_2+3i_3+i_4}, b_2 \zeta^{i_3+i_4}, b_3 \zeta^{i_2+3i_4}, b_4 \zeta^{3i_2+i_3}, \\ c_1 \zeta^{2i_2+i_3+2i_4}, c_2 \zeta^{2i_3+2i_4}, c_3 \zeta^{2i_2+i_4}, c_4 \zeta^{i_2+2i_3});$$

supponendo inizialmente tutti i coefficienti non nulli,  $X' = X$  se e solo se è soddisfatto il sistema

$$(3.1) \quad \begin{cases} i_2 + 3i_3 + i_4 \equiv 0, & 2i_2 + i_3 + 2i_4 \equiv 0, \\ i_3 + i_4 \equiv 0, & 2i_3 + 2i_4 \equiv 0, \\ i_2 + 3i_4 \equiv 0, & 2i_2 + i_4 \equiv 0, \\ 3i_2 + i_3 \equiv 0, & i_2 + 2i_3 \equiv 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_3 \equiv 2i_2, \\ i_4 \equiv 3i_2. \end{cases}$$

Quindi abbiamo due condizioni, che permettono cinque automorfismi di tipo  $\bar{1}$  della forma  $\text{diag}(1, \zeta^{i_2}, \zeta^{2i_2}, \zeta^{3i_2})M_{\bar{1}}$ , che scendono a un unico automorfismo di  $S$ , l'identità (infatti i cinque automorfismi non sono altro che i  $\rho_h$ ).

Se qualcuno dei coefficienti è nullo, semplicemente la corrispondente equazione non è presente nel sistema. Osserviamo che l'equazione relativa a  $b_i$  dipende solo da quella relativa a  $c_i$  e viceversa; per questo motivi, ci sono due condizioni se e solo se esistono due indici diversi  $i$  e  $j$  tali che  $b_i \neq 0$  o  $c_i \neq 0$  e  $b_j \neq 0$  o  $c_j \neq 0$ ; c'è una sola condizione se e solo se esiste un solo indice  $i$  con  $b_i \neq 0$  o  $c_i \neq 0$  mentre gli altri coefficienti sono nulli; non ci sono condizioni se e solo se tutti gli indici sono nulli.

Riassumendo, otteniamo la tabella 1, dove  $\tilde{H}_i$  è il piano definito da  $b_j = 0 = c_j$  per ogni  $j \neq i$  e  $\tilde{H} := \bigcup_{i=1}^4 \tilde{H}_i$ , mentre  $\tilde{O}$  è costituito dal solo punto che rappresenta la superficie di Godeaux classica. È facile vedere che i piani  $\tilde{H}_i$  vengono identificati in  $\tilde{\mathfrak{M}}_5$ , dato che le permutazioni corrispondenti al sottogruppo  $\mathbb{Z}_4$  agiscono transitivamente sulle coordinate.

3.4 AUTOMORFISMI DI TIPO  $\bar{4}$ 

Se  $\varphi$  è rappresentato dalla matrice  $\text{diag}(1, \zeta^{i_1}, \zeta^{i_2}, \zeta^{i_3})M_{\bar{4}}$ ,  $\varphi$  manda  $X := (b_i, c_i)_{1 \leq i \leq 4}$  in

$$X' := (b_4 \zeta^{3i_2+i_3}, b_3 \zeta^{i_2+3i_4}, b_2 \zeta^{i_3+i_4}, b_1 \zeta^{i_2+3i_3+i_4}, \\ c_4 \zeta^{i_2+2i_3}, c_3 \zeta^{2i_2+i_4}, c_2 \zeta^{2i_3+2i_4}, c_1 \zeta^{2i_2+i_3+2i_4});$$

supponendo inizialmente tutti i coefficienti non nulli,  $X' = X$  se e solo se  $b_1 b_4^{-1}, b_3 b_2^{-1}, c_1 c_4^{-1}, c_3 c_2^{-1}$  sono radici quinte dell'unità ed è soddisfatto il sistema

$$(3.2) \quad \begin{cases} n_{1,4} \equiv 3i_2 + i_3, & m_{1,4} \equiv i_2 + 2i_3, \\ -n_{3,2} \equiv i_2 + 3i_4, & -m_{3,2} \equiv 2i_2 + i_4, \\ n_{3,2} \equiv i_3 + i_4, & m_{3,2} \equiv 2i_3 + 2i_4, \\ -n_{1,4} \equiv i_2 + 3i_3 + i_4, & -m_{1,4} \equiv 2i_2 + i_3 + 2i_4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_{3,2} \equiv 2n_{1,4}, \\ m_{1,4} = 2n_{1,4}, \\ m_{3,2} = 4n_{1,4} \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} i_3 \equiv 2i_2 + n_{1,4}, \\ i_4 \equiv 3i_2 + n_{1,4} \end{cases}$$

(dei due sistemi risultanti, il primo dà condizioni sui coefficienti, mentre il secondo sulle entrate della matrice di  $\varphi$ ). Se i coefficienti soddisfano il primo sistema, abbiamo cinque automorfismi di tipo  $\bar{4}$ , della forma  $\text{diag}(1, \zeta^{i_2}, \zeta^{2i_2+n_{1,4}}, \zeta^{3i_2+n_{1,4}})M_{\bar{4}}$ ; altrimenti, non abbiamo automorfismi di tipo  $\bar{4}$ .

Se qualcuno dei coefficienti è nullo, osserviamo subito che una condizione necessaria perché vi siano automorfismi di tipo  $\bar{4}$  è che per ogni coppia  $(b_1, b_4), (b_3, b_2), (c_1, c_4), (c_3, c_2)$ , i due elementi siano entrambi nulli o entrambi non nulli, e in questo caso il loro quoziente sia una radice quinta dell'unità. Come nel caso precedente, l'equazione relativa a  $b_i$  è dipendente solo da quella relativa a  $c_i$  e viceversa. Rispetto a prima però non può risultare solo una condizione: infatti, c'è una sola condizione se e solo se c'è solo un coefficiente non nullo tra i  $b_i$  o tra i  $c_i$ ; ma per avere automorfismi una condizione necessaria è l'annullarsi a coppie dei coefficienti. Quindi abbiamo tre casi: nessun automorfismo se i coefficienti non soddisfano il primo sistema, due condizioni e cinque automorfismi se i coefficienti soddisfano il primo sistema e ce n'è almeno uno non nullo, nessuna condizione e 125 automorfismi se tutti i coefficienti sono nulli.

Andiamo ora a determinare le sottovarietà di  $\widetilde{\mathfrak{M}}_5$  corrispondenti a queste possibilità. La condizione perché ci siano automorfismi è che per ognuna delle coppie  $(b_1, b_4), (b_3, b_2), (c_1, c_4), (c_3, c_2)$ , gli elementi della coppia o si annullino entrambi o siano radici quinte dell'unità in relazione tra loro come determinato dal primo sistema risultante nell'equazione (3.2). Ma dato che le quattro incognite di quel sistema

Tabella 2: Automorfismi di tipo  $\bar{4}$ 

$\tilde{V} \subseteq \tilde{\mathfrak{M}}_5$	$ \text{Aut}_{\bar{4}}(S) $	$\dim \tilde{V}$	$ \{\tilde{V}_i\} $
$\tilde{O}$	25	0	1
$\tilde{Q} \setminus \tilde{O}$	1	4	5
$\tilde{\mathfrak{M}}_5 \setminus \tilde{Q}$	0	8	1

sono determinate una volta scelto il valore per una di loro, le sottovarietà che si ottengono quando c'è almeno un coefficiente nullo sono nella chiusura di quelle che si ottengono quando tutti i coefficienti sono non nulli. Queste sono determinate dai sistemi

$$(3.3) \quad \begin{cases} b_1 = \zeta^i b_4, & c_1 = \zeta^{2i} c_4, \\ b_3 = \zeta^{2i} b_2, & c_3 = \zeta^{4i} c_2 \end{cases}$$

al variare di  $i \in \mathbb{Z}_5$ . Questi sistemi definiscono cinque sottovarietà lineari di  $\tilde{\mathfrak{M}}_5$  di dimensione 4, che chiameremo  $\tilde{Q}_i$ . Ora, osserviamo facilmente che  $\tilde{Q}_i$  viene mandata in  $\tilde{Q}_j$  da  $\text{diag}(1, 1, 1, \zeta^{i-j})$ , quindi i  $\tilde{Q}_i$  vengono identificati in  $\mathfrak{M}_5$ . Riassumendo, otteniamo la tabella 2, dove  $\tilde{Q} := \bigcup_{i=0}^4 \tilde{Q}_i$ .

### 3.5 AUTOMORFISMI DI TIPO $\bar{2}$

Se  $\varphi$  è rappresentato dalla matrice  $\text{diag}(1, \zeta^{i_2}, \zeta^{i_3}, \zeta^{i_4})M_{\bar{2}}$ ,  $\varphi$  manda  $X := (b_i, c_i)_{1 \leq i \leq 4}$  in

$$X' = (b_2 \zeta^{i_3+i_4}, b_4 \zeta^{3i_2+i_3}, b_1 \zeta^{i_2+3i_3+i_4}, b_3 \zeta^{i_2+3i_4}, c_2 \zeta^{2i_3+2i_4}, c_4 \zeta^{i_2+2i_3}, c_1 \zeta^{2i_2+i_3+2i_4}, c_3 \zeta^{2i_2+i_4});$$

supponendo inizialmente tutti i coefficienti non nulli,  $X' = X$  se e solo se  $b_1 b_2^{-1}, b_2 b_4^{-1}, b_3 b_1^{-1}, b_4 b_3^{-1}, c_1 c_2^{-1}, c_2 c_4^{-1}, c_3 c_1^{-1}, c_4 c_3^{-1}$  sono radici quinte dell'unità ed è soddisfatto il sistema

$$(3.4) \quad \begin{cases} n_{1,2} \equiv i_3 + i_4, & m_{1,2} \equiv 2i_3 + 2i_4, \\ n_{2,4} \equiv 3i_2 + i_3, & m_{2,4} \equiv i_2 + 2i_3, \\ n_{3,1} \equiv i_2 + 3i_3 + i_4, & m_{3,1} \equiv 2i_2 + i_3 + 2i_4, \\ n_{4,3} \equiv i_2 + 3i_4, & m_{4,3} \equiv 2i_2 + i_4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_{1,2} \equiv n_{2,4} + m_{4,3}, & m_{1,2} \equiv 2n_{2,4} + 2m_{4,3}, \\ n_{3,1} \equiv 3n_{2,4} + m_{4,3}, & m_{2,4} \equiv 2n_{2,4}, \\ n_{4,3} \equiv 3m_{4,3}, & m_{3,1} \equiv n_{2,4} + 2m_{4,3} \end{cases} \wedge \begin{cases} i_3 \equiv 2i_2 + n_{2,4}, \\ i_4 \equiv 3i_2 + m_{4,3}. \end{cases}$$

Tabella 3: Automorfismi di tipo  $\bar{2}$ 

$\tilde{V} \subseteq \tilde{\mathfrak{M}}_5$	$ \text{Aut}_2(S) $	$\dim \tilde{V}$	$ \{\tilde{V}_i\} $
$\tilde{O}$	25	0	1
$\tilde{P} \setminus \tilde{O}$	1	2	25
$\tilde{\mathfrak{M}}_5 \setminus \tilde{P}$	0	8	1

Se i coefficienti soddisfano il primo sistema, abbiamo cinque automorfismi di tipo  $\bar{2}$ , della forma  $\text{diag}(1, \zeta^{i_2}, \zeta^{2i_2+n_{2,4}}, \zeta^{3i_2+m_{4,3}})M_{\bar{2}}$ ; altrimenti, non abbiamo automorfismi di tipo  $\bar{2}$ .

Se qualcuno dei coefficienti è nullo, una condizione necessaria perché vi siano automorfismi di tipo  $\bar{2}$  è che per ogni coppia  $(b_1, b_2)$ ,  $(b_2, b_4)$ ,  $(b_3, b_1)$ ,  $(b_4, b_3)$ ,  $(c_1, c_2)$ ,  $(c_2, c_4)$ ,  $(c_3, c_1)$ ,  $(c_4, c_3)$ , i due elementi siano entrambi nulli o entrambi non nulli, e in questo caso il loro quoziente sia una radice quinta dell'unità; in particolare, una condizione necessaria è che i  $b_i$  siano tutti nulli o tutti non nulli e così i  $c_i$ . Come per gli automorfismi di tipo  $\bar{4}$ , non può risultare solo una condizione, perché questo significherebbe che tra i  $b_i$  o tra i  $c_i$  dovrebbe esserci esattamente un coefficiente non nullo. Quindi abbiamo gli stessi tre casi: nessun automorfismo se i coefficienti non soddisfano il primo sistema, due condizioni e cinque automorfismi se i coefficienti soddisfano il primo sistema e ce n'è almeno uno non nullo, nessuna condizione e 125 automorfismi se tutti i coefficienti sono nulli.

Dobbiamo determinare le sottovarietà di  $\tilde{\mathfrak{M}}_5$  corrispondenti a queste possibilità. Come per gli automorfismi di tipo  $\bar{4}$ , le sottovarietà che otteniamo quando c'è almeno un coefficiente nullo sono nella chiusura di quelle che otteniamo quando tutti i coefficienti sono non nulli. Queste ultime sono determinate dai sistemi

$$(3.5) \quad \begin{cases} b_1 = \zeta^{i+j}b_2, & c_1 = \zeta^{2i+2j}c_2, \\ b_2 = \zeta^i b_4, & c_2 = \zeta^{2i}c_4, \\ b_3 = \zeta^{3i+j}b_1, & c_3 = \zeta^{i+2j}c_1, \\ b_4 = \zeta^{3j}b_3, & c_4 = \zeta^j c_3 \end{cases}$$

al variare di  $i, j \in \mathbb{Z}_5$ . Questi sistemi definiscono 25 sottovarietà lineari di dimensione 2, che chiameremo  $\tilde{P}_{i,j}$ . Notiamo che  $\tilde{P}_{i,j}$  viene mandato in  $\tilde{P}_{s,t}$  da  $\text{diag}(1, \zeta^{s+t-i-j}, 1, \zeta^{-s-2t+i+2j})$ , cioè, i 25 piani vengono identificati in  $\mathfrak{M}_5$ . Inoltre,  $\tilde{P}_{i,j}$  è contenuto in  $\tilde{Q}_{2i+j}$ . Otteniamo quindi la tabella 3, dove  $\tilde{P} := \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}_5} \tilde{P}_{i,j}$ .

Per motivi algebrici, la descrizione degli automorfismi di tipo  $\bar{3}$  è la stessa di quelli di tipo  $\bar{2}$ : infatti, se  $\varphi$  è un automorfismo di tipo  $\bar{2}$ ,  $\varphi^{-1}$  è un automorfismo di tipo  $\bar{3}$  e viceversa, quindi i due insiemi  $\text{Aut}_{\bar{2}}(S)$  e  $\text{Aut}_{\bar{3}}(S)$  sono in corrispondenza biunivoca sopra ogni punto di  $\tilde{\mathfrak{M}}_5$ .

Tabella 4: Automorfismi delle superfici con  $\pi_1^{\text{alg}} \cong \mathbb{Z}_5$ 

$\text{Aut}(S)$	$V \subseteq \mathfrak{M}_5$	$\dim V$	$ \{\tilde{V}_i\} $	$ \{V_i\} $
$\mathbb{Z}_5^2 \times \mathbb{Z}_4$	$O$	0	1	1
$\mathbb{Z}_5$	$H \setminus O$	2	4	1
$\mathbb{Z}_4$	$P \setminus O$	2	25	1
$\mathbb{Z}_2$	$Q \setminus P$	4	5	1
$\{\text{Id}\}$	$\mathfrak{M}_5 \setminus (H \cup Q)$	8	1	1

### 3.6 CONCLUSIONE

Abbiamo visto che la superficie di Godeaux generica con  $\pi_1^{\text{alg}} \cong \mathbb{Z}_5$  non ha automorfismi non banali; ci sono però alcuni casi speciali che accadono in quattro sottovarietà unirazionali di  $\mathfrak{M}_5$ : un punto, due sottovarietà di dimensione due e una di dimensione quattro.

- La prima sottovarietà è l'immagine  $O$  dell'origine di  $\mathbb{A}^8$  in  $\mathfrak{M}_5$ , la superficie di Godeaux classica, con 100 automorfismi in un gruppo isomorfo a  $\mathbb{Z}_5^2 \times \mathbb{Z}_4$ .
- La seconda è  $H \setminus O$ ; le superfici che contiene hanno solo cinque automorfismi di tipo  $\bar{1}$  e il gruppo degli automorfismi è ovviamente isomorfo a  $\mathbb{Z}_5$ .
- La terza è  $P \setminus O$ ; le superfici che contiene hanno un automorfismo per tipo, per un totale di quattro isomorfismi che formano un gruppo isomorfo a  $\mathbb{Z}_4$ .
- La quarta è  $Q \setminus P$ ; le superfici che contiene hanno un automorfismo di tipo  $\bar{1}$  e uno di tipo  $\bar{4}$ , che formano un gruppo isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

Tutte queste sottovarietà sono non nulle anche considerate in  $\mathfrak{M}_5$ : infatti, abbiamo già visto che l'origine di  $\mathbb{A}^8$  corrisponde alla superficie di Godeaux classica, da cui  $O \subseteq \mathfrak{M}_5$ ; le chiusure delle altre sottovarietà contengono  $O$ , quindi la loro intersezione con  $\mathfrak{M}_5$  è un aperto non vuoto.



# 4

---

## AUTOMORFISMI DELLE SUPERFICI CON TORSIONE DI ORDINE 4

---

Proseguiamo il nostro studio calcolando il gruppo degli automorfismi delle superfici di Godeaux con gruppo fondamentale algebrico isomorfo a  $\mathbb{Z}_4$ . Il procedimento che seguiremo sarà analogo a quello del capitolo precedente: effettueremo il calcolo per il rivestimento della superficie, di cui sappiamo dare un modello immerso bicanonicamente; per ottenere il gruppo di automorfismi sarà sufficiente quotizzare per il gruppo di automorfismi immagine dell'azione sul rivestimento.

### 4.1 PRELIMINARI

Dal Teorema 2.3.6 sappiamo che lo spazio dei moduli delle superfici di Godeaux con gruppo fondamentale isomorfo a  $\mathbb{Z}_4$  è costituito dal quoziente per un gruppo finito di un aperto  $\widetilde{\mathfrak{M}}_4$  di  $\mathbb{A}^8$ ; il punto

$$(a_{1,3}, a_{1,2,3}, b_{1,2}, b_{2,3}, c_{1,3}, c_{3,1}, c_{1,2}, c_{2,3}) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_4$$

corrisponde alla superficie di Godeaux  $S$  ottenuta risolvendo le singolarità del quoziente dell'intersezione del cono  $V'$  di dimensione quattro sulla superficie di Veronese con le due quadriche definite dalle equazioni

$$q_0 = x_{1,1}^2 + x_{2,2}^2 + x_{3,3}^2 + a_{1,3}x_{1,3}^2 + a_{1,2,3}x_{1,3}x_{2,2} + \\ + y_1y_3 + b_{1,2}y_1x_{1,2} + b_{2,3}y_3x_{2,3}$$

e

$$q_2 = c_{1,3}x_{1,1}x_{1,3} + c_{3,1}x_{1,3}x_{3,3} + \\ + c_{1,2}x_{1,2}^2 + c_{2,3}x_{2,3}^2 + y_1^2 + y_3^2,$$

dove il quoziente è relativo all'azione  $\rho: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \text{Aut}(X)$  con  $\rho_i := \rho(i)$ , definita da

$$\rho_1 = \text{diag}(\zeta^2, 1, \zeta^2, \zeta^3, 1, \zeta, \zeta, \zeta^3).$$

4.1.1 NOTAZIONE. Come per le superfici con torsione di ordine cinque, diremo che un automorfismo  $\varphi: S \rightarrow S$  ha *tipo*  $h \in \mathbb{Z}_4^*$  se  $\rho_h \varphi = \varphi \rho_1$  (confronta il Corollario 1.3.4); chiameremo  $\text{Aut}_{\bar{h}}(S)$  l'insieme degli automorfismi di  $S$  di tipo  $h$ . Se  $i$  e  $j$  sono due incognite a valori in  $\mathbb{Z}_4$  di cui sappiamo solo che hanno la stessa parità, scriveremo  $j = i + \varepsilon$  (dove intendiamo che  $\varepsilon$  può assumere i valori 0 o 2); se  $n$  è pari, scrivendo  $n/2$  indichiamo che sono valide entrambe le possibilità (cioè, se  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n/2 \in \{0, 2\}$ , mentre se  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $n/2 \in \{1, 3\}$ ). Tutte le congruenze di questo capitolo sono da intendersi modulo 4.

Nella dimostrazione del Teorema 2.3.6 abbiamo visto come, indipendentemente dalle quadriche che definiscono  $X$ , un automorfismo  $\varphi: X \rightarrow X$  sia rappresentato dalla matrice

$$\text{diag}(\lambda_1^2, 1, \lambda_3^2, \lambda_3, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_1, \mu_1, \mu_3),$$

oppure dalla permutazione della stessa matrice tramite la permutazione  $\sigma = (1, 3)(4, 6)(7, 8)$  (cioè, si stanno trasponendo le sezioni  $x_1$  e  $y_1$  rispettivamente con le sezioni  $x_3$  e  $y_3$ ). Gli automorfismi della prima forma sono quelli di tipo  $\bar{1}$ , mentre quelli della seconda forma sono quelli di tipo  $\bar{3}$ .

Avevamo inoltre visto che, sempre indipendentemente dalle particolari quadriche, i coefficienti  $\lambda_1$ ,  $\lambda_3$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_3$  sono radici quarte dell'unità, con  $\mu_3 = \mu_1^{-1}$ . Scriveremo

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \zeta^{i_1}, & \lambda_3 &= \zeta^{i_3}, \\ \mu_1 &= \zeta^{j_1}, & \mu_3 &= \zeta^{-j_1}. \end{aligned}$$

A seconda delle particolari quadriche, ci saranno altre condizioni su questi coefficienti.

Dato che abbiamo imposto (vedi Teorema 2.3.6) che  $\varphi(x_2)$  venga mandato in  $x_2$  con coefficiente unitario,  $\varphi$  deve mandare l'equazione  $q_0 = 0$  in sé, visto che si deve preservare il coefficiente di  $x_{2,2}$ ; invece, può mandare il polinomio  $q_2$  in un suo multiplo, diciamo,  $\eta q_2$ .

## 4.2 AUTOMORFISMI DI TIPO $\bar{1}$

Sia  $S$  la superficie di Godeaux con torsione di ordine quattro relativa al punto

$$(a_{1,3}, a_{1,2,3}, b_{1,2}, b_{2,3}, \gamma_{1,3}, \gamma_{3,1}, \gamma_{1,2}, \gamma_{2,3}) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_4,$$

e sia  $X$  il rivestimento di  $S$  relativo alla sua torsione. Cerchiamo gli automorfismi  $\varphi$  di  $X$  rappresentati da una matrice diagonale della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_3}, \zeta^{i_3}, \zeta^{i_1+i_3}, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1});$$

$\varphi$  manda  $X$  nel rivestimento della superficie  $S'$  corrispondente al punto

$$(a_{1,3}\zeta^{2i_1+2i_3}, a_{1,2,3}\zeta^{i_1+i_3}, b_{1,2}\zeta^{i_1+j_1}, b_{2,3}\zeta^{i_3-j_1}, \\ c_{1,3}\zeta^{i_3-i_1}, c_{3,1}\zeta^{i_1-i_3}, c_{1,2}\zeta^{2i_1}, c_{2,3}\zeta^{2i_3})$$

e vogliamo che questo punto coincida con quello di  $S$ , cioè che le quadriche taglino su  $V'$  la stessa superficie  $X$ . Dato che in  $q_2$  compare, per esempio, il monomio  $y_1^2$ , possiamo dire che  $\eta = \zeta^{2j_1}$ .

Supponiamo innanzitutto che i coefficienti delle quadriche siano tutti non nulli; il sistema risultante è

$$\begin{cases} 2i_1 + 2i_3 \equiv 0, & i_3 - i_1 \equiv 2j_1, \\ i_1 + i_3 \equiv 0, & i_1 - i_3 \equiv 2j_1, \\ i_1 + j_1 \equiv 0, & 2i_1 \equiv 2j_1, \\ i_3 - j_1 \equiv 0, & 2i_3 \equiv 2j_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 \equiv -j_1, \\ i_3 \equiv j_1. \end{cases}$$

Quindi se tutti i coefficienti sono non nulli, abbiamo solo quattro automorfismi:

$$\text{diag}(\zeta^{2j_1}, 1, \zeta^{2j_1}, \zeta^{j_1}, 1, \zeta^{-j_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1}) = \rho_{j_1};$$

passando al quoziente,  $\text{Aut}_{\bar{1}}(S) = \{\text{Id}\}$ .

Viceversa, se tutti i coefficienti sono nulli, non ci sono condizioni su  $i_1$ ,  $i_3$  e  $j_1$  e otteniamo un gruppo di automorfismi di  $X$  isomorfo a  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ ; di conseguenza,  $\text{Aut}_{\bar{1}}(S) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ .

Nei casi intermedi, possiamo avere gruppi di automorfismi di  $X$  isomorfi a  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$  o  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ; per discernere le varie casistiche, usiamo il codice a pagina 53; il risultato è il seguente.

$\text{Aut}_{\bar{1}}(X)$  HA 64 ELEMENTI se e solo se tutti i coefficienti si annullano, cioè nell'origine  $\tilde{O}$ .

$\text{Aut}_{\bar{1}}(X)$  HA 32 ELEMENTI se e solo se  $X$  è in una di queste tre sottovarietà di  $\tilde{\mathcal{M}}_4$ :

- $\tilde{T}_1$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,3}$ ; l'unica condizione è  $i_3 \equiv i_1 + \varepsilon$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{i_1+\varepsilon}, \zeta^{2i_1+\varepsilon}, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

e  $\text{Aut}_{\mathbb{T}}(S) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ;

- $\tilde{T}_2$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $c_{1,2}$ ; l'unica condizione è  $i_1 \equiv j_1 + \varepsilon$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2j_1}, 1, \zeta^{2i_3}, \zeta^{i_3}, \zeta^{i_3+j_1+\varepsilon}, \zeta^{j_1+\varepsilon}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

e  $\text{Aut}_{\mathbb{T}}(S) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ;

- $\tilde{T}_3$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $c_{2,3}$ ; l'unica condizione è  $i_3 \equiv j_1 + \varepsilon$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2j_1}, \zeta^{j_1+\varepsilon}, \zeta^{i_1+j_1+\varepsilon}, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

e  $\text{Aut}_{\mathbb{T}}(S) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ .

$\text{Aut}_{\mathbb{T}}(X)$  HA 16 ELEMENTI se e solo se  $X$  è in una di queste cinque sottovarietà di  $\mathfrak{M}_4$ :

- $\tilde{S}_1$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,3}$  e  $a_{1,2,3}$ ; l'unica condizione è  $i_3 \equiv -i_1$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{-i_1}, 1, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

e  $\text{Aut}_{\mathbb{T}}(S) \cong \mathbb{Z}_4$ ;

- $\tilde{S}_2$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $b_{1,2}$  e  $c_{1,2}$ ; l'unica condizione è  $i_1 \equiv -j_1$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2j_1}, 1, \zeta^{2i_3}, \zeta^{i_3}, \zeta^{i_3-j_1}, \zeta^{-j_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

e  $\text{Aut}_{\mathbb{T}}(S) \cong \mathbb{Z}_4$ ;

- $\tilde{S}_3$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $b_{2,3}$  e  $c_{2,3}$ ; l'unica condizione è  $i_3 \equiv j_1$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2j_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{i_1+j_1}, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

e  $\text{Aut}_{\mathbb{T}}(S) \cong \mathbb{Z}_4$ ;

- $\tilde{S}_4$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,3}$ ,  $c_{1,3}$  e  $c_{3,1}$ ; l'unica condizione è  $i_3 \equiv i_1 + 2j_1$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{i_1+2j_1}, \zeta^{2i_1+2j_1}, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

e  $\text{Aut}_{\mathbb{T}}(S) \cong \mathbb{Z}_4$ ;

- $\tilde{S}_5$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,3}$ ,  $c_{1,2}$  e  $c_{2,3}$ ; l'unica condizione è  $2i_1 \equiv 2i_3 \equiv 2j_1$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2j_1}, 1, \zeta^{2j_1}, \zeta^{j_1+\varepsilon_1}, \zeta^{2j_1+\varepsilon_1+\varepsilon_3}, \zeta^{j_1+\varepsilon_3}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

$$\text{e } \text{Aut}_{\bar{1}}(S) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

$\text{Aut}_{\bar{1}}(X)$  HA 8 ELEMENTI se e solo se  $X$  è in una di queste tre sotto-varietà di  $\tilde{\mathfrak{M}}_4$ :

- $\tilde{R}_1$ , definita dall'annullarsi di  $b_{1,2}$  e  $b_{2,3}$ ; le condizioni sono  $i_3 \equiv -i_1$  e  $2i_1 \equiv 2j_1$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{-i_1}, 1, \zeta^{i_1}, \zeta^{i_1+\varepsilon}, \zeta^{i_1-\varepsilon})$$

$$\text{e } \text{Aut}_{\bar{1}}(S) \cong \mathbb{Z}_2.$$

- $\tilde{R}_2$ , definita dall'annullarsi di  $a_{1,2,3}$ ,  $b_{2,3}$ ,  $c_{1,3}$  e  $c_{3,1}$ ; le condizioni sono  $i_1 \equiv -j_1$  e  $2i_3 \equiv 2j_1$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2j_1}, 1, \zeta^{2j_1}, \zeta^{j_1+\varepsilon}, \zeta^\varepsilon, \zeta^{-j_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

$$\text{e } \text{Aut}_{\bar{1}}(S) \cong \mathbb{Z}_2;$$

- $\tilde{R}_3$ , definita dall'annullarsi di  $a_{1,2,3}$ ,  $b_{1,2}$ ,  $c_{1,3}$  e  $c_{3,1}$ ; le condizioni sono  $i_3 \equiv j_1$  e  $2i_1 \equiv 2j_1$  e quindi gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2j_1}, 1, \zeta^{2j_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{2j_1+\varepsilon}, \zeta^{j_1+\varepsilon}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})$$

$$\text{e } \text{Aut}_{\bar{1}}(S) \cong \mathbb{Z}_2;$$

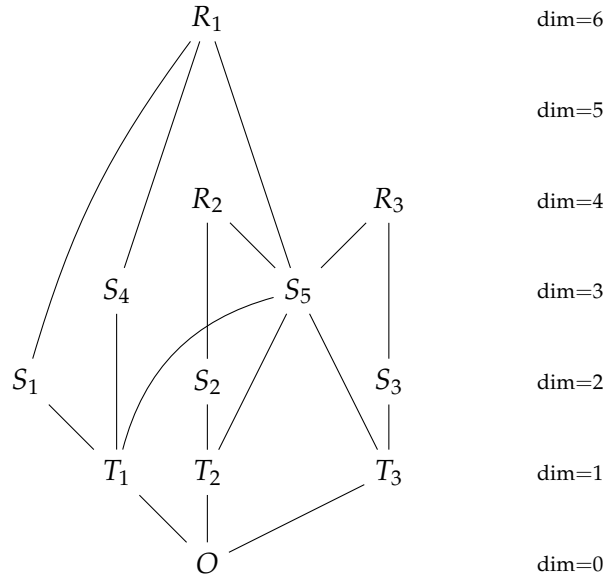
$\text{Aut}_{\bar{1}}(X)$  HA 4 ELEMENTI nel resto dei casi.

Ogni coppia di questi sottospazi lineari si intersecano nell'origine; inoltre abbiamo delle inclusioni tra questi spazi, rappresentate nel

Tabella 5: Automorfismi di tipo  $\bar{1}$ 

$\tilde{V} \subseteq \tilde{\mathfrak{M}}_4$	$\text{Aut}_{\bar{1}}(S)$	$ \text{Aut}_{\bar{1}}(S) $	$\dim \tilde{V}$	$ \{\tilde{V}_i\} $
$\tilde{O}$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	16	0	1
$\tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2 \cup \tilde{T}_3 \setminus \tilde{O}$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	8	1	3
$\tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3 \setminus (\tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2 \cup \tilde{T}_3)$	$\mathbb{Z}_4$	4	2	3
$\tilde{S}_4 \setminus \tilde{T}_1$	$\mathbb{Z}_4$	4	3	1
$\tilde{S}_5 \setminus (\tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2 \cup \tilde{T}_3)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4	3	1
$\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3 \setminus (\tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3 \cup \tilde{S}_5)$	$\mathbb{Z}_2$	2	4	2
$\tilde{R}_1 \setminus (\tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_4 \cup \tilde{S}_5)$	$\mathbb{Z}_2$	2	6	1
$\tilde{\mathfrak{M}}_4 \setminus (\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3 \cup \tilde{R}_1)$	$\{\text{Id}\}$	1	8	1

diagramma di Hasse (cioè, una linea collega due spazi se quello posto più in basso è contenuto in quello posto più in alto)



ordinato secondo le dimensioni degli spazi; l'assenza della tilde significa che li stiamo considerando in  $\mathfrak{M}_4$ .

I possibili casi sono quindi quelli elencati nella tabella 5.

### 4.3 AUTOMORFISMI DI TIPO $\bar{3}$

Consideriamo la stessa superficie  $S$  con il suo rivestimento  $X$ . Cerchiamo gli automorfismi  $\varphi$  di  $X$  rappresentati da una matrice della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_3}, \zeta^{i_3}, \zeta^{i_1+i_3}, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})M_\sigma,$$

dove  $\sigma = (1,3)(4,6)(7,8)$ ;  $\varphi$  manda  $X$  nel rivestimento della superficie  $S'$  corrispondente al punto

$$(a_{1,3}\zeta^{2i_1+2i_3}, a_{1,2,3}\zeta^{i_1+i_3}, b_{2,3}\zeta^{i_3-j_1}, b_{1,2}\zeta^{i_1+j_1}, \\ c_{3,1}\zeta^{i_1-i_3}, c_{1,3}\zeta^{i_3-i_1}, c_{2,3}\zeta^{2i_3}, c_{1,2}\zeta^{2i_1}).$$

e vogliamo che questo punto coincida con quello di  $S$ . Come nel caso precedente possiamo dire che  $\eta = \zeta^{2j_1}$ .

Osserviamo che gli elementi delle coppie di coefficienti  $(b_{1,2}, b_{2,3})$ ,  $(c_{1,3}, c_{3,1})$  e  $(c_{1,2}, c_{2,3})$  vengono scambiati, di conseguenza in ogni coppia se c'è un elemento nullo e uno non nullo non possono esserci automorfismi di tipo  $\bar{3}$ . Inoltre, se sono entrambi non nulli, è facile vedere che un'altra condizione necessaria per l'esistenza di un automorfismo di tipo  $\bar{3}$  è che il rapporto tra gli elementi di ogni coppia sia una radice quarta dell'unità.

**4.3.1 NOTAZIONE.** Per ogni coppia di coefficienti  $(b_{1,2}, b_{2,3})$ ,  $(c_{1,3}, c_{3,1})$  e  $(c_{1,2}, c_{2,3})$ , se entrambi gli elementi della coppia sono non nulli e il loro rapporto è una radice quarta dell'unità, definiamo  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  in modo che  $b_{1,2}b_{2,3}^{-1} = \zeta^{n_1}$ ,  $c_{1,3}c_{3,1}^{-1} = \zeta^{n_2}$  e  $c_{1,2}c_{2,3}^{-1} = \zeta^{n_3}$ .

Se tutti i coefficienti sono non nulli, il sistema che si ottiene sugli esponenti  $i_1, i_3, j_1$  è il seguente:

$$\begin{cases} 2i_1 + 2i_3 \equiv 0, & i_1 - i_3 + 2j_1 \equiv n_2, \\ i_1 + i_3 \equiv 0, & i_3 - i_1 + 2j_1 \equiv n_2, \\ i_3 - j_1 \equiv n_1, & 2i_3 + 2j_1 \equiv n_3, \\ -i_1 - j_1 \equiv n_1, & 2i_1 + 2j_1 \equiv n_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_2 \equiv 2n_1, \\ n_3 \equiv 2n_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} i_1 \equiv -n_1 - j_1, \\ i_3 \equiv n_1 + j_1. \end{cases}$$

Possiamo allora dire che se i coefficienti sono tutti non nulli, nelle quattro sottovarietà lineari  $\tilde{W}_i$  di  $\tilde{\mathcal{M}}_4$  definite dai sistemi

$$\begin{cases} b_{1,2} = \zeta^i b_{2,3}, \\ c_{1,3} = \zeta^{2i} c_{3,1}, \\ c_{1,2} = \zeta^{2i} c_{2,3} \end{cases}$$

al variare di  $i$  in  $\mathbb{Z}_4$ , ci sono quattro automorfismi di tipo  $\bar{3}$  su  $X$ , che danno un automorfismo di tipo  $\bar{3}$  su  $S$ .

Viceversa, se tutti i coefficienti sono nulli, non ci sono condizioni su  $i_1, i_3$  e  $j_1$ ; quindi  $|\text{Aut}_{\bar{3}}(X)| = 64$  e ci sono 16 automorfismi di tipo  $\bar{3}$  su  $S$ .

In generale, abbiamo 32 possibilità da considerare (l'annullarsi o meno di cinque coefficienti); osserviamo però che se  $b_{1,2}$  e  $b_{2,3}$  sono non nulli, allora, indipendentemente dal valore degli altri coefficienti,

devono valere  $i_1 = -n_1 - j_1$  e  $i_3 = n_1 + j_1$ , oltre che  $n_3 = n_2 = 2n_1$  se i corrispondenti coefficienti sono non nulli, ottenendo quattro automorfismi nelle quattro sottovarietà  $\tilde{W}_i$ . Se invece  $b_{1,2} = b_{2,3} = 0$ , rimangono sedici casi; svolgendo i conti, si possono riscontrare le seguenti possibilità.

$\text{Aut}_{\tilde{3}}(X)$  HA 64 ELEMENTI se e solo se tutti i coefficienti si annullano.

$\text{Aut}_{\tilde{3}}(X)$  HA 32 ELEMENTI se e solo se si è in  $\tilde{T}_1$  (che era definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,3}$ ); l'unica condizione è  $i_3 \equiv i_1 + \varepsilon$  e gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{i_1+\varepsilon}, \zeta^{2i_1+\varepsilon}, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})M_\sigma.$$

$\text{Aut}_{\tilde{3}}(X)$  HA 16 ELEMENTI se e solo se si è in una di queste cinque sottovarietà di  $\tilde{\mathfrak{M}}_4$ :

- $\tilde{S}_1$ , che era definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,3}$  e  $a_{1,2,3}$ , in cui l'unica condizione è  $i_3 \equiv -i_1$  e gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{-i_1}, 1, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})M_\sigma;$$

- $\tilde{S}_{6,n_2}$  per  $n_2 \in \{0, 2\}$ , definite dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,3}$ ,  $c_{1,3}$  e  $c_{3,1}$  e da  $c_{1,3} = \zeta^{n_2}c_{3,1}$ , in cui l'unica relazione è  $i_3 \equiv n_2 + i_1 + 2j_1$  e gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{n_2+i_1+2j_1}, \zeta^{n_2+2i_1+2j_1}, \zeta^{i_1}, \zeta^{j_1}, \zeta^{-j_1})M_\sigma;$$

- $\tilde{S}_{7,n_3}$  per  $n_3 \in \{0, 2\}$ , definite dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,3}$ ,  $c_{1,2}$  e  $c_{2,3}$  e da  $c_{1,2} = \zeta^{n_3}c_{2,3}$ , in cui si hanno le relazioni  $i_3 \equiv i_1 + \varepsilon$  e  $j_1 \equiv n_3/2 + i_1$  e gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{i_1+\varepsilon}, \zeta^{2i_1+\varepsilon}, \zeta^{i_1}, \zeta^{n_3/2+i_1}, \zeta^{-n_3/2-i_1})M_\sigma;$$

$\text{Aut}_{\tilde{3}}(X)$  HA 8 ELEMENTI se e solo se si è in una di queste dieci sottovarietà di  $\tilde{\mathfrak{M}}_4$ :

- $\tilde{R}_{4,n}$  per  $n \in \{0, 2\}$ , definita dall'annullarsi di  $b_{1,2}$  e  $b_{2,3}$  e da  $c_{1,3} = \zeta^n c_{3,1}$  e  $c_{1,2} = \zeta^n c_{2,3}$ , in cui si hanno le relazioni  $i_3 \equiv -i_1$  e  $j_1 \equiv n/2 + i_1$  e gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{-i_1}, 1, \zeta^{i_1}, \zeta^{n/2+i_1}, \zeta^{-n/2-i_1})M_\sigma;$$



- $\tilde{R}_{5,n_2,n_3}$  per  $n_2, n_3 \in \{0, 2\}$ , definita dall'annullarsi di  $a_{1,2,3}$ ,  $b_{1,2}$  e  $b_{2,3}$  e da  $c_{1,3} = \zeta^{n_2} c_{3,1}$  e  $c_{1,2} = \zeta^{n_3} c_{2,3}$ , in cui si hanno le relazioni  $i_3 \equiv n_2 + n_3 - i_1$  e  $j_1 \equiv n_3/2 + i_1$  e gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{n_2+n_3-i_1}, \zeta^{n_2+n_3}, \zeta^{i_1}, \zeta^{n_3/2+i_1}, \zeta^{-n_3/2-i_1})M_\sigma;$$

- $\tilde{R}_{6,n_2}$  per  $n_2 \in \{0, 2\}$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,2,3}$ ,  $c_{1,3}$  e  $c_{3,1}$  e da  $c_{1,3} = \zeta^{n_2} c_{3,1}$ , in cui si hanno le relazioni  $i_3 \equiv -i_1$  e  $j_1 \equiv n_2/2 + i_1$  e gli automorfismi sono della forma

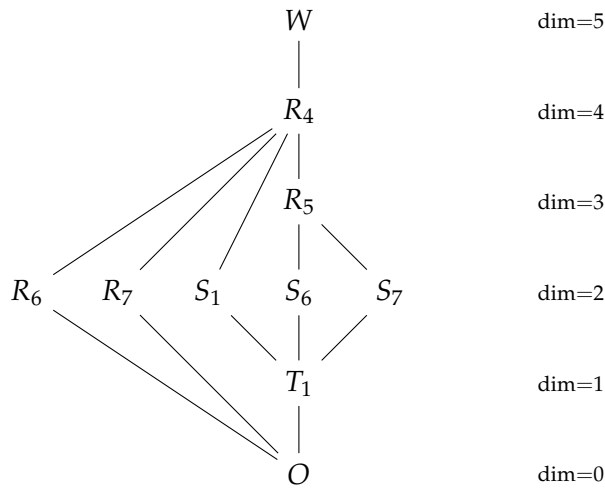
$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{-i_1}, 1, \zeta^{i_1}, \zeta^{n_2/2+i_1}, \zeta^{-n_2/2-i_1})M_\sigma;$$

- $\tilde{R}_{7,n_3}$  per  $n_3 \in \{0, 2\}$ , definita dall'annullarsi di tutti i coefficienti tranne  $a_{1,2,3}$ ,  $c_{1,2}$  e  $c_{2,3}$  e da  $c_{1,2} = \zeta^{n_3} c_{2,3}$ , in cui si hanno le relazioni  $i_3 \equiv -i_1$  e  $j_1 \equiv n_3/2 + i_1$  e gli automorfismi sono della forma

$$\text{diag}(\zeta^{2i_1}, 1, \zeta^{2i_1}, \zeta^{-i_1}, 1, \zeta^{i_1}, \zeta^{n_3/2+i_1}, \zeta^{-n_3/2-i_1})M_\sigma;$$

$\text{Aut}_{\bar{3}}(X)$  È VUOTO in ogni altro punto con  $b_{1,2} = b_{2,3} = 0$ .

Se denotiamo con  $\tilde{S}_6$  l'unione degli spazi  $\tilde{S}_{6,i}$  al variare di  $i$  (e analogamente per gli altri), osserviamo che  $S_6$ , cioè il quoziente di  $\tilde{S}_6$  in  $\mathfrak{M}_4$ , ha una sola componente irriducibile, perché le varie componenti di  $\tilde{S}_6$  vengono identificate dall'azione su  $\tilde{\mathfrak{M}}_4$ ; lo stesso argomento vale per le altre sottovarietà. Osserviamo anche che, nonostante  $\tilde{R}_4$  non contenga tutte le componenti di  $\tilde{R}_5$ , abbiamo  $R_4 \supseteq R_5$  in  $\mathfrak{M}_4$ . Il diagramma di Hasse per gli spazi coinvolti negli automorfismi di tipo  $\bar{3}$  è



e possiamo riassumere quanto visto nella tabella 6.

Tabella 6: Automorfismi di tipo  $\bar{3}$ 

$\tilde{V} \subseteq \tilde{\mathfrak{M}}_4$	$ \text{Aut}_{\bar{3}}(S) $	$\dim \tilde{V}$	$ \{\tilde{V}_i\} $
$\tilde{O}$	16	0	1
$\tilde{T}_1 \setminus \tilde{O}$	8	1	1
$\tilde{S}_1 \setminus \tilde{T}_1$	4	2	1
$\tilde{S}_6 \cup \tilde{S}_7 \setminus \tilde{T}_1$	4	2	4
$\tilde{R}_6 \cup \tilde{R}_7 \setminus \tilde{O}$	2	2	4
$\tilde{R}_5 \setminus (\tilde{S}_6 \cup \tilde{S}_7)$	2	3	4
$\tilde{R}_4 \setminus (\tilde{S}_1 \cup \tilde{R}_5 \cup \tilde{R}_6 \cup \tilde{R}_7)$	2	4	2
$\tilde{W} \setminus \tilde{R}_4$	1	5	4
$\tilde{\mathfrak{M}}_4 \setminus \tilde{W}$	0	8	1

## 4.4 CONCLUSIONE

Osserviamo innanzitutto che il punto corrispondente all'origine di  $\tilde{\mathfrak{M}}_4$  non rappresenta una superficie di Godeaux: infatti, una delle due quadriche è  $q_2 = y_1^2 + y_3^2$ , cioè la superficie in  $\mathbb{P}^7$  è riducibile o degenera, ed entrambi i casi non possono accadere. Questo ci impedisce di concludere, come fatto nel caso delle superfici con torsione di ordine cinque, che tutte le sottovarietà trovate contengono un aperto non vuoto di punti corrispondenti a superfici di Godeaux; proseguendo dalle sottovarietà di dimensione più bassa a quelle di dimensione più alta, otteniamo i seguenti risultati.

IN  $T_1$  non ci sono superfici di Godeaux. Infatti, come per  $O$ , una quadrica risulta essere  $y_1^2 + y_3^2$ , in particolare riducibile.

IN  $T_2$  c'è un aperto non vuoto di superfici di Godeaux. Le equazioni delle due quadriche in un punto di  $T_2$ , viste nel cono  $V'$  (cioè nelle variabili  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_3$ ) sono della forma

$$\begin{aligned} q_0 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a_{1,3}x_1^2x_3^2 + y_1y_3, \\ q_2 &= c_{1,2}x_1^2x_2^2 + y_1^2 + y_3^2. \end{aligned}$$

Disomogeneizzando rispetto alle tre variabili  $x_i$ , si ottengono tre aperti affini di  $V'$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ ; le coordinate su, per esempio,  $U_1$ , sono  $x_2/x_1, x_3/x_1, y_1/x_1^2, y_3/x_1^2$ , e  $U_1$  è isomorfo in questo modo ad  $\mathbb{A}^4$ . I tre aperti non danno un ricoprimento di  $V'$ , ma comunque sono tali che  $X = \bigcup_{i=1}^3 (X \cap U_i)$ , e si possono determinare le singolarità di  $X$  su  $U_i$  calcolando dove la matrice jaco-

biana delle equazioni disomogeneizzate non ha rango massimo. Se  $c_{1,2} \neq 0$ , risultano otto punti singolari:

$$\begin{aligned} & [\zeta^i \sqrt[4]{-1}, 0, 1, 0, 0], \\ & [0, \zeta^i \sqrt[4]{-1}, 1, 0, 0], \end{aligned}$$

al variare di  $i \in \mathbb{Z}_4$ , con  $\sqrt[4]{-1} := e^{i\pi/4}$ . Rimane da verificare se questi sono punti doppi razionali: per esempio, per  $p := [\sqrt[4]{-1}, 0, 1, 0, 0] \in U_3$ , abbiamo  $\partial q_0 / \partial x_1|_p = (4x_1^3)|_p \neq 0$  (dove con  $q_0$  denotiamo l'equazione della prima quadrica disomogeneizzata rispetto a  $x_3$ ), cioè la singolarità è di tipo ipersuperficie; allora, almeno analiticamente, possiamo usare il teorema della funzione implicita per esprimere localmente  $x_1$  in funzione di  $x_2, y_1, y_3$ , cioè  $x_1 = \sqrt[4]{-1} + g(x_2, y_1, y_3)$  con  $g$  che si annulla nel punto  $(x_2(p), y_1(p), y_3(p))$ . Ora, andando a sostituire l'espressione di  $x_1$  in  $q_2$ , disomogeneizzata rispetto a  $x_3$ , otteniamo che  $X$  è descritta localmente da

$$q_2 = y_1^2 + y_3^2 + \sqrt[4]{-1} c_{1,2} x_2^2 + \bar{q}_2,$$

dove  $\bar{q}_2$  è un'espressione in serie con ordine almeno tre in  $p$ . Ma questa è l'espressione di un punto singolare di tipo  $A_1$ , che in particolare è un punto doppio razionale (vedi [4], Sezione III.7). Per gli altri punti il procedimento è analogo, quindi la superficie  $X$  che si ottiene ha al più punti doppi razionali e perciò la desingularizzazione del suo quoziente per l'azione  $\rho$  è una superficie di Godeaux.

IN  $T_3$  c'è un aperto non vuoto di superfici di Godeaux, dato che le equazioni delle quadriche sono quelle della sottovarietà  $T_2$  scambiando  $x_1$  con  $x_3$ .

IN  $S_1$  non ci sono superfici di Godeaux, analogamente al caso  $T_1$ .

IN  $S_6$  c'è un aperto non vuoto di superfici di Godeaux; infatti, ripetendo il procedimento del caso  $T_2$ , risulta che se  $a_{1,3}$ ,  $c_{1,3}$  e  $c_{3,1}$  sono non nulli, la corrispondente superficie in  $V'$  non ha punti singolari.

IN  $S_7$  c'è un aperto non vuoto di superfici di Godeaux. Questa volta, in una superficie corrispondente a un punto di  $S_7$  troviamo quattro punti singolari, della forma

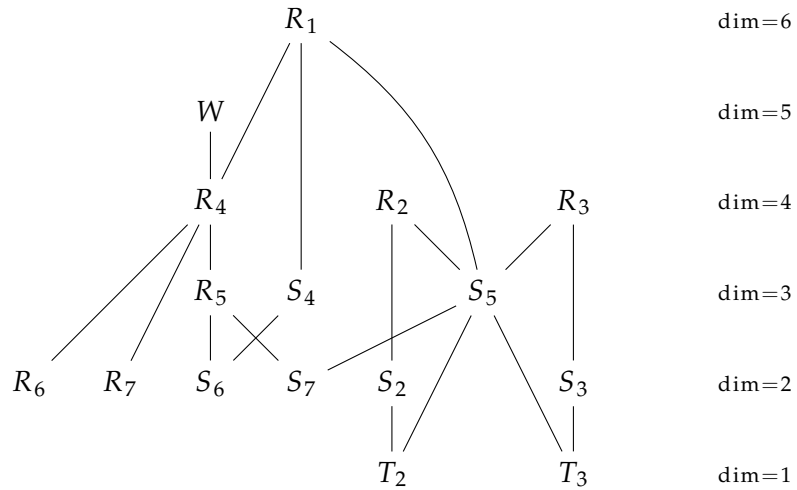
$$\left[ 1, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-a_{1,3} \pm \sqrt{a_{1,3}^2 - 4}}, 0, 0 \right];$$

se  $a_{1,3} \notin \{-2, 2\}$ , disomogeneizzando rispetto a  $x_1$ , abbiamo  $\partial q_0 / \partial x_3 \neq 0$ , e sostituendo in  $q_2$  l'espressione analitica di  $x_3$  in funzione di  $x_2, y_1$  e  $y_3$ , otteniamo ancora che i punti singolari sono di tipo  $A_1$  e quindi razionali.

IN  $R_6$  c'è un aperto non vuoto di superfici di Godeaux, dato che se  $a_{1,2,3}, c_{1,3}$  e  $c_{3,1}$  sono non nulli, la corrispondente superficie in  $V'$  è liscia.

IN  $R_7$  c'è un aperto non vuoto di superfici di Godeaux, dato che se  $a_{1,2,3}, c_{1,2}$  e  $c_{2,3}$  sono non nulli, la corrispondente superficie in  $V'$  ha quattro punti singolari, che si dimostrano essere punti doppi razionali col procedimento appena applicato.

Unendo i due diagrammi visti e non considerando le sottovarietà che non contengono superfici di Godeaux, otteniamo il diagramma di Hasse



dove abbiamo ordinato gli spazi in livelli a seconda della loro dimensione.

Possiamo infine, nella sottovarietà  $S_6$ , dove compare il prodotto semidiretto, calcolare l'effettivo gruppo di automorfismi. Per farlo è sufficiente considerare il gruppo come gruppo di matrici; risulta che il gruppo  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$  è in realtà commutativo, cioè è  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ . Dato che ovviamente  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , otteniamo in particolare il seguente.

**4.4.1 TEOREMA.** *Il gruppo di automorfismi di una superficie di Godeaux con torsione di ordine quattro è abeliano.*

Riassumiamo i risultati ottenuti nella tabella 7, dividendo i casi in base al gruppo e alla dimensione del corrispondente spazio.

Tabella 7: Automorfismi delle superfici con  $\pi_1^{\text{alg}} \cong \mathbb{Z}_4$ 

$\text{Aut}(S)$	$V \subseteq \mathfrak{M}_4$	$\dim V$	$ \{\tilde{V}_i\} $	$ \{V_i\} $
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$T_2 \cup T_3$	1	2	2
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$S_6$	2	2	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$S_7$	2	2	1
$\mathbb{Z}_4$	$S_2 \cup S_3 \setminus (T_2 \cup T_3)$	2	2	2
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$R_6 \cup R_7$	2	4	2
$\mathbb{Z}_4$	$S_4 \setminus S_6$	3	1	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$S_5 \setminus (S_7 \cup T_2 \cup T_3)$	3	1	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$R_5 \setminus (S_6 \cup S_7)$	3	4	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$R_4 \setminus (R_5 \cup R_6 \cup R_7)$	4	2	1
$\mathbb{Z}_2$	$R_2 \cup R_3 \setminus (S_2 \cup S_3 \cup S_5)$	4	2	2
$\mathbb{Z}_2$	$W \setminus R_4$	5	4	1
$\mathbb{Z}_2$	$R_1 \setminus (R_4 \cup S_4 \cup S_5)$	6	1	1
$\{\text{Id}\}$	$\mathfrak{M}_4 \setminus (W \cup R_2 \cup R_3 \cup R_1)$	8	1	1

```
#!/usr/bin/env python
from collections import defaultdict

def ordina_equazioni(e, f):
    if 1 in e or 3 in e: return -1
    elif 1 in f or 3 in f: return 1
    elif 2 in e: return -1
    else: return 1

# Restituisce il gruppo delle soluzioni
# e le relazioni tra le incognite
# di un sistema con n incognite modulo 4.
def sistema(equazioni, n):
    eq = []
    gruppo_soluzioni = []
    # Copia delle equazioni per non
    # modificare quelle di partenza
    for e in equazioni:
        eq.append(e[:])
    eq.sort(ordina_equazioni)
    for i in xrange(len(eq)):
        # Scelta di un'equazione (preferibilmente
        # con un coefficiente unitario)
        e = eq[i]
        if 1 in e:
            indice = e.index(1)
            gruppo_soluzioni.append(1)
        elif 3 in e:
            for j in xrange(n + 1): e[j] = (-e[j]) % 4
            indice = e.index(1)
            gruppo_soluzioni.append(1)
        elif 2 in e:
            indice = e.index(2)
```

```

        gruppo_soluzioni.append(2)
    else:
        while len(eq) > i:
            del(eq[i])
            break

    for j in xrange(i + 1, len(eq)):
        f = eq[j]
        coeff = f[indice]
        if coeff != 0:
            if e[indice] == 1:
                for k in xrange(n + 1):
                    f[k] = (f[k] - coeff * e[k]) % 4
            else: # eq[i][indice] == 2
                for k in xrange(n + 1):
                    f[k] = (f[k] - e[k]) % 4

    tmp = eq[i+1:]
    tmp.sort(ordina_equazioni)
    eq = eq[:i+1] + tmp
    gruppo_soluzioni += [4] * (n - len(gruppo_soluzioni))
    return eq, gruppo_soluzioni

# L'ultimo numero e' il termine noto,
# gli altri i coefficienti di
# i_1, i_3, j_1.
equazioni = [[2, 2, 0, 0],
              [1, 1, 0, 0],
              [1, 0, 1, 0],
              [0, 1, 3, 0],
              [1, 3, 2, 0],
              [1, 3, 2, 0],
              [2, 0, 2, 0],
              [0, 2, 2, 0]]
coefficienti = ["a_13", "a_123", "b_12", "b_23",
                "c_13", "c_31", "c_12", "c_23"]
relazioni = defaultdict(list)
gruppi = defaultdict(list)
nulli = defaultdict(list)
spazi = defaultdict(list)
spazi2 = defaultdict(list)

for i in xrange(2**8):
    # n-esimo bit di i nullo =
    # = n-esimo coefficiente nullo
    f = [i / (2**j) % 2 for j in xrange(8)]

    eq = [equazioni[j] for j in xrange(8) if f[j] != 0]

    relazioni[i], gruppi[i] = sistema(eq, 3)
    nulli[i] = [coefficienti[j]
                for j in xrange(8)
                if f[j] == 0]
    spazi[tuple(gruppi[i])].append(i)

# Eliminazione degli spazi contenuti

```

```

# in altri spazi e stampa dei risultati.
for x in spazi.keys():
    if spazi[x] != []:
        g = gruppi[spazi[x][0]]
        print "Gruppo Z_%d x Z_%d x Z_%d" %
            (g[0], g[1], g[2]),
        print "(%d elementi):\n" % (g[0] * g[1] * g[2])
        spazi2[x] = spazi[x][:]
        for s in spazi2[x]:
            for t in spazi2[x]:
                if t != s:
                    dentro = True
                    for i in nulli[t]:
                        if i not in nulli[s]:
                            dentro = False
                            break
                    if dentro:
                        spazi[x].remove(s)
                        break
        for s in spazi[x]:
            if nulli[s] != []:
                print " = ".join(nulli[s]) + " = o"
                for r in relazioni[s]:
                    print "%d i_1 + %d i_3 + %d j_1 = %d" %
                        (r[0], r[1], r[2], r[3])
                print

```





---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] ANDREOTTI, A. (1950), «Sopra le superficie algebriche che posseggono trasformazioni birazionali in sé», *Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni dell'Università di Roma*, Vol. 9, p. 255–279.
- [2] BARLOW, R. (1984), «Some new surfaces with  $p_g = 0$ », *Duke Mathematical Journal*, Vol. 51 (4), p. 889–904.
- [3] BARLOW, R. (1985), «A simply connected surface of general type with  $p_g = 0$ », *Inventiones Mathematicae*, Vol. 79 (2), p. 293–301.
- [4] BARTH, W. P. *et al.* (2004), *Compact complex surfaces*, Vol. 4 di *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics.*, Springer-Verlag, Berlin, second ed.
- [5] BEAUVILLE, A. (1979), «L'application canonique pour les surfaces de type général», *Inventiones Mathematicae*, Vol. 55 (2), p. 121–140.
- [6] BEAUVILLE, A. (1983), *Complex algebraic surfaces*, Vol. 68 di *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] CALABRI, A., CILIBERTO, C. e MENDES LOPES, M. (2007), «Numerical Godeaux surfaces with an involution», *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 359 (4), p. 1605–1632.
- [8] CAMPEDELLI, L. (1932), «Sopra alcuni piani doppi notevoli con curve di dimensione del decimo ordine», *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, Vol. 15, p. 536–542.
- [9] CASTELNUOVO, G. (1896), «Sulle superficie di genere zero», *Memorie della società italiana delle scienze*, Vol. 3 (10), p. 103–126.
- [10] CASTELNUOVO, G. e ENRIQUES, F. (1897), «Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques», *Mathematische Annalen*, Vol. 48, p. 241–316.
- [11] CORTI, A. (1991), «Polynomial bounds for the number of automorphisms of a surface of general type», *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, Vol. 24 (1), p. 113–137.
- [12] ESNAULT, H. e VIEHWEG, E. (1992), *Lectures on vanishing theorems*, Vol. 20 di *DMV Seminar*, Birkhäuser Verlag, Basel.

- [13] GODEAUX, L. (1931), «Sur une surface algébrique de genre zero et de bigenre deux», *Atti Accademia Nazionale dei Lincei*, Vol. 14, p. 479–481.
- [14] GORESKEY, M. e MACPHERSON, R. (1988), *Stratified Morse theory*, Vol. 14 di *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, Springer-Verlag, Berlin.
- [15] GRIFFITHS, P. e HARRIS, J. (1978), *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York.
- [16] HARTSHORNE, R. (1977), *Algebraic geometry*, Vol. 52 di *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York.
- [17] HORIKAWA, E. (1975), «On deformations of quintic surfaces», *Inventiones mathematicae*, Vol. 31 (1), p. 43–85.
- [18] HORIKAWA, E. (1976), «Algebraic surfaces of general type with small  $c_1^2$ , I», *Annals of Mathematics*, Vol. 104 (2), p. 357–387.
- [19] HORIKAWA, E. (1981), «Algebraic surfaces of general type with small  $c_1^2$ , V», *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo*, Vol. 28 (3), p. 745–755.
- [20] HUCKLEBERRY, A. T. e SAUER, M. (1990), «On the order of the automorphism group of a surface of general type», *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 205 (2), p. 321–329.
- [21] MILNE, J. S. (1980), *Étale cohomology*, Vol. 33 di *Princeton Mathematical Series*, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [22] MIYAOKA, Y. (1976), «Tricanonical maps of numerical Godeaux surfaces», *Inventiones Mathematicae*, Vol. 34 (2), p. 99–111.
- [23] PALMIERI, E. (2007), *Numerical Godeaux surfaces with an automorphism of order three*, Tesi di dottorato, Università degli studi Roma Tre.
- [24] PARDINI, R. (1991), «Abelian covers of algebraic varieties», *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. 417, p. 191–213.
- [25] REID, M. (1978), «Surfaces with  $p_g = 0$ ,  $K^2 = 1$ », *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo*, Vol. 25 (1), p. 75–92.
- [26] SERRE, J.-P. (1956), «Géométrie algébrique et géométrie analytique», *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 6, p. 1–42.
- [27] XIAO, G. (1995), «Bound of automorphisms of surfaces of general type. II», *Journal of Algebraic Geometry*, Vol. 4 (4), p. 701–793.